Soluzioni del compito del 12 Febbraio 2021

February 12, 2021

Parte A

1. Un pendolo si trova nella condizione in cui l'ampiezza della sua oscillazione è la massima possibile (vedi figura). In queste condizioni, quanto valgono la sua accelerazione e la sua velocità?

   L'accelerazione del pendolo dipende dalle forze che agiscono su di esso. Nella condizione della figura l'unica forza agente sul pendolo è la forza peso P (la tensione del filo, nella posizione mostrata, è nulla). Essendo $P = mg$, per la seconda Legge di Newton, l'accelerazione vale $a = \frac{P}{m} = g = 9.8\ \mathrm{ms}^{-2}$.

   Nel punto considerato il pendolo inverte il moto, dunque la sua velocità dev'essere nulla: la condizione, infatti, si raggiunge tra l'istante in cui la velocità è diretta verso l'alto perché il pendolo sta salendo, e quello in cui la velocità è diretta verso il basso a causa della forza peso.

2. Uno studente è seduto sul lato destro di un bus, quando il veicolo effettua una svolta a destra. Sappiamo che sullo studente agisce una forza di gravità verso il basso ed una forza normale che agisce a partire dal sedile verso l'alto. Se lo studente rimane al suo posto durante la svolta, sappiamo anche che ci deve essere:

   A) assenza di altre forze sullo studente
   B) una forza agente sullo studente parallela al sedile e orientata in avanti
   C) una forza agente sullo studente parallela al sedile e orientata a destra

D) una forza agente sullo studente parallela al sedile e orientata a sinistra
una forza agente sullo studente parallela al sedile e orientata indietro

Poiché lo studente rimane al suo posto deve seguire la stessa traiettoria del bus e deve dunque percorrere un arco di cerchio. Per farlo è necessario imprimere allo studente una forza centripeta: rivolta, cioè, verso il centro di curvatura. Se la svolta è a destra, il centro di curvatura si trova anch'esso a destra, dunque la risposta corretta è la C.

3. Una forza costante di 12 N sull'asse positivo x agisce su un oggetto di 4.0 kg, mentre si muove dall'origine del sistema di riferimento al punto di coordinate (6, 8) m. Quanto lavoro, espresso in J, è svolto dalla data forza durante lo spostamento?

   Il lavoro è definito come il prodotto scalare tra la forza agente e lo spostamento del punto di applicazione della stessa: $\Delta L = \mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{x} = F_x x + F_y y + F_z z = F \Delta x \cos\theta$, dove θ è l'angolo formato tra la direzione della forza e quella dello spostamento, $\Delta\mathbf{x} = (x,\, y,\, z)$ e $\mathbf{F} = (F_x,\, F_y,\, F_z)$. La forza ha componenti $\mathbf{F} = (12,\, 0,\, 0)$ N perciò il lavoro si scrive facilmente come $\Delta L = F_x x = 12 \times 6 = 72$ J.

4. Un ragazzo di 50 kg si trova su un'altalena priva di massa che ha una lunghezza di 3.0 m. La sua energia potenziale žero quando l'angolo tra l'altalena e la verticale è zero. L angolazione massima tra l'altalena e la verticale è 35°. Qual è la sua velocità in m/s sul punto più basso dell'altalena?

   In questo caso il testo del problema ci suggerisce già di usare il principio di conservazione dell'energia. Quando l'angolo tra altalena e verticale è nullo, l'altalena si trova nel suo punto piú basso e si muove alla massima velocità possibile, avendo trasformato tutta la sua energia potenziale, acquisita nel punto in cui l'angolo è $\theta = 35°$ in energia cinetica. Nella condizione iniziale, dunque, $E = U = mgh = mg\ell\,(1 - \cos\theta)$. In quella finale $E = \frac{1}{2}mv^2$. Abbiamo allora che

   $$\frac{1}{2}v^2 = g\ell\,(1 - \cos\theta) \tag{1}$$

   cioè che

   $$v = \sqrt{2g\ell\,(1 - \cos\theta)} = \sqrt{2 \times 9.8 \times \ell\,(1 - \cos 35)} \simeq 3.3\,\mathrm{m/s}\,. \tag{2}$$

5. Un blocco di 3.0 kg che va a una velocità di 5.0 m/s ne raggiunge un altro di 5.0 kg che si muove nella stessa direzione a 3.0 m/s. I due blocchi restano attaccati. A quale velocità vanno in m/s?

