Ruolo della dissipazione negli scambi energetici

Maggiore è Q (minore lo smorzamento) tanto più selettivo è l'oscillatore.

Cosa succede se $\beta \to 0, \quad Q \to \infty$?

l'oscillatore non può scambiare energia con lo stimolo esterno: se la frequenza è diversa, la risposta è assente, se la frequenza è uguale, l'energia tende ad infinito, raggiungendo sicuramente il carico di rottura dell'oscillatore

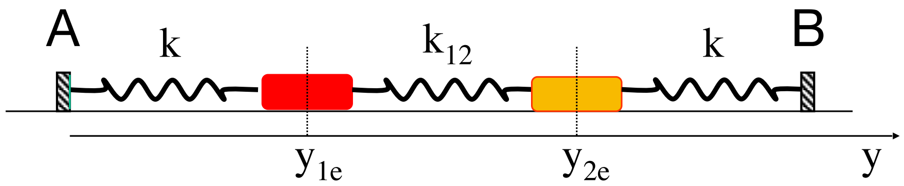
Notiamo che la maggior parte degli scambi di energia naturali ed artificiali si basa su onde (oscillazioni) e risonanza:

- la radiazione eccita atomi e molecole intorno alla posizione di equilibrio
- l'emissione e la ricezione del suono (naturale ed artificiale) si basa su meccanismi di oscillazione
- la trasmissione e la ricezione di radiosegnali avviene tramite oscillazioni elettriche regolate dalle stesse leggi degli oscillatori meccanici

Ruolo della dissipazione negli scambi di energia!

- senza dissipazione (attrito o altre forme) non sarebbe possibile lo scambio di segnali, ma neanche il trasferimento di energia dal sole alla terra attraverso la radiazione luminosa

Oscillatori accoppiati



$$x_1 = y_1 - y_{1e} \qquad x_2 = y_2 - y_{2e}$$

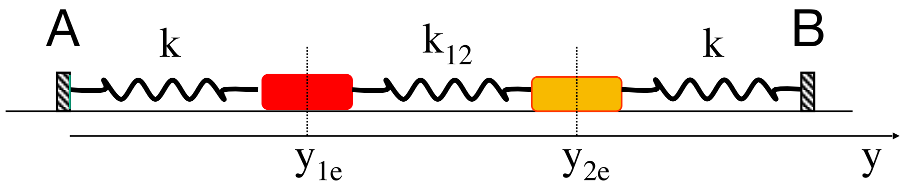
$$x_2 - x_1 = y_2 - y_{2e} - (y_1 - y_{1e}) = y_2 - y_1 - (y_{2e} - y_{1e})$$

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x_2}{dt^2} = -kx_2 - k_{12}(x_2 - x_1) \\ \\ m\dfrac{d^2x_1}{dt^2} = -kx_1 + k_{12}(x_2 - x_1) \end{cases}$$

sommando e sottraendo si ha:

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2(x_2 + x_1)}{dt^2} = -k(x_2 + x_1) \\ \\ m\dfrac{d^2(x_2 - x_1)}{dt^2} = -k(x_2 - x_1) - 2k_{12}(x_2 - x_1) = -(k + 2k_{12})(x_2 - x_1) \end{cases}$$

Oscillatori accoppiati



$$\begin{cases} m\dfrac{d^2(x_2+x_1)}{dt^2} = -k(x_2+x_1) \\ \\ m\dfrac{d^2(x_2-x_1)}{dt^2} = -k(x_2-x_1) - 2k_{12}(x_2-x_1) = -(k+2k_{12})(x_2-x_1) \end{cases}$$

due equazioni differenziali disaccoppiate nelle nuove variabili

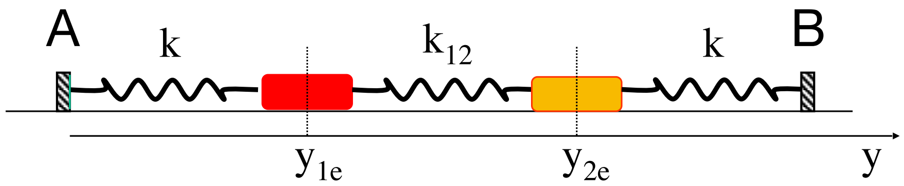
$x_2 + x_1$ e $x_2 - x_1$

che hanno come soluzione due moti armonici di pulsazione

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ e } \bar{\omega} = \sqrt{\frac{k+2k_{12}}{m}}$$

Le soluzioni sono:
$$\begin{cases} x_2 + x_1 = x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \\ \\ x_2 - x_1 = \bar{x} \sin(\bar{\omega} t + \bar{\varphi}) \end{cases}$$

