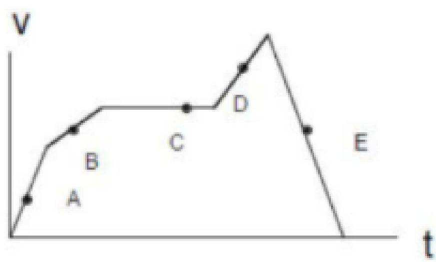
# Soluzioni del compito del 29 Gennaio 2021

January 20, 2021

## Parte A

1. In quale punto del grafico velocità–tempo, l'accelerazione è zero?




L'accelerazione $a$ è definita come $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ pertanto è nulla se la velcoità non varia ($\Delta v = 0$). Il punto in cui questo accade è il punto $C$.

2. Una macchina da corsa, che si muove con velocità costante di 60 m/s, completa un giro in un tracciato circolare in 50 s. Qual è il modulo dell'accelerazione della macchina?

Poiché la macchina si muove lungo un tracciato circolare, con velocità di modulo costante, la sua accelerazione è quella centripeta, che si scrive come $a = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$. Il problema non fornisce il valore del raggio del tracciato, che possiamo però ricavare conoscendo la velocità $v = \frac{\ell}{\Delta t}$, dove $\ell = 2\pi r$ è la lunghezza della pista e $\Delta t = 50$ s il tempo impiegato a percorrerla. Ricaviamo perci'ø

$$r = \frac{v\Delta t}{2\pi} = \frac{60 \times 50}{2\pi} \simeq 477\,\mathrm{m}\,. \tag{1}$$

L'accelerazione, pertanto, vale

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{60 \times 60}{477} \simeq 7.5\,\mathrm{ms}^{-2}\,. \tag{2}$$

3. Che cosa accade all'energia cinetica di un corpo se la sua velocità si triplica?

   L'energia cinetica è, per definizine, $E = \frac{1}{2}mv^2$, pertanto, se $v$ diventa tre volte piú grande, essendo $E$ proporzionale a $v^2$, l'energia aumenta di un fattore 9.

4. Qual è il valore della potenza, espressa in W, che una persona di 55 kg sprigiona quando sale una rampa di scale di 8.0 m in 5.0 s?

   La potenza impiegata è l'energia spesa per unità di tempo, cioè il rapporto tra l'energia necessaria per compiere un lavoro e il tempo nel quale tale lavoro è svolto. In formule, $W = \frac{\Delta E}{\Delta t}$.

   Nel nostro caso, la persona sta salendo una rampa di scale. Inizialmente la persona si trova alla base delle scale. Nello stato finale si trova in cima, 8 m piú in alto. In un caso come questo è naturale utilizzare la conservazione dell'energia, in quanto non sappiamo come si svolge il lavoro, ma conosciamo gli stati iniziale e finale (e la forza contro cui la persona fa lavoro è conservativa: la gravità). Sia nello stato iniziale che in quello finale, la persona è ferma, pertanto, nei due stati, ha soltanto energia potenziale gravitazionale. Assegnando allo stato iniziale il valore $U_i = 0$, quella dello stato finale vale $U_f = mgh$. La variazione di energia dunque vale $\Delta E = U_f - U_i = mgh$ e

$$W = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{mgh}{\Delta t} = \frac{55 \times 9.8 \times 8.0}{5.0} \simeq 862\,\mathrm{W}\,. \tag{3}$$

5. Una massa di 3.0 kg, che si muove con una velocità di 10 m/s nel verso delle $x$ positive, urta elasticamente una massa di 6.0 kg, inizialmente a riposo. Dopo l'urto, la velocità della massa di 3.0 kg è 4.2 m/s nel verso delle $x$ positive. Qual è la velocità della massa di 6.0 kg?

   Nei processi d'urto elastico si conserva la quantità di moto $p = mv$. La quantità di moto iniziale $p_i$ è solo quella della massa $m_1 = 3.0$ kg, che si muove con velocità $v_1 = 10$ m/s, per cui $p_i = m_1 v_1$. Nello stato finale, indicando con $u_i$ le velocità delle particelle, la quantità di moto si scrive

$$p_f = m_1 u_1 + m_2 u_2\,, \tag{4}$$

   da cui, imponendo che $p_i = p_u$, si ricava che

$$u_2 = \frac{m_1}{m_2}(v_1 - u_1) = \frac{3.0}{6.0}(10 - 4.2) = 2.9\,\mathrm{m/s}\,. \tag{5}$$

6. Una corda lunga 3 m è connessa a un oscillatore che vibra a 60 Hz. Se si osservano 2 nodi sulla corda in punti compresi tra le due estremità della corda, quanto vale la velocità delle onde acustiche sulla corda?

