Elementi di base del calcolo combinatorio

Problema

La segretaria di un ufficio deve depositare 3 lettere in 5 cassette della posta. Piazza le lettere scegliendo le cassette a caso, senza leggere il nome del destinatario.

(1) In quanti modi è possibile mettere le lettere nelle cassette?

(2) In quanti di questi, almeno una lettera va nella cassetta giusta?

Soluzione

Innanzitutto notiamo che il problema (1) è equivalente ai problemi:

"una segretaria deve scegliere a caso 3 cassette della posta da un insieme di 5; in quanti modi può farlo?" oppure "una segretaria estrae a caso 3 palline da un'urna che ne contiene 5 distinte; quanti sono i risultati possibili?"

Poi vediamo che il problema non è ben specificato, nel senso che:

(a) si può mettere più di una busta nella stesa buca? (equivalentemente: una volta estratta una pallina, la rimetto dentro e posso estrarre di nuovo la stessa?)

(b) le lettere sono uguali o diverse? Una volta scelte le 3 caselle, è rilevante sapere quale busta metto nella prime e così via? (equivalentemente: è rilevante l'ordinamento con cui si estraggono le palline dall'urna?)

Per quanto riguarda il punto (a), se la risposta è no, allora si parla di esperimento *senza ripetizione*; se la risposta è si, allora si parla di esperimento *con ripetizione*.

Per quanto riguarda il punto (b), se la risposta è no, allora dobbiamo contare le *combinazioni*; se la risposta è no, allora dobbiamo contare le *disposizioni*.

La risposta al problema (1) è quindi:

	L'ordinamento è rilevante?	
Con ripetizione?	si	no
no	$D_{5,3} = \dfrac{5!}{(5-3)!}$	$C_{5,3} = \binom{5}{3}$
si	$D^R_{5,3} = 5^3$	$C^R_{5,3} = \binom{5+3-1}{3}$

Vediamo come abbiamo ottenuto quei valori.

• *Ordinamento rilevante, senza ripetizione* $\quad D_{5,3}$*:*

La segretaria può scegliere la prima cassetta in 5 modi (per prima può scegliere una qualsiasi delle 5 cassette). Una volta scelta la prima, la seconda può essere scelta solo in 4 modi, perché le cassette devono essere diverse. Per la terza cassetta, una volta scelte le prime due, avrà solo 3 possibilità. Quindi i possibili modi di scegliere le 3 cassette sono $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Se indichiamo con $n!$ il prodotto dei primi n numeri interi

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$$

vediamo che

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{5!}{2!}$$

proprio come scritto nella tabella.

In generale, se le cassette fossero n e le lettere k (con $k \leq n$, altrimenti non riuscirei a distribuire tutte le lettere), allora il numero di modi di distribuire queste lettere (numero di *disposizioni senza ripetizione di n elementi di classe k*) è

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Notiamo che se $n = k$, allora il problema equivale a individuare il numero di possibili ordinamenti delle n lettere, e questo numero è $n!$ (detto anche *numero di permutazioni di n elementi*). Questo giustifica anche il fatto che per convenzione si pone $0! = 1$, infatti

$$D_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

ha senso solo se $0! = 1$.

- *Ordinamento non rilevante, senza ripetizione* $\quad C_{5,3}$:

in questo caso basta considerare identiche tutte le scelte che cambiano solo per l'ordinamento.

Indichiamo con A,B,C,D,E le 5 caselle della posta. Tra le 60 scelte diverse viste prima (considerando l'ordinamento rilevante), ad esempio ci sono le scelte ADE, AED, DAE, DEA, EAD, EDA che prima consideavamo come 6 diverse possibilità.

Ora che non ci interessa l'ordinamento, di fatto quelle 6 scelte vanno considerate come un'unica possibilità. Il passaggio dal considerare l'ordinamento al non considerarlo non fà altro che ridurre in numero di alternative di un fattore pari a $3! = 6$ (cioè pari al numero di possibili ordinamenti delle 3 caselle scelte). Di fatto, quindi,

$$C_{5,3} = \frac{D_{5,3}}{3!} = \frac{5!}{(5-3)!\,3!} = \binom{5}{3}.$$

In generale, con n cassette della posta e k lettere (ancora supponendo $k \leq n$), il *numero di combinazioni senza ripetizione di n elementi di classe k* è