Oscillatori accoppiati



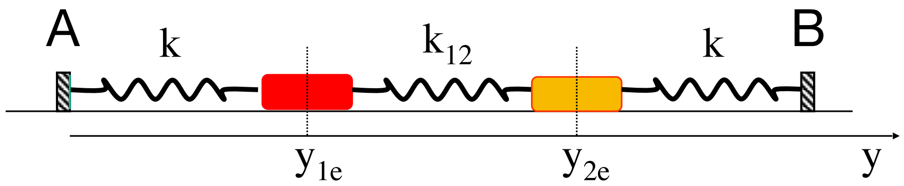
$$\begin{cases} x_2 + x_1 = x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \\ x_2 - x_1 = \bar{x} \sin(\bar{\omega} t + \bar{\varphi}) \end{cases}$$

da cui possiamo riottenere le leggi orarie dei due corpi di nuovo sommando e sottraendo

$$\begin{cases} x_2(t) = \frac{1}{2}\left(x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) + \bar{x} \sin(\bar{\omega} t + \bar{\varphi})\right) \\ x_1(t) = \frac{1}{2}\left(x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) - \bar{x} \sin(\bar{\omega} t + \bar{\varphi})\right) \end{cases}$$

Per individuare due combinazioni semplici poniamo $x_0 \neq 0, \quad \bar{x} = 0$ oppure $x_0 = 0, \quad \bar{x} \neq 0$, con $\varphi_0 = \bar{\varphi} = 0$

Oscillatori accoppiati



$$\begin{cases} x_2(t) = \dfrac{1}{2} x_0 \sin(\omega_0 t) \\ x_1(t) = \dfrac{1}{2} x_0 \sin(\omega_0 t) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2(t) = \dfrac{1}{2} \bar{x} \sin(\bar{\omega} t) \\ x_1(t) = -\dfrac{1}{2} \bar{x} \sin(\bar{\omega} t) \end{cases}$$

Cosa rappresentano i casi in cui $x_0 \neq 0, \quad \bar{x} = 0$ o $x_0 = 0, \quad \bar{x} \neq 0$?

Nel primo caso, i due oscillatori si muovono in fase, con la legge oraria di un moto puramente armonico.

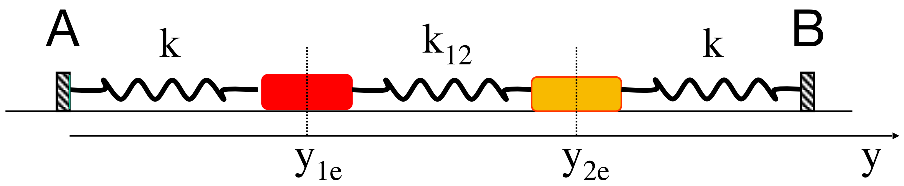
Nel secondo caso, i due oscillatori si muovono in opposizione di fase, sempre con la legge oraria di un moto armonico.

Questi sono detti "modi normali", sono dettati esclusivamente dalle condizioni iniziali e sono gli unici moti puramente armonici dei due oscillatori

NB: i due modi normali hanno pulsazioni diverse

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ e } \bar{\omega} = \sqrt{\frac{k+2k_{12}}{m}}$$

Oscillatori accoppiati



Torniamo al caso generale, ponendo ora $x_0 = \bar{x}$ e $\varphi_0 = \bar{\varphi} = 0$

$$\begin{cases} x_2(t) = \dfrac{1}{2}x_0\big(\sin(\omega_0 t) + \sin(\bar{\omega} t)\big) \\ x_1(t) = \dfrac{1}{2}x_0\big(\sin(\omega_0 t) - \sin(\bar{\omega} t)\big) \end{cases}$$

Ricordiamo le formule di prostaferesi

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

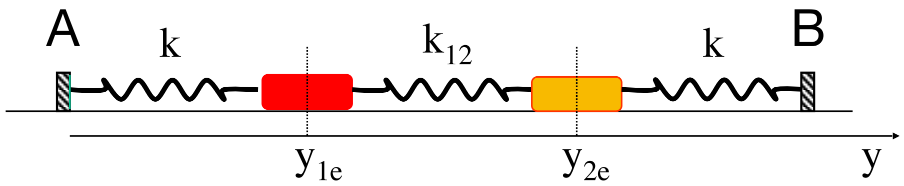
introduciamo le due frequenze portante e modulante

$$\omega_p = \frac{\bar{\omega}+\omega_0}{2}, \quad \omega_m = \frac{\bar{\omega}-\omega_0}{2}$$