   Se si osservano due nodi significa che sulla corda si propaga un'onda stazionaria nella quale si osservano tre semilunghezze d'onda. La sua lunghezza d'onda è quindi di un terzo della lunghezza della corda $\ell$, cioè $\lambda = \frac{\ell}{3}$. La relazione esistente tra la velocità di propagazione dell'onda e le sue caratteristiche si trova ricordando le unità di misura delle grandezze. La velocità è una lunghezza divisa per un tempo, quindi si scrive come la lunghezza d'onda divisa per il periodo. Quest'ultimo, a sua volta, ha le dimensioni di un tempo, come l'inverso della frequenza $f$, perciò,

$$v = \lambda f = \frac{\ell}{3} f = \frac{3}{3} 60 = 60\,\mathrm{m/s}\,. \tag{6}$$

7. In un processo isotermo eseguito su un gas ideale, quale delle seguenti affermazioni è vera? A) nessun calore viene trasferito tra il sistema e quello che lo circonda; B) la temperatura resta costante; C) la pressione resta costante; D) l'energia interna non è costante; E) il volume resta costante.

   La risposta corretta è la "B". Qui non si si tratta tanto di comprendere la fisica, ma di ricordare una definizione: per isotermo si intende un processo la cui temperatura resta costante (dal prefisso iso– che indica la costanza, e il termine termo–, associato alla temperatura). Ci si può confondere perché si tende ad associare le variazioni di temperatura ai passaggi di calore e quindi si pensa, erroneamente, che un sistema a temperatura costante non scambi calore con l'esterno. In realtà questo può avvenire se il calore scambiato porta a una variazione delle altre variabili di stato termodinamiche, come la pressione o il volume, che quindi possono cambiare in un processo di questo tipo (per queste ragioni le risposte "A", "C" ed "E" sono sbagliate).

   L'energia interna, in un processo isotermo, è invece costante, perché dipende unicamente dalla temperatura. Se quest'ultima non varia, non varia neanche l'energia interna.

8. Date 3 moli di gas ideale diatomico aventi un'energia interna di 10 kJ, determinare la temperatura del gas dopo che esso abbia raggiunto l'equilibrio.

   Prima di tutto, per non sbagliare i conti alla fine, scriviamo subito che $U = 10\,\mathrm{kJ} = 10 \times 10^3$ J.

   L'energia di un gas ideale dipende unicamente dalla sua temperatura $T$ e vale $U = nc_V T$, con $c_V$ pari al calore specifico del gas a volume costante (indipendentemente dal fatto che il gas stia subendo una trasformazione isocora: l'energia è una funzione di stato e come tale non dipende dalla trasformazione subíta, ma soltanto dalle variabili di stato). In un gas biatomico (o diatomico che dir si voglia), $c_V = \frac{5}{2}R$, dunque

$$U = n\frac{5}{2}RT \tag{7}$$

   e perciò

$$T = \frac{2U}{5nR} = \frac{2 \times 10 \times 10^3}{5 \times 3 \times 8.314} \simeq 160\,\mathrm{K}. \tag{8}$$

9. Quando un conduttore è elettricamente carico con una carica $Q = 1$ C è in equilibrio elettrostatico, quanto vale il campo elettrico al suo interno?

   All'interno dei conduttori il campo elettrico è sempre nullo, all'equilibrio. Se cosí non fosse, le cariche libere presenti al suo interno, sarebbero soggette all'azione di questo campo e si muoverebbero. Non saremmo pertanto in una situazione di equilibrio. In questa situazione tutte le cariche si trovano sulla superficie del conduttore e il campo elettrico dev'essere perpendicolare a questa e rivolto verso l'esterno.

10. Due carica $Q_1 = 15$ pC e $Q_2 = -40$ pC sono all'interno di un cubo, i cui lati sono lunghi 0.40 m. Determinare il flusso elettrico netto attraverso la superficie del cubo.

    Scriviamo subito i dati in unità del SI: $Q_1 = 15\,\mathrm{pC} = 15 \times 10^{-12}$ C e $Q_1 = -40\,\mathrm{pC} = -40 \times 10^{-12}$ C.

    Il flusso del campo elettrico attraverso una qualsiasi superficie chiusa, com'è quella di un cubo, si trova semplicemente usando il Teorema di Gauss, secondo il quale il flusso è uguale semplicemente alla carica netta interna alla superficie, divisa per la costante dielettrica. Non occorre conoscere la superficie del cubo, in questo caso, e la risposta si trova immediatamente come

    $$\Phi = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{Q_1 + Q_2}{\epsilon_0} = \frac{15 - 40}{8.85 \times 10^{-12}} \times 10^{-12} = -2.8\,\mathrm{Nm}^2/\mathrm{C}\,. \tag{9}$$

    Le unità di misura si trovano ricordando che il flusso è un campo elettrico per una superficie e che le unità del campo elettrico sono quelle di una forza, che si misura in N, divisa per una carica, le cui unità sono i C.

11. Com'è definita la capacità?

    In questa domanda non c'è nulla da capire, ma solo da ricordare. La capacità è $C = \frac{Q}{V}$.

12. Se il voltaggio è 120 V e la corrente è 2 A, quant'è la resistenza in *Omega*?

    Basta applicare la Legge di Ohm, secondo cui $V = RI$ e trovare che

    $$R = \frac{V}{I} = \frac{120}{2} = 60\,\Omega\,. \tag{10}$$

13. Un elettrone in moto lungo il verso delle $x$ positive sente una forza nel verso delle $z$ positive. Se $B_x = 0$, qual è la direzione del campo magnetico?

    Quando una carica $q$ si muove con velocità $\mathbf{v}$ in un campo magnetico $\mathbf{B}$, subisce la Forza di Lorentz $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$, che è un vettore perpendicolare sia a $\mathbf{v}$ che a $\mathbf{B}$ orientato secondo la regola della mano destra.

Il prodotto vettoriale non è commutativo ed è importante scrivere bene l'ordine dei fattori. Secondo la regola della mano destra, disponendo il pollice destro in direzione di $\mathbf{v}$ e le altre dita della mano in direzione di $\mathbf{B}$, il prodotto $\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$ è uscente dal palmo della mano.

In un sistema nel quale $\mathbf{v}$ è orientato secondo l'asse $x$, il prodotto vettoriale è orientato verso le $z$ positive se si dispone la mano in modo che le dita siano orientate come le $y$ positive. Bisogna però tenere conto del fatto che la carica degli elettroni è negativa, perciò la forza avrà verso opposto.

Il campo magnetico, dunque, dev'essere orientato secondo la direzione delle $y$ negative. Se il campo magnetico avesse una componente lungo $x$, questa non provocherebbe alcun effetto sul moto dell'elettrone. Per questa ragione il testo dice che $B_x = 0$.

14. Viene prodotta una fem indotta

    A) in una spira che si muove a velocità costante in un campo magnetico non uniforme
    B) in nessuno dei casi riportati
    C) in una spira che si muove con accelerazione costante in un campo magnetico uniforme
    D) in tutti i casi riportati
    E) in una spira a riposo in un campo magnetico non uniforme.

    Analizziamo tutti i casi, ricordando che le fem sono indotte da una variazione del flusso magnetico attraverso una superficie, secondo la Legge di Faraday–Neumann-Lenz

$$\Delta V = -\frac{\Delta \Phi_S(B)}{\Delta t} = -\frac{\Delta\left(\mathbf{B} \cdot \mathbf{S}\right)}{\Delta t}\,, \tag{11}$$

    dove $\mathbf{B}$ rappresenta il campo magnetico, $\mathbf{S}$ il vettore perpendicolare alla spira di modulo pari alla sua area e $\Delta t$ il tempo in cui avviene la variazione.

    Nel primo caso, se la spira si muove in un campo non uniforme, nel corso del tempo cambia l'intensità del campo che l'attraversa, dunque cambia il flusso e, di conseguenza, si ha produzione di fem.

    Il caso B) è escluso dall'osservazione che precede: in almeno un caso l'affermazione è vera.

    Nel terzo caso, il flusso resta evidentemente costante, dal momento che il campo magnetico che attraversa la spira è costante, anche se la spira si muove. Dunque non c'è fem in questo caso.

    La risposta precedente rende automaticamente falsa anche la risposta D).

    Infine, nel caso E), se la spira è ferma, anche se il campo non è uniforme, il flusso resta costante, dunque neanche in questo caso si genera una fem.

# Parte B

1. Una massa di 3.0 kg sta scivolando lungo una superficie orizzontale priva di attrito alla velocità di 3.0 m/s, quando urta un'altra massa di 1.0 kg inizialmente a riposo. Le due masse si uniscono e risalgono un binario ricolare di raggio 0.40 m rpivo di attrito. A quale altezza massima sopra la superficie orizzontale arriveranno le due masse?

   Attribuiamo i simboli alle grandezze date dal problema: $M = 3.0$ kg, $v = 3.0$ m/s, $m = 1.0$ kg, $R = 0.40$ m.

   Dividiamo il problema in due fasi: il processo d'urto e la risalita sulla guida. Nel caso dell'urto, la prima cosa che ci viene in mente è di sfruttare la conservazione della quantità di moto. Quella iniziale è $p_i = Mv$. La quantità di moto finale è $(m + M)\,u$, avendo indicato con $u$ la velocità del sistema composto dalle due masse attaccate.

   Questo ci permette di conoscere la velocità del sistema che è

   $$u = \frac{M}{M+m} v\,. \tag{12}$$

   Ora abbiamo un sistema di massa $M + m$ che si trova in uno stato iniziale nel quale si trova alla base della rampa e si muove con velocità $u$. Nello stato finale, il sistema ha velocità nulla, ma si trova alla quota $h$. Conosciamo lo stato del sistema in due istanti, in una situazione nella quale tutte le forze sono conservative. L'energia meccanica, perciò, si conserva. Quella iniziale è

   $$E_i = \frac{1}{2}\,(M+m)\,u^2 = \frac{1}{2}\,(M+m)\left(\frac{M}{M+m} v\right)^2 = \frac{M^2 v^2}{2\,(M+m)}\,, \tag{13}$$

   mentre quella finale vale

   $$E_f = (M+m)\,gh\,. \tag{14}$$

   Imponendo l'uguaglianza delle due energie troviamo

   $$h = \frac{M^2 v^2}{2g\,(M+m)^2} = \frac{3.0^2 \times 3.0^2}{2 \times 9.8\,(3.0+1.0)^2} \simeq 0.26\,\mathrm{m}\,. \tag{15}$$

   Non è dunque necessario conoscere il raggio della guida. La quota raggiunta sarebbe stata la stessa qualunque sia la sua forma.

2. Quanto calore deve essere rimosso da 2 kg di acqua a 20°C per formare il ghiaccio a $-10$°C (il calore specifico del ghiaccio è 0.5 cal/g°C; il calore latente di fusione dell'acqua è 80 cal/g)?

   È importante controllare sempre che le unità di misura siano tra loro coerenti. Nel problema le masse sono date in kg, mentre i calori specifici e latenti sono espressi in unità che contengono i g. Potremmo trasformare tutte queste unità trasformando, per esempio, le 80 cal/g in 80 000 cal/kg, cioè in 80 kcal/g. In alternativa possiamo esprimere le masse in g: $m = 2\,000$ g.

Per produrre ghiaccio a temperature sotto lo zero centigrado, a partire da acqua, occorre prima portare l'acqua alla temperatura di solidificazione pari a 0°C, poi attendere che il sistema passi tutto allo stato solido e, infine, abbassarne la temperatura sottraendo calore.

Per portare l'acqua da $T_a = 20°$C a $T_0 = 0°$C occorre una quantità di calore

$$\Delta Q_1 = mc_a \Delta T = mc_a (T_a - T_0) \; , \tag{16}$$

$c_a = 1$ cal/°C essendo il calore specifico dell'acqua. Il calore necessario per solidificare tale quantità d'acqua è quindi

$$\Delta Q_2 = m\lambda \tag{17}$$

avendo indicato con $\lambda$ il calore latente di fusione, che è uguale a quello di solidificazione. Per ricordare le formule basta guardare le unità di misura delle grandezze fornite.

Infine dobbiamo raffreddare il ghiaccio a $T_g = -10°$C, per cui serve una quantità di calore

$$\Delta Q_3 = mc_g \Delta T = mc_g (T_0 - T_g) \; . \tag{18}$$

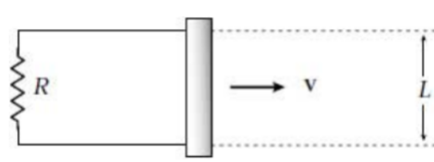
In definitiva, serve una quantità di calore totale pari a

$$\Delta Q = \Delta Q_1 + \Delta Q_2 + \Delta Q_3 = m \left(c_a (T_a - T_0) + \lambda + c_g (T_0 - T_g)\right) \; . \tag{19}$$

Sostituiamo i valori.

$$\Delta Q = 2\,000 \left(1 (20 - 0) + 80 + 0.5 (0 - (-10))\right) = 210 \times 10^3 \,\text{cal} = 210 \,\text{kcal} \, . \tag{20}$$

3. Una barra di lunghezza $L = 80$ cm si muove, come mostrato in figura, su due binari privi di attrito in una regione dove il campo magnetico ùniforme ($B = 0.30$ T) e entrante nel foglio. Se $v = 50$ cm/s e $R = 60\,\text{m}\Omega$, qual è la forza magnetica esercitata sulla barra in moto?



Trasformiamo i dati in unità SI. $L = 80\,\text{cm} = 0.8$ m; $B = 0.30$ T, $v = 50\,\text{cm/s} = 0.5\,\text{m/s}$ e $R = 60\,\text{m}\Omega = 60 \times 10^{-3}\,\Omega$.

In problemi come questi, nei quali qualcosa si muove in un campo magnetico, bisogna pensare alla Legge di Farady–Naumann–Lenz,

$$fem = -\frac{\Delta \Phi_S(B)}{\Delta t} = -\frac{\Delta\left(\mathbf{B}\cdot\mathbf{S}\right)}{\Delta t}\,. \tag{21}$$

Nel caso in esame il flusso del campo magnetico varia attraverso la superficie individuata dal perimetro del circuito formato dai binari e dalla sbarra, perché cambia la superficie $S = xL = v\Delta t L$, avendo indicato con $x$ la distanza percorsa dalla sbarra in un tempo $\Delta t$, che si può scrivere come $x = v\Delta t$.

Di conseguenza, sul circuito è come si ci fosse un generatore di tensione per il quale

$$V = \frac{Bv\Delta t L}{\Delta t} = BLv\,. \tag{22}$$

Questa tensione induce una corrente nel circuito pari a

$$I = \frac{V}{R} = \frac{BLv}{R} \tag{23}$$

che a sua volta produce un campo magnetico che si oppone alla variazione del flusso, secondo quanto prevede la regola di Lenz. Il flusso è in aumento, pertanto, il campo magnetico indotto dev'essere diretto all'opposto del campo inducente, cioè uscente dal foglio. La corrente scorre perciò in senso orario, applicando la regola della mano destra.

Una corrente di questo tipo, se immersa nel campo magnetico indotto, rivolto verso l'esterno, subirebbe una forza verso sinistra che si oppone alla forza con la quale occorre trascinare la sbarra, necessaria per mantenerla in uno stato di moto rettilineo uniforme (la forza di trascinamento e quella indotta si annullano a vicenda e $v$ resta costante).

Ora, quando una corrente $I$ scorre in un campo magnetico $B$ per una lunghezza $L$, su di essa si esercita una forza pari a $F = BIL$ (la Forza di Lorentz). Abbiamo cosí che l'intensità della forza magnetica vale

$$F = BIL = \frac{B^2L^2v}{R} = \frac{0.30^2 \times 0.8^2 \times 0.5}{60 \times 10^{-3}} = 0.48\,\text{N} \tag{24}$$

Possiamo risolvere il problema anche in un'altra maniera. La potenza dissipata dal circuito per effetto Joule è

$$W = RI^2 = \frac{B^2L^2v^2}{R}\,. \tag{25}$$

Quest'energia non può che venire dalla forza con la quale si trascina la sbarra che fa un lavoro $\mathcal{L} = F\Delta x$, per svolgere il quale, quindi, si richiede una potenza

$$W' = \frac{\mathcal{L}}{\Delta t} = F\frac{\Delta x}{\Delta t} = Fv\,. \tag{26}$$

Imponendo che $W = W'$ otteniamo il risultato che abbiamo già trovato sopra. Come già detto, infatti, la forza di trascinamento dev'essere uguale a quella magnetica affinché $v$ sia costante.