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$$

che è detto *coefficiente binomiale n su k.*

• *Ordinamento rilevante, con ripetizione* $\quad D^R_{5,3}$*:*
Ripetendo l'argomantazione fatta per il caso di disposizioni senza ripetizione, abbiamo 5 scelte per la prima casella. Siccome le caselle possono anche ripetersi, abbiamo ancora 5 scelte per la seconda casella e così anche per la terza. Quindi

$$D^R_{5,3} = 5^3.$$

In generale, con n caselle della posta e k lettere (questa volta possiamo anche avere più lettere che caselle, quindi non c'è più il vincolo su k), si ha che il numero di *disposizioni con ripetizione di n elementi di classe k* è

$$D^R_{n,k} = n^k.$$

• *Ordinamento non rilevante, con ripetizione* $\quad C^R_{5,3}$*:*
Questo caso è più complesso da trattare e comunque in Calcolo delle Probabilità di fatto non viene usato quasi mai (il motivo è in uno dei problemi riportati sotto). Quindi per completezza scriviamo il risultato ma non lo argomentiamo: il *numero di combinazioni con ripetizione di n elementi di classe k* è

$$C^R_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}.$$

Per la risposta al problema (2), supponendo (sembra il caso più realistico) che le lettere siano diverse e che i destinatari potrebbero anche coincidere, facciamo riferimento alle disposizioni con ripetizione.

Indicando con A l'evento "almeno una lettera va nella cassetta giusta", chiaramente A^c sarà "nessuna lettera capita nella buca giusta" e si ha

$$\#A^c = \text{numero di casi favorevoli ad } A^c = 4^3$$

in quanto la segretaria ha a disposizione 4 possibili scelte (sbagliate) per la prima lettera, 4 per la seconda e 4 per la terza.

Naturalmente, il numero di elementi in A si ottiene sottraendo dal numero totale di elementi il numero di elementi in A^c e quindi

$$\#A = 5^3 - 4^3.$$

Esercizio Al gioco del lotto, calcolare la probabilità di:

(1) fare terno giocando 3 numeri su una sola ruota;

(2) fare ambo giocando 3 numeri su una sola ruota;

(3) indovinare k numeri giocandone n su una sola ruota.

Risposta

Per tutti i tre punti i casi possibili sono, ovviamente, tutte le possibili cinquine non ordinate di numeri distinti che possono uscire su una ruota, quindi

$$\#\text{casi possibili} = \binom{90}{5}.$$

Casi favorevoli:

Per il punto (1) sono tutte le cinquine non ordinate di numeri distinti in cui 3 sono scelti tra i 3 che ho giocato e 2 tra i restanti 87; quindi

$$\#\text{casi favorevoli a (1)} = \binom{3}{3}\binom{87}{2}.$$

Per il punto (2) sono tutte le cinquine non ordinate di numeri distinti in cui 2 sono scelti tra i 3 che ho giocato e 3 tra i restanti 87; quindi

$$\#\text{casi favorevoli a (2)} = \binom{3}{2}\binom{87}{3}.$$

Per il punto (3), si noti che il problema ha senso se: $k \in \{1, ..., 5\}$, $n \in \{k, k+1, ..., 90\}$. I casi favorevoli sono sono tutte le cinquine non ordinate di numeri distinti in cui k sono scelti tra gli n che ho giocato e $5-k$ tra i restanti $87-n$; quindi

$$\#\text{casi favorevoli a (3)} = \binom{n}{k}\binom{90-n}{5-k}.$$

Esercizio Una popolazione è costituita da n individui. Ipotizzando di sapere che nessuno è nato il 29 febbraio, calcolare la probabilità che almeno 2 festeggino il compleanno nello stesso giorno.

Risposta

Conviene calcolare la probabilità dell'evento complementare "tutti i compleanni in giorni diversi".

Consideriamo l'ipotesi, semplicistica, che per ciascun individuo tutti i giorni siano ugualmente probabili, per cui è sufficiente contare il numero dei casi possibili e quello dei casi favorevoli all'evento "tutti i compleanni in giorni diversi".

I casi possibili sono $D^R_{365,n} = 365^n$, per i casi favorevoli vale lo stesso ma senza le ripetizioni, quindi $D_{365,n} = 365!/(365-n)!$.

Segue che

$$P(\text{tutti i compleanni in giorni diversi}) = \frac{365!/(365-n)!}{365^n}$$

e

$$\begin{aligned} P(\text{almeno 2 compleanni lo stesso giorno}) &= 1 - \frac{365!/(365-n)!}{365^n} \\ &= 1 - \frac{365}{365}\frac{364}{365}\cdots\frac{365-n+1}{365}. \end{aligned}$$

Questa probabilità cresce in modo sorprendentemente veloce al crescere di n, tanto che per $n = 23$ la probabilità è maggiore di 1/2 e per $n = 40$ vale circa 0.9.