   Nei processi di urto si conserva la quantità di moto. Quella iniziale è la somma di quelle dei blocchi:

   $$P_i = m_1 v_1 + m_2 v_2\,. \tag{3}$$

Questa dev'essere uguale a quella finale del corpo la cui massa è $m_1 + m_2$, per cui

$$(m_1 + m_2)V = m_1 v_1 + m_2 v_2\,, \tag{4}$$

da cui si ricava

$$V = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{3 \times 5 + 5 \times 3}{3 + 5} \simeq 3.8\,\mathrm{m/s}. \tag{5}$$

6. Due diapason che oscillano alle frequenze di 264 e 262 Hz producono dei battimenti . Qual la frequenza di battimento in Hz?

   La frequenza di battimento è la semidifferenza delle frequenze dei due suoni, perciò vale semplicemente $\frac{f_2 - f_1}{2} = \frac{264-262}{2} = 1$ Hz.

7. Un cubo con i lati di lunghezza 0.20 m contiene 2.4×10^{24} molecole. La temperatura è 300 K e $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K. Qual è la forza in N esercitata su un lato del cubo?

   La forza F che un gas esercita su una parete è uguale, per definizione, alla pressione p esercitata dal gas moltiplicata per la superficie della parete: $F = pL^2$, avendo indicato con $L = 0.20$ m il lato del cubo. La pressione si trova imponendo la condizione dettata dalla Legge di stato dei gas ideali, secondo la quale

$$pV = Nk_BT\,. \tag{6}$$

   Ricordando che $V = L^3$, basta dunque sostituire per ottenere che

$$F = \frac{Nk_BT}{L^3}L^2 = \frac{Nk_BT}{L} = \frac{2.4 \times 10^{24} \times 1.38 \times 10^{-23} \times 300}{0.20} \simeq 5.0{\times}10^4\,\mathrm{N}\,. \tag{7}$$

8. Una mole di un gas ideale è tenuto a una pressione costante di 10^5 Pa. Determinare il cambiamento di volume, se la temperatura cambia di 50°C.

   La Legge di stato dei gas ideali afferma che $pV = nRT$, per cui

$$V = \frac{nRT}{p} \tag{8}$$

   e dunque

$$\Delta V = \frac{nR}{p}\Delta T = \frac{1 \times 8.314}{8.3110^5} \times 50 = 0.004\,\mathrm{m}^3\,. \tag{9}$$

   Abbiamo espresso la variazione di temperatura in gradi centigradi perché l'ampiezza di uno di questi gradi è identica a quella della scala kelvin. Il risultato è ovviamente espresso in unità del SI.

9. Il flusso elettrico totale attraverso una superficie cilindrica chiusa è pari a -5.0 Nm^2/C. Determinare la carica netta all'interno del cilindro in pC ($\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ C^2/Nm^2).

   Il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa è dato la Teorema di Gauss e vale

$$\Phi_S(\mathrm{E}) = \frac{Q}{\epsilon_0}\,. \tag{10}$$

   È allora evidente che

$$Q = \epsilon_0 \Phi_S(\mathrm{E}) = -8.85 \times 10^{-12} \times 5.0 = -44 \times 10^{-12}\,\mathrm{C} = -44\,\mathrm{pC}\,. \tag{11}$$

10. Tre condensatori sono posti in serie. I loro valori di capacità sono $3\,mu$F, $6\,\mu$F e $9\,\mu$F. Qual è il valore totale della capacità in μF?

    Quando due o piú condensatori sono posti in serie il reciproco della capacità equivalente è uguale alla somma dei reciproci delle singole capacità:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{C_2C_3 + C_1C_3 + C_1C_2}{C_1C_2C_3} \tag{12}$$

    La capacità dunque si scrive

$$C = \frac{C_1C_2C_3}{C_2C_3 + C_1C_3 + C_1C_2} = \frac{3 \times 6 \times 9}{6 \times 9 + 3 \times 9 + 3 \times 6} \simeq 1.6\,\mu\mathrm{F}\,. \tag{13}$$

11. Una stufetta elettrica è costruita applicando una differenza di potenziale di 110 V ad una spira di resistenza $5.0\,\Omega$. Qual è la potenza della stufetta?