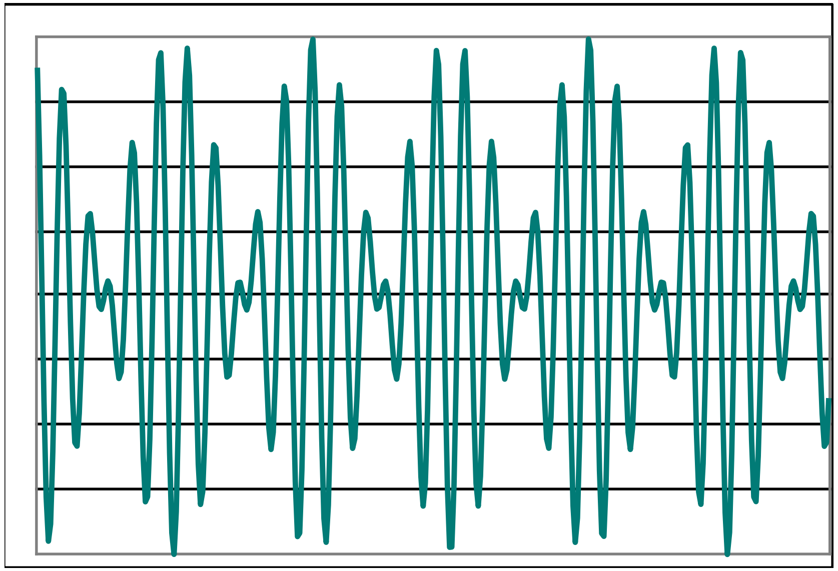
$$\omega_p > \omega_m$$

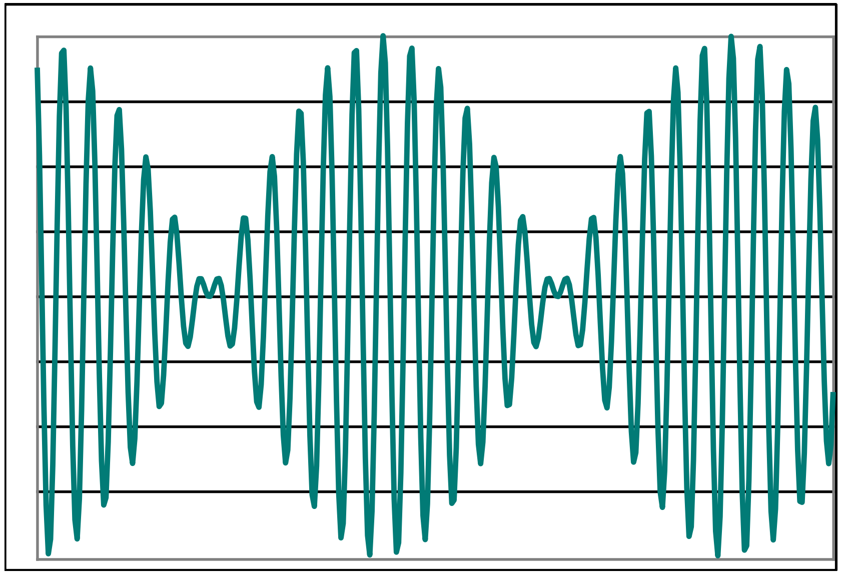
$$\Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = x_0\cos(\omega_p t)\sin(\omega_m t) \\ x_2(t) = x_0\sin(\omega_p t)\cos(\omega_m t) \end{cases}$$

Oscillatori accoppiati



$$\begin{cases} x_1(t) = x_0 \cos(\omega_p t) \sin(\omega_m t) \\ \\ x_2(t) = x_0 \sin(\omega_p t) \cos(\omega_m t) \end{cases}$$





$\omega_p = 10\,\omega_m$

$\omega_p = 25\,\omega_m$

Meccanica dei sistemi (FMUV 7.1)

Dinamica di sistemi, al di là della schematizzazione del punto materiale.

Perché non possiamo semplicemente estendere la dinamica del punto a qualunque insieme di punti materiali, per esempio come abbiamo fatto nel caso degli oscillatori accoppiati?

In realtà, una soluzione analitica generale esiste solo per il "problema dei due corpi".

Già con tre corpi, solo casi particolari possono essere risolti analiticamente, per il resto sono necessarie approssimazioni numeriche.

Anche prima della disponibilità dei calcolatori, sofisticati calcoli numerici permisero la soluzione di problemi molto complessi, come la predizione dei movimenti dei pianeti del sistema solare.

Fino a dove possiamo spingerci con tecniche di questo tipo?

Meccanica dei sistemi e punto materiale

Sappiamo che la materia è costituita da oggetti microscopici, per i quali la schematizzazione di punto materiale sembrerebbe appropriata

In pochi grammi di materia è contenuto un numero di punti dell'ordine del numero di Avogadro: non possiamo trattare altrettante equazioni.

Ma se questo è vero, qual è il senso dell'approssimazione di punto materiale? Per quanto piccolo, il punto materiale conterrà sempre un numero sconfinato di punti, in movimento uno rispetto all'altro e soprattutto in interazione uno con l'altro.

Possiamo confidare nella validità del modello di punto materiale se non siamo in grado di verificarla neanche in linea di principio per gli oggetti più piccoli percepiti dai nostri sensi?

Il nostro primo obiettivo è allora:

- Capire se c'è un modo di descrivere un sistema di punti materiali che ci permetta di applicare qualcosa di equivalente al secondo principio della dinamica
- Se sì, verificare se in questa descrizione trova spazio la nozione di punto materiale, o se questa deve essere considerata un semplice modello che dovremo ad un certo punto abbandonare