Esercizio Il Consiglio di Amministrazione di una società è composto da 6 uomini e 9 donne.

(1a) In quanti modi posso scegliere un comitato composto da 4 persone?

(1b) In quanti di questi ottengo un comitato costituito da 2 uomini e due donne?

(2a) In quanti modi posso scegliere un presidente e un comitato composto da 3 persone (che non contenga il presidente)?

(2b) In quanti di questi ottengo il presidente donna e il comitato composto da 2 uomini e 1 donna?

Risposta

(1a) Non c'è ripetizione e l'ordinamento non conta, quindi posso scegliere $\binom{15}{4}$ diversi comitati.

(1b) Devo considerare tutti i modi possibili di scegliere (senza ripetizione e senza considerare l'ordinamento) 2 uomini da 6 e due donne da 9, quindi $\binom{6}{2}\binom{9}{2}$.

(2a) Qui l'ordinamento conta in parte: mi interessa distinguere il presidente dal resto del gruppo.

Devo scegliere 1 presidente tra i 15 (in $\binom{15}{1}$ modi) e poi un comitato di 3 persone tra i restanti 14 (in $\binom{14}{3}$ modi)

$$\#\ \text{casi possibili} = \binom{15}{1}\binom{14}{3}$$

(2b) Il presidente lo devo scegliere tra le 9 donne (in $\binom{9}{1}$ modi).

Per il resto del gruppo considero i modi di scegliere un comitato con 2 uomini e 1 donna da un gruppo di 6 uomini e 8 donne (vedi caso (1)). Quindi i casi favorevoli sono

$$\#\ \text{casi favorevoli} = \binom{9}{1}\binom{6}{2}\binom{8}{1}.$$

Esercizio (GUARDATELO CHE È IMPORTANTE) Un'urna contiene 5 palline nere e 6 bianche. Estraggo a caso due palline dall'urna, con che probabilità saranno una nera e una bianca? Considerare sia il caso con reintroduzione nell'urna di ogni pallina estratta sia quello senza.

Risposta Non interessa l'ordine, quindi:

Senza ripetizione:

$$P(\text{una bianca e una nera}) = \frac{C_{6,1}C_{5,1}}{C_{11,2}} = \frac{\binom{6}{1}\binom{5}{1}}{\binom{11}{2}}.$$

Con ripetizione: non posso usare, come sembrerebbe immediato,

$$P(\text{una bianca e una nera}) = \frac{C^R_{6,1}C^R_{5,1}}{C^R_{11,2}}$$

perché le varie combinazioni con ripetizione non sono tutte equiprobabili. Vediamolo con un esempio, supponendo che le palline nell'urna siano distinguibili: $B_1, ..., B_6, N_1, ..., N_5$.

Due tra le possibili combinazioni con ripetizione sono: (B_1, B_2) (escono, in qualsiasi ordine, le due palline bianche contrassegnate dai numeri 1 e 2) e (B_1, B_1) (esce entrambe le volte la pallina bianca col numero 1).

L'evento (B_1, B_1) ha, ovviamente, probabilità

$$P(B_1, B_1) = \frac{1}{11^2}.$$

L'evento (B_1, B_2) invece è l'unione dei due eventi elementari: "esce prima B_1 e poi B_2" e "esce prima B_2 e poi B_1" e quindi ha probabilità

$$P(B_1, B_2) = 2\frac{1}{11^2}.$$

Si noti che problemi di questo tipo si verificano molto spesso quando si tratta di combinazioni con ripetizione. In questi casi conviene tenere in considerazione i possibili ordinamenti (anche se non ci interessano) e poi moltiplicare il risultato per tutti gli ordinamenti. Vediamo come:

casi possibili: $D^R_{11,2}$ (quindi consideriamo come possibili e distinti due risultati in cui le stesse palline sono osservate con ordine scambiato).

casi favorevoli: $D^R_{6,1}D^R_{5,1}2$ (quindi consideriamo tutti i modi di scegliere una pallina bianca su 6 (con ripetizione, ma qui non conta perché è solo una estrazione), tutti i modi di scegliere una pallina nera su 5 e moltiplichiamo per i possibili ordinamenti delle palline uscite).

Quindi se c'è ripetizione il risultato è

$$P(\text{una bianca e una nera}) = \frac{2D^R_{6,1}D^R_{5,1}}{D^R_{11,2}}.$$