Effettuazione di un TEST D'IPOTESI

1. Formulazione H_0 e H_1
2. Scelta del test statistico
3. Calcolo del test statistico

$$\text{test} = \frac{\hat{\theta} - \theta_0}{ES[\hat{\theta}]}$$

dove

$\hat{\theta}$ = stima del parametro di interesse calcolata sui dati campionari

θ_0 = valore del parametro di interesse sotto l'ipotesi nulla H_0

$ES[\hat{\theta}]$ = errore standard dello stimatore calcolato sotto H_0

Effettuazione di un TEST D’IPOTESI-*continua*

4. Test P probabilità di ottenere un risultato come quello osservato o più estremo per motivi casuali

5. Rifiuto (se P è bassa, $<0,05$) o non rifiuto H_0 (se P non è bassa, $>0,05$)

Per effettuare un test statistico per confrontare due o più medie, si parte necessariamente dalle conoscenze relative alla distribuzione delle medie campionarie utilizzate per la definizione dell’intervallo di confidenza della media

Come è noto, sotto certe condizioni, la distribuzione di medie campionarie è Normale, con al suo centro il valore del parametro **μ** (generalmente ignoto) e la variabilità espressa dall' Errore standard (ES) ottenibile secondo due distinte formule

.

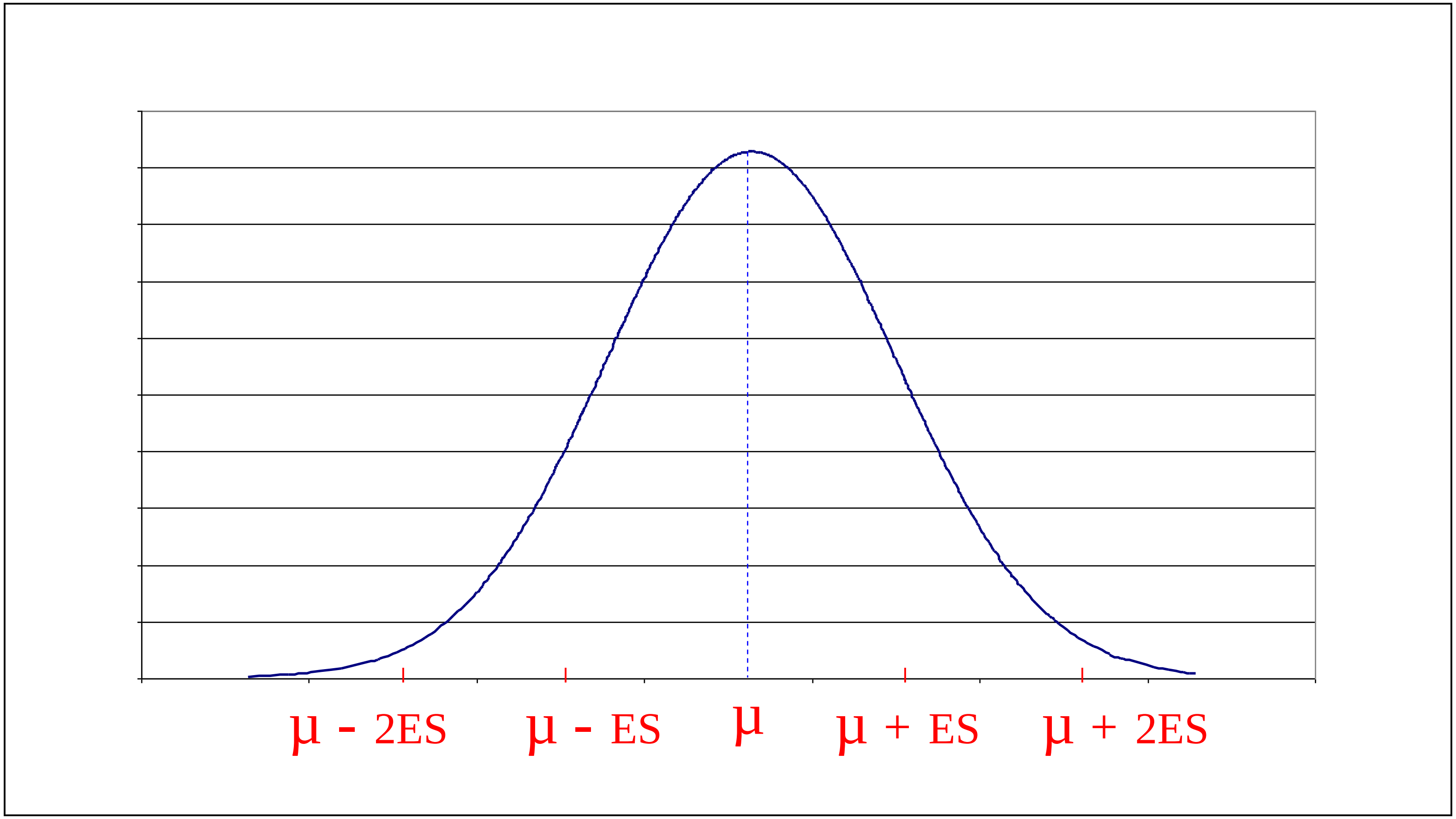
$$ES = \sigma(\bar{x}_i) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ES noto