    La potenza è il prodotto della tensione per la corrente che scorre nella stufetta, che si trova con la Legge di Ohm:

$$I = \frac{V}{R}\,. \tag{14}$$

    Dunque

$$P = VI = \frac{V^2}{R} = \frac{110^2}{5} \simeq 2.4\,\mathrm{kW}\,. \tag{15}$$

12. La bobina 1, collegata ad una resistenza di $100\,\Omega$, giace all'interno della bobina 2. La bobina 1 è collegata ad una sorgente AC da 60 Hz. Quale affermazione sulla corrente nella bobina 2 è corretta?

    A) Nella bobina 2 verrà indotta una corrente AC (corrente che fluisce in direzioni alterne)
    B) Non ci sarà nessuna corrente indotta nella bobina 2

C) Nella bobina 2 verrà indotta una corrente DC (corrente che fluisce in una sola direzione)
D) Verranno indotte nella bobina 2 sia una corrente DC che AC
E) Verrà indotta nella bobina 2 una corrente DC la cui direzione dipenderà dalla direzione iniziale della corrente nella bobina 1

Quando nella bobina 1 scorre una corrente AC, questa genera un campo magnetico variabile nelle vicinanze. La variazione del flusso di questo campo produce, a sua volta, una fem indotta variabile sulla bobina 2. Essendovi una fem variabile, la corrente che scorre nella bobina 2 è variabile.

L'affermazione A è corretta, perché la corrente che scorre nella bobina 2 è variabile e varia sia in modulo che in verso, dal momento che lo stesso fa il campo magnetico inducente che segue l'andamento della corrente che scorre nella bobina 1.

Di conseguenza l'affermazione B non lo è. L'affermazione C è sbagliata perché il verso della corrente indotta cambia. In effetti il campo magnetico inducente, a causa delle oscillazioni della corrente che scorre nella bobina 1 aumenta e diminuisce in continuazione, passando da un verso all'altro. La corrente indotta si oppone alle variazioni di flusso, che talvolta aumenta e altre volte diminuisce, quindi deve scorrere in versi opposti secondo il segno della derivata del campo inducente.

Le risposte D ed E sono sbagliate perché non c'è mai alcuna corrente DC indotta.

13. Una carica di $+80\,\mu$C si trova sull'asse x in posizione $x = -20$ cm. Una seconda carica di $-50\,\mu$C si trova sullo stesso asse in posizione $x = 50$ cm. Qual è l'intensità della forza elettrostatica su una terza carica di $+4\,\mu$C che si trova nell'origine? Si ricorda che la costante di Newton vale $k = 8.99 \times 10^9$ Nm^2/C^2.

Prima di iniziare a risolvere il problema scriviamo i dati in unità SI: $Q_1 = +80 \times 10^{-6}$ C, $x_1 = -0.20$ m, $Q_2 = -50 \times 10^{-6}$C, $x_2 = 0.50$ m, $Q_3 = +4 \times 10^{-6}$ C.

La forza agente su una carica, in presenza di altre cariche, è quella Coulombiana, il cui modulo vale, ad esempio per le cariche Q_1 e Q_3,

$$F = k\frac{Q_1 Q_3}{r_{13}^2}\,, \tag{16}$$

dove r_{13} è la distanza tra le due cariche Q_1 e Q_3. La forza è attrattiva se le cariche sono discordi e repulsiva altrimenti.

La carica Q_1 si trova alla sinistra di Q_3 e ha lo stesso segno di quest'ultima, perciòa la forza esercitata dalla prima nei confronti della seconda sarà repulsiva e diretta, quindi, verso destra. La carica Q_2 è invece a destra di Q_3 e ha segno opposto. Di conseguenza Q_2 attrae Q_3 e ancora una volta la forza è orientata verso destra. La forza totale sarà dunque la somma delle due forze:

$$F = k\frac{Q_1 Q_3}{r_{13}^2} + k\frac{Q_2 Q_3}{r_{23}^2}\,. \tag{17}$$

Poiché Q_2 si trova nell'origine $r_{i3} = |x_i - x_3| = x_i$, con $i = 1, 2$. Calcoliamo il modulo della forza. Osserviamo che, avendo già tenuto conto dei versi delle forze giungendo alla conclusione che sono entrambe rivolte verso destra e che si sommano, nel calcolo dovremo considerare i soli valori assoluti dei dati, ignorandone il segno.

$$F = 8.99 \times 10^9 \left(\frac{80 \times 4}{0.20^2} \times 10^{-12} + \frac{50 \times 4}{0.50^2} \times 10^{-12} \right) \simeq 79\,\mathrm{N}. \tag{18}$$

14. Un elettrone, inizialmente sull'asse x di un sistema di riferimento cartesiano con $x < 0$ e con velocit v_x lungo tale asse, orientata verso le x positive, entra in una regione $x > 0$ nella quale è presente un campo magnetico uniforme orientato secondo z e ne esce, con velocità $v_x < 0$, dopo $1.26\,\mu$s. Qual è l'intensità del campo magnetico? Il rapporto tra carica e massa di un elettrone vale -1.76×10^{11} C/kg.

    Quando l'elettrone penetra nella regione di campo magnetico subisce la Forza di Lorentz, che lo costringe a percorrere una traiettoria circolare, perché tale forza è sempre perpendicolare alla sua velocità. L'elettrone è dunque soggetto a un'accelerazione centripeta che, per la seconda Legge di Newton, vale

    $$a = \frac{v^2}{r} = \frac{F}{m}\,. \tag{19}$$

    Qui r è il raggio della traiettoria e v la velocità dell'elettrone di massa m. Il modulo della Forza di Lorentz è $F = qvB$, dove q è la carica dell'elettrone e B il modulo del campo. Sostituendo:

    $$\frac{v^2}{r} = \frac{qvB}{m}\,. \tag{20}$$

    Ricaviamo il campo, che è ciò che dobbiamo trovare:

    $$B = \frac{mv}{qr}\,. \tag{21}$$

    Abbiamo il rapporto tra massa e carica, ma occorre ancora trovare la velocità dell'elettrone. Poiché l'elettrone impiega un tempo $t = .126\,\mu\mathrm{s} = 1.26 \times 10^{-6}$ s a percorrere una traiettoria semicircolare di raggio r, in questo tempo percorrerà una lunghezza $\ell = \pi r$. La sua velocità è dunque

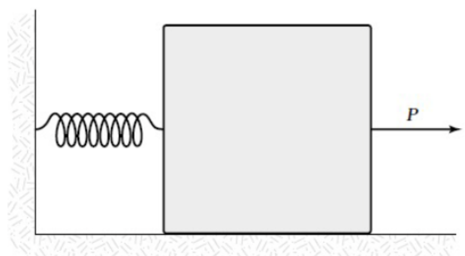
    $$v = \frac{\ell}{t} = \frac{\pi r}{t} \tag{22}$$

e

$$B = \frac{m\pi}{qt} = \frac{1}{1.76 \times 10^{11}} \frac{\pi}{1.26 \times 10^{-6}} \simeq 1.4 \times 10^{-5} = 14\,\mu\mathrm{T}\,. \qquad (23)$$

Parte B

1. Un blocco di 12 kg poggia su una superficie orizzontale priva di attrito ed è collegato ad una molla leggera (costante elastica= 0.80 kN/m). Il blocco è inizialmente a riposo nella sua posizione di equilibrio, quando gli viene applicata una forza (di modulo $P = 80$ N) parallelamente alla superficie, come mostrato in figura. Qual è la velocità del blocco, quando si trova a 13 cm dalla sua posizione di equilibrio?



Prima di tutto scriviamo i dati in unità SI: $k = 800$ N/m e $\Delta x = 0.13$ m.

Per risolvere questo problema dobbiamo pensare in termini di energia perché il testo ci fornisce due stati separati del sistema.

Sul blocco agisce una forza esterna P che compie un lavoro contro la forza elastica $F = -k\Delta x$. Nella condizione iniziale, quando il sistema è a riposo, possiamo definire l'energia potenziale elastica come nulla, ed essendo nulla la velocità , lo sarà anche l'energia cinetica. L'energia iniziale perciò è nulla.

Nello stato finale l'energia è data dalla somma di quella cinetica $\frac{1}{2}mv^2$ e quella potenziale $\frac{1}{2}k\Delta x^2$. La variazione di energia meccanica rispetto a quella iniziale è uguale al lavoro svolto dalle forze non conservative, perciò

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k\Delta x^2 = P\Delta x\,, \qquad (24)$$

da cui ricaviamo

$$v = \sqrt{2\frac{P}{m}\Delta x - \frac{k}{m}\Delta x^2} = \sqrt{2\frac{80}{12}0.13 - \frac{800}{12}0.13^2} \simeq 0.78\,\mathrm{m/s}\,. \qquad (25)$$

2. 25 kg di ghiaccio a 0°C vengono miscelati con 40 kg di acqua a 90°C. Quale sarà l equilibrio termico finale del sistema in °C (il calore latente di fusione dell'acqua è $L_f = 3.33 \times 10^5$ J/kg; il calore specifico dell'acqua è $c_a = 4\,186$ J/(K kg))?

   La temperatura finale del sistema sarà, ovviamente, compresa tra 0 e 90°C, perciò prima che le temperature dei due sistemi separatamente possano cominciare a cambiare, è necessario che il ghiaccio sia completamente fuso.

   Per la fusione del ghiaccio occorre una quantità di calore $\Delta Q_g = m_g L_f = 25 \times 3.33 \times 10^5 = 8.33 \times 10^6$ J.

   Tale quantità di calore dev'essere ovviamente sottratta all'acqua che cosí cambia la sua temperatura di

$$\Delta T_a = \frac{\Delta Q_g}{c_a m_a} \tag{26}$$

   dove $c_a = 4\,186$ J/(kg K) è il calore specifico dell'acqua. Qui $\Delta T_a = T_a - T_a'$ è la variazione di temperatura dell'acqua. Abbiamo cosí una miscela di acqua di cui una quantità m_g si trova alla temperatura $T_0 = 0°$C e una quantità m_a alla temperatura

$$T_a' = T_a - Delta T_a = T_a - \frac{\Delta Q_g}{c_a m_a} = 90 - \frac{8.33 \times 10^6}{4\,186 \times 40} \simeq 40°\text{C}\,. \tag{27}$$

   Abbiamo potuto mantenere le temperature in gradi centigradi perché il Kelvin ha la stessa ampiezza del grado centigrado e nelle equazioni sono coinvolte solo variazioni di temperatura. La temperatura d'equilibrio vale quindi

$$T_{eq} = \frac{m_g T_0 + m_a T_a'}{m_g + m_a} = \frac{25 \times 0 + 40 \times 40}{25 + 40} \simeq 25°\text{C}\,. \tag{28}$$

3. Una bobina con 300 spire è posta lungo il perimetro di una struttura quadrata (lato pari a 20 cm). Ogni spira presenta la stessa area della struttura e la resistenza totale della bobina è pari a 1.5 Ω. Un campo magnetico uniforme, perpendicolare al piano della bobina, varia di magnitudo in modo costante da 0.50 T a 0.90 T in 2.0 s. Determinare la fem indotta nella bobina (in V), mentre il campo cambia.

   Evidentemente occorre invocare la Legge di Farady–Neumann-Lenz, secondo cui

$$fem = -n\frac{\Delta\Phi_S(B)}{\Delta t} = -n\frac{\Delta\,(BS)}{\Delta t}\,, \tag{29}$$

   dove $S = L^2$ è l'area di ciascuna spira quadrata di lato $L = 0.20$ m, n è il numero di spire, B il campo magnetico e t il tempo. La variazione di flusso $\Delta(BS) = S\Delta B$, perché S è costante, quindi

$$fem = -nL^2\frac{\Delta B}{\Delta t} = -300 \times 0.20^2\frac{0.90-0.50}{2.0} = 2.4\,\mathrm{V}\,. \tag{30}$$