$$\hat{ES} = \hat{\sigma}(\bar{x}_i) = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

ES stimato

Distribuzione delle medie campionarie



il confronto tra medie si può distinguere in

Una **media campionaria** vs **una media di riferimento nota**

Confronto fra **due medie campionarie**

Confronto fra **tre o più medie campionarie** (Analisi della Varianza = **ANOVA**)

Una media campionaria

E' la situazione più semplice

Da un campione si ottiene una media campionaria che si può considerare stima di μ_1 (media della popolazione da cui deriva il campione)

Ci si chiede: la media μ_1 è diversa da un valore di riferimento noto μ_2?

Una media campionaria

1. Definizione delle ipotesi
2. Definizione dei rischi di errore
3. Scelta del test
4. Decisione finale

Definizione delle ipotesi

Per prima cosa si definiscono le due ipotesi di riferimento

H_0 Ipotesi nulla (di base)

H_1 Ipotesi alternativa

Definizione delle ipotesi

Pertanto

$$\boxed{H_0 : \mu_1 = \mu_2}$$

Dove

μ_1 è il valore di riferimento noto

μ_2 è il valore del parametro ignoto della popolazione da cui deriva il campione

Definizione delle ipotesi

Nel caso di test tra due medie avremo

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 > \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 < \mu_2$$

Test a 2 code (bidirezionale)

Test ad 1 coda (unidirezionale)

Definizione delle ipotesi

In funzione del tipo di problema e delle esigenze della ricerca, si può decidere se sia preferibile prevedere una ipotesi alternativa unidirezionale o bidirezionale

Dal punto di vista pratico, pur con le dovute accortezze interpretative, non cambia assolutamente nulla

Del resto i software statistici fanno sempre riferimento ad una Ipotesi alternativa a 2 code

Definizione dei rischi di errore

Si passa poi a definire i rischi di errore

α: probabilità di respingere H_0 quando è vera (o errore di I Tipo)

β: probabilità di accettare H_0 quando è falsa (o errore di II Tipo)

Definizione dei rischi di errore

Il valore di α comunemente adottato è 0.05

Si ritiene perciò significativo un risultato che si presenti con una probabilità inferiore a tale valore, in quanto appare altamente improbabile che sia dovuto al caso

Definizione dei rischi di errore

Il valore di β può variare fra 0.10 e 0.20

Abitualmente però si fissa il valore complementare 1 - β che viene detto potenza del test

Definizione dei rischi di errore

E’ opportuno ricordare che i due errori sono inversamente proporzionali e la definizione autonoma di entrambi può avvenire solo modificando (generalmente aumentando) la numerosità del campione

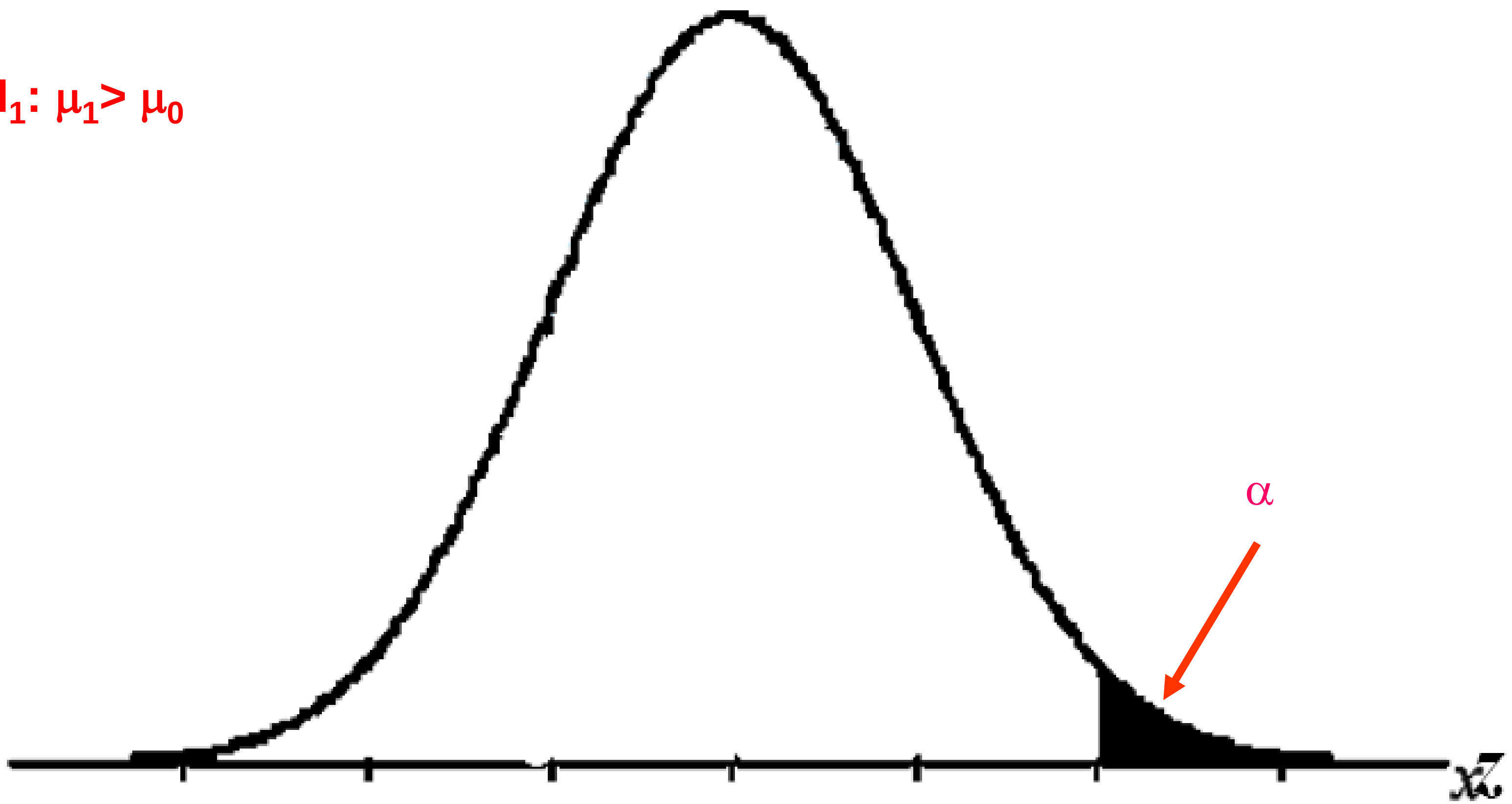
Definizione dei rischi di errore

Ai due rischi di errore non non si attribuisce, generalmente, la stessa importanza, in quanto si ritiene che l’Ipotesi nulla vada “salvaguardata” e che solo una “forte” evidenza contraria possa indurre il ricercatore a cambiare opinione su di essa

Definizione dei rischi di errore

Nel caso di H_1 unidirezionale avremo

H_1: $\mu_1 > \mu_0$



Definizione dei rischi di errore

Nel caso di H_1 unidirezionale avremo

Definizione dei rischi di errore

Nel caso di H_1 bidirezionale avremo

Scelta del test

Il test da adottare è da scegliere fra il test Z e il test t

$$Z = \frac{\bar{x}_i - \mu}{ES}$$

$$t = \frac{\bar{x}_i - \mu}{\hat{E}S}$$

La scelta è determinata della situazione in cui ci si trova

Scelta del test

σ NOTA			
variabile normale	**n qualunque**	$\longrightarrow$	**distribuzione normale**
variabile non normale	**n > 30**	$\longrightarrow$	**distribuzione normale**
variabile non normale	**n < 30**	$\longrightarrow$	**STOP**

Scelta del test

σ NON NOTA			
variabile normale	**n < 30**	→	**distribuzione t di Student**
variabile normale	**n > 30**	→	**distribuzione normale**
variabile non normale	**n > 100**	→	**distribuzione normale**
variabile non normale	**n < 100**	→	**STOP**

Decisione finale

La decisione finale è basata sul confronto del risultato del nostro test con il rischio di errore di primo tipo (o area di rifiuto o livello di significatività) α

Decisione finale

Se il risultato del test cade nell'area di rifiuto (di H_0) α, si rifiuta H_0

Si è verificato un risultato che appare improbabile che sia dovuto al caso

Si preferisce quindi pensare che sia dovuto a qualche altro fattore

Test statisticamente significativo!

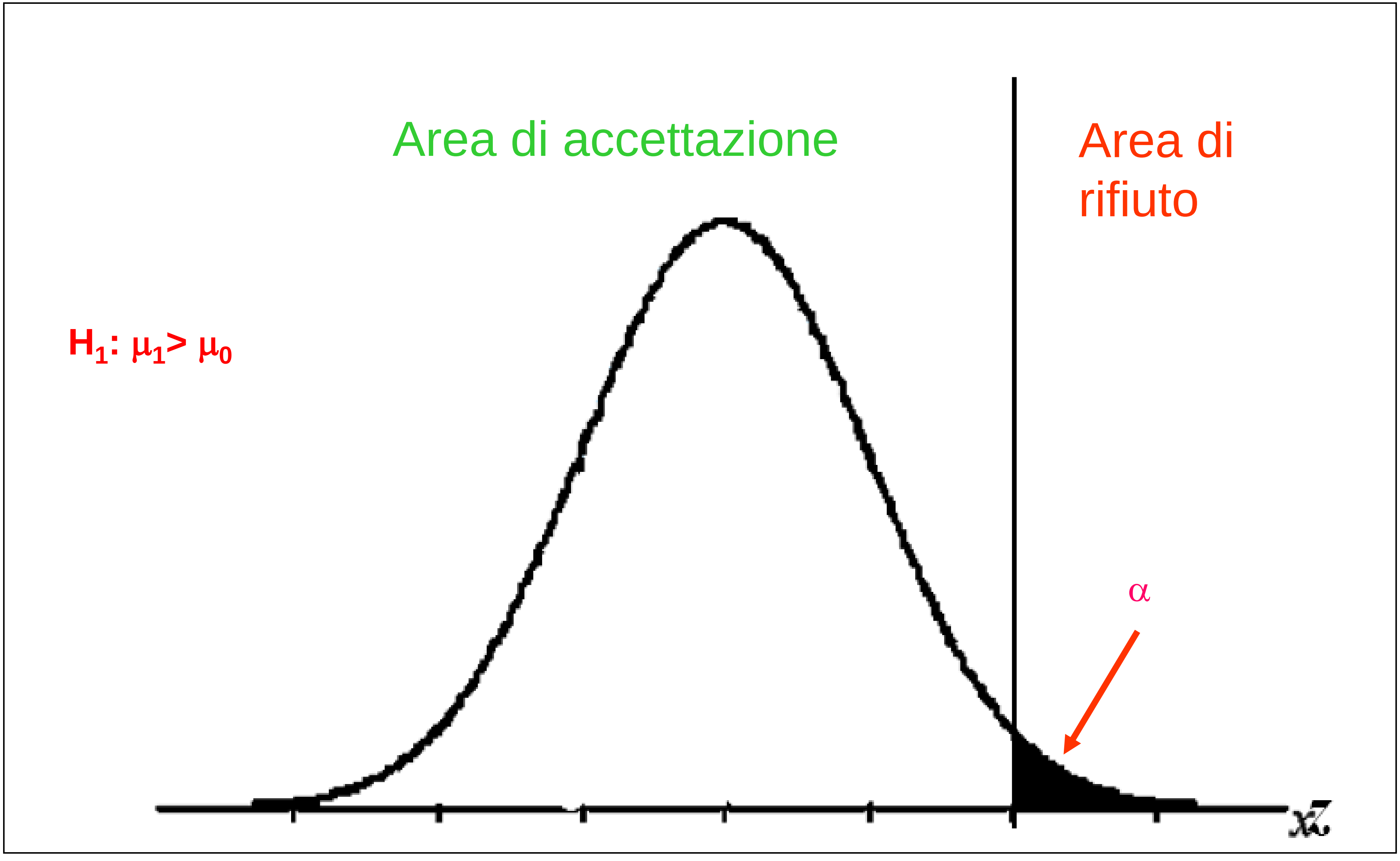
Decisione finale

Se il risultato del test cade nell'area di accettazione 1 - α si ritiene che si sia verificato un risultato con una grande probabilità di essere casuale

Pertanto si accetta H_0

Test statisticamente non significativo!

Decisione finale



Decisione finale

Notare che il valore della P (P value) e della Statistica test sono inversamente proporzionali

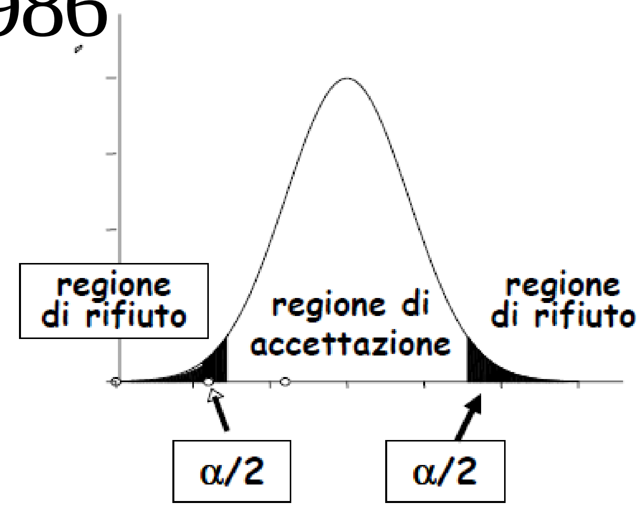
Quindi si rifiuta H_0 con una P bassa, ovvero $P < \alpha$, ma anche con $Ztest > Z\alpha$ (o $ttest > t\alpha$)

Si è stabilito sperimentalmente su un gran numero di pazienti affetti da una determinata malattia che il tempo medio di sopravvivenza dalla diagnosi è di 38.3 mesi con d.s.= 43.3.

Un campione casuale di 100 pazienti con prima diagnosi viene trattato con una nuova tecnica terapeutica. Alla fine della sperimentazione il tempo medio di sopravvivenza per questo gruppo di pazienti risulta essere 46.9 mesi.

H_0: $\mu=\mu_0=$38.3 mesi $\qquad$ H_1: $\mu \neq \mu_0$

$$z=\frac{\bar{x}-\mu_0}{e.s.(\bar{x})}=\frac{46.9-38.3}{4.33}=-1.986$$



TEST D'IPOTESI- confronto media campionaria con media popolazione – campione piccolo e σ ignota

$H_0: \mu_0 = \mu$

$H_1: \mu_0 \neq \mu$

Test statistico:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{e.s.(\bar{x})} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

t con (n-1) gradi di libertà

Assunzioni:

1- Il campione è stato selezionato casualmente dalla popolazione

2- La variabile è distribuita normalmente nella popolazione

ESEMPIO

Si supponga di voler verificare se il tasso di colesterolemia, riscontrato su un campione casuale di 25 soggetti, sia significativamente diverso dal tasso medio in soggetti normali che in genere è di 210mg/dl ed è noto che la popolazione è distribuita secondo la curva normale.
Nel campione si trova che il valore medio di colesterolemia è di 270 mg/dl e che lo scarto quadratico medio è s = 79.
Verificare se la differenza del campione sia dovuta al caso o a significative differenze sistematiche.

Si ha:
μ_0 = 210 mg/ml
media campionaria = 270 mg/ml
n = 25
α = 0.01

Fasi della verifica:

a) H_0: $\mu = \mu_0$ H_1: $\mu > \mu_0$

b) Poiché la popolazione si distribuisca normalmente ed il campione è estratto casualmente, σ^2 è ignoto e $n < 50$ si sceglie il ***test t di Student***.

c) Si fissa il livello di significatività dello 0.01 e si sceglie il test unilaterale poiché si ritiene che il campione presenti valori maggiori. ***I gradi di libertà (g.l.)*** sono determinati dalla numerosità del campione e più precisamente dalla relazione (n - 1). Quindi in questo esercizio la distribuzione t avrà (25 - 1) = 24 gradi di libertà.

d) Nella tabella della distribuzione t, in corrispondenza 24 g.l. e per un α= 0.01 si trova il valore t_α = 2.49 che delimita l'area di rigetto.

e) Il valore di t in questo caso e' dato da:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s / \sqrt{n}} = \frac{60}{79} \cdot 5 = 3.79$$

Poiché il valore empirico di t = 3.79 > 2.49, con la probabilità dell'1% di commettere errore di I tipo, si decide di respingere l'ipotesi nulla secondo la quale, la differenza del campione sia dovuta al caso e concludere, invece, che i soggetti del campione appartengono ad una popolazione con ipercolesterolemia.

Due medie campionarie

I valori di α e di β si determinano nel modo già noto

Per la scelta del test si tiene conto:

- della conoscenza della varianza della popolazione
- della normalità della variabile oggetto di studio
- della numerosità campionaria

TEST D'IPOTESI- confronto tra medie – campioni grandi

$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$

$H1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

Test statistico:

$$z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - 0}{e.s.(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}}$$

Assunzioni:

1- I campioni sono sufficientemente grandi: $n_1 \geq 30$ e $n_2 \geq 30$

2- I due campioni sono selezionati casualmente e indipendentemente dalla popolazione

TEST D'IPOTESI- confronto tra medie – piccoli campioni e σ ignota

$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$

$H1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

Test statistico: $$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - 0}{e.s.(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s_{pooled}}$$

$$s^2_{pooled} = \frac{(n_1 - 1) * s_1^2 + (n_2 - 1) * s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

t con (n1+n2-2) g.l.

Assunzioni:

1- Le popolazioni da cui sono selezionati i campioni hanno una distribuzione approssimativamente normale della variabile studiata.

2- I campioni sono selezionati casualmente e indipendentemente dalle due popolazioni

3- Le varianze delle due popolazioni sono uguali.

Nel caso di ***due campioni indipendenti*** si consideri il seguente esempio.

ESEMPIO

Ad un esame di statistica medica un campione di 30 studenti, che hanno frequentato le esercitazioni, riportano un voto medio di 27, un altro campione di 20 studenti, che non hanno frequentato le esercitazioni, riporta come voto medio 23; la varianze sono rispettivamente 9 e 8.5. Si verifichi l'ipotesi che la partecipazione alle lezioni non influisce sul voto.

Indicando con μ_1 e μ_2 i valori medi incogniti di tutti gli studenti, l'ipotesi nulla è:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

cioe' la frequenza non influisce sul voto.

L'ipotesi alternativa è che la frequenza influisca positivamente sul voto, ossia

$$H_1: \mu > \mu_0$$

Si consideri che la distribuzione dei voti sia normale. Il test da utilizzare è

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

che ha distribuzione della t di Student con n_1+n_2 - 2 gradi di libertà.

Poiché l'ipotesi alternativa prevede che il voto dei frequentanti sia maggiore di quello dei non frequentanti il test dovrà essere condotto sulla coda di destra: la regione critica sarà quella in cui t assume valori superiori a t_α con α = 0.05. Cioè tα =1.684.

La stima della varianza s_p (pooled) dei due campioni raggruppati è data da:

$$s^2 = \frac{s_1^2(n_1 - 1) + s_2^2(n_2 - 1)}{n_1 + n_2 - 2}.$$

Nel problema in esame si ottiene:

$$s^2 = \frac{9 \cdot 29 + 8.5 \cdot 19}{48} = 8.80$$

e, quindi, si ha:

$$t = \frac{27 - 23}{2.96\sqrt{\frac{1}{30} + \frac{1}{20}}} = 4.67$$

valore superiore a 1.684 e che pertanto cade nella zona di rifiuto dell'ipotesi nulla.

Due medie campionarie

Qualcuno si può chiedere:

Sono più intelligenti gli studenti che provengono dal Liceo classica o quelli che provengono dal Liceo scientifico?

Due medie campionarie

Per risolvere il problema si costruiscono due campioni casuali, stratificati per sesso, estratti dagli studenti che hanno conseguito la maturità, provenienti da un Liceo classico e da un Liceo scientifico romani

La numerosità, in entrambi i campioni, è di $n_1 = n_2 = 31$

Due medie campionarie

Si somministra ai ragazzi un opportuno test per valutare il QI (quoziente di intelligenza) ottenendo

$$\bar{x}_c = 125$$

$$\bar{x}_s = 116$$

$$s_c = 18$$

$$s_s = 21$$

E' inoltre noto che il Qi si distribuisce normalmente

Due medie campionarie

Il test F relativo alle due varianze risulta non significativo, pertanto è lecito stimare la varianza ignota della popolazione tramite la medie delle due varianze campionarie, da cui

$$\bar{s} = 19.56$$

Due medie campionarie

$$H_0 : \mu_c = \mu_s$$

$$H_1 : \mu_c > \mu_s$$

$$\alpha = 0.05$$

Due medie campionarie

$$t = \frac{\bar{x}_c - \bar{x}_s}{\hat{E}S} = \frac{125 - 116}{19.56\sqrt{\frac{2}{31}}} = \frac{9}{19.56x0.25} = \frac{9}{4.89} = 1.84$$

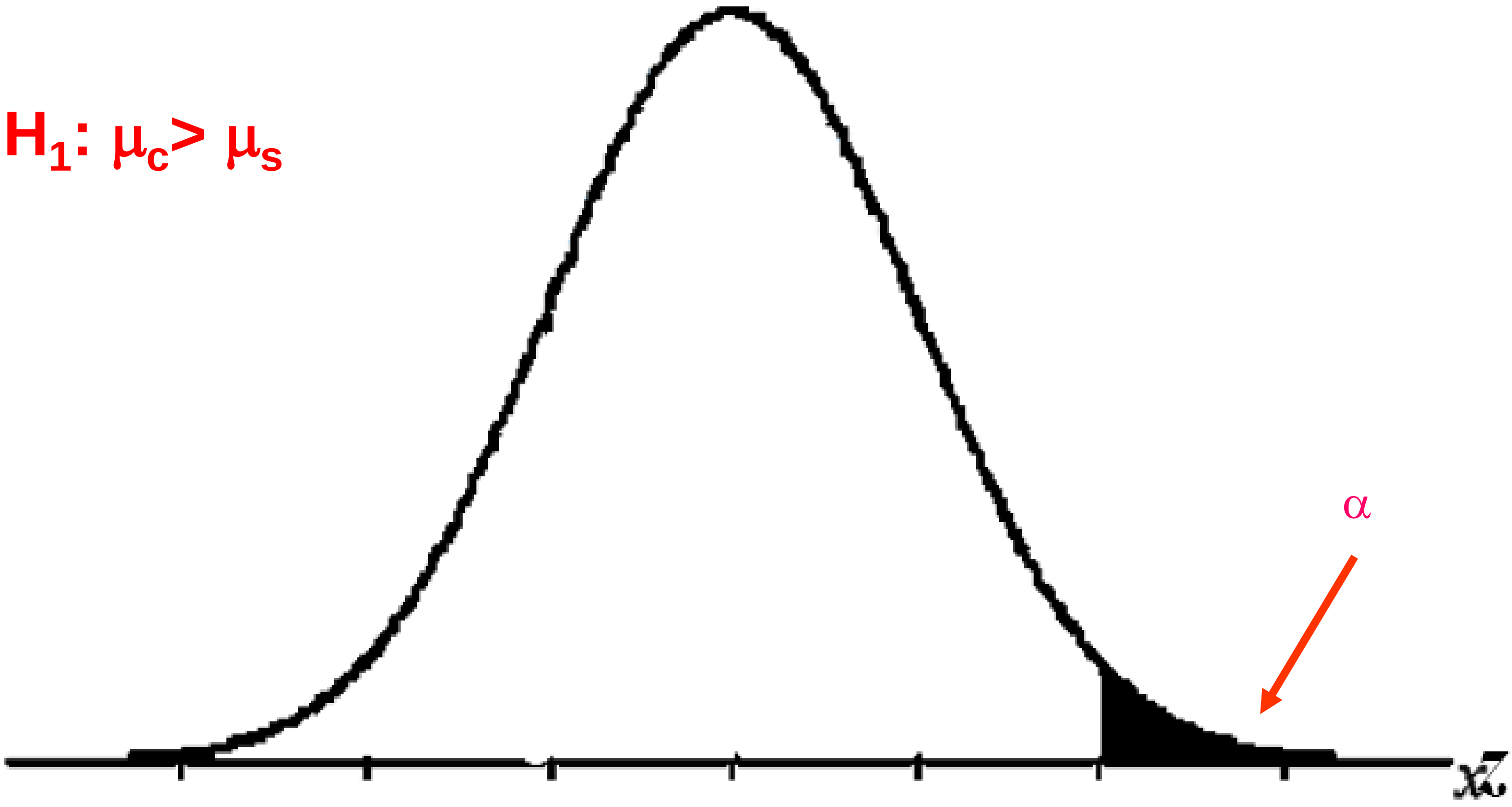
$$Gdl = n_1 - 1 + n_2 - 1 = n_1 + n_2 - 2$$

$$= 31 + 31 - 2 = 60$$

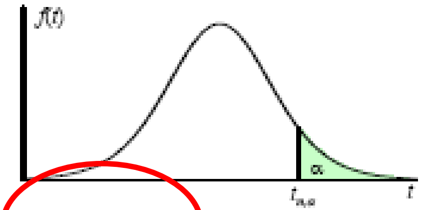
Due medie campionarie

L'ipotesi alternativa è unidirezionale, quindi

H_1: $\mu_c > \mu_s$



Due medie campionari



n	α				
	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
50	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
70	1.294	1.667	1.994	2.381	2.648
80	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639
90	1.291	1.662	1.987	2.368	2.632
100	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626
120	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

Due medie campionarie

Poiché P < α (ovvero ttest > tα) si può concludere che è piccola la probabilità che il risultato ottenuto sia casuale, quindi si respinge l’ipotesi nulla

Risultato statisticamente significativo

Due medie campionarie

Si può affermare che l'intelligenza media appare significativamente maggiore fra gli studenti con la maturità classica rispetto a quelli con la maturità scientifica

Nel fare questa affermazione si corre un rischio di errore pari ad α

Due medie campionarie

Naturalmente da uno studio così impostato, non si può stabilire se è il tipo di liceo che determina una diversa intelligenza, o esiste una auto selezione a monte per cui al liceo classico affluiscono per loro scelta individui mediamente più intelligenti

Esempio: test su due medie

Due gruppi di soggetti assumono rispettivamente il trattamento A o B. Si misura il valore della pressione sanguigna, che si assume si distribuisca secondo una distribuzione Normale con stessa varianza. I risultati nei campioni sono in tabella. Verificare l'ipotesi che non ci sia differenza fra i due gruppi.

	gruppo	
	A	B
n	32	36
$\bar{y}$	94	92
s^2	18	16

Ipotesi e tipo di Test: $H_0: \mu_A = \mu_B \text{ vs } H_1: \mu_A \neq \mu_B$; T-test per 2 medie

Ipotesi del test: valgono Normalità e omoschedasticità (secondo il testo)

Calcolo della statistica test:

$$s = \sqrt{\frac{31 \cdot 18 + 35 \cdot 16}{32 + 36 - 2}} = 4.16 \qquad t = \frac{94 - 92}{4.16\sqrt{\frac{1}{32} + \frac{1}{36}}} = 1.98$$

Metodo delle regioni di rifiuto: Fissiamo α=0.05; il test è a due code; il valore soglia è 1.96: La statistica test cade nella zona di rifiuto.

Conclusione: rigettiamo l'ipotesi di uguaglianza dei gruppi rispetto alla pressione.

Confronto di gruppi indipendenti o appaiati

- I 2 gruppi sono indipendenti quando le unità statistiche del primo gruppo non coincidono con quelle del secondo gruppo, o comunque non condividono con esse alcun possibile fattore esplicativo con quelle; i due gruppi possono avere numerosità diverse
- I 2 gruppi sono dipendenti o appaiati quando si tratta degli stessi soggetti, oppure di soggetti (o unità statistiche, o osservazioni) che condividono un importante fattore esplicativo; i due gruppi hanno la stessa numerosità. Esempi:
  - Misurazione del peso (dei WBC; della pressione; ...) prima e dopo la terapia
  - Confronto fra due gruppi di fratelli (condividono fattori genetici / ambientali)
  - Confronto fra organi o parti di organi dello stesso paziente (es i 2 occhi, 2 lembi di pelle, etc)
  - Osservazione dell'outcome in studi sperimentali con cross-over, o in studi osservazionali con matching individuale (vd. Epidemiologia)
- Esistono test specifici per dati appaiati

Campioni dipendenti

In molte situazioni si parte da un unico campione e sullo stesso vengono rilevati i dati in più tempi successivi

Tale procedura viene detta follow-up

Il problema che ci si pone è valutare se le variazioni che si manifestano fra i tempi di osservazione siano o meno statisticamente significative

Campioni dipendenti

In altri casi, si confrontano soggetti che si sa essere strettamente “legati” tra loro i cui dati pertanto possono ritenersi dipendenti

E’ il caso dei confronto dei caratteri biometrici di gemelli monocoriali, del confronto delle opinioni di madre e padre relativamente al comportamento del figlio, ecc

Campioni dipendenti

Ogni campione in pratica si può considerare controllo di se stesso

Ogni unità statistica campionaria fornisce i dati in tutti i tempi di osservazione

Se in qualche tempo il dato non è rilevato (missing) l’unità statistica che ne è priva viene esclusa dall’analisi

Campioni dipendenti

In questa situazione NON si testa la differenza delle medie, come nel caso di campioni indipendenti già visto, ma si valuta la media delle differenze

Campioni dipendenti

Quindi per ogni unità statistica si crea la nuova variabile

$$\boxed{d_i = x_{2i} - x_{1i}}$$

$$\boxed{d_i = x_{1i} - x_{2i}}$$

Ed è utilizzando questa nuova variabile che si effettua il test

Campioni dipendenti

Le procedure adottate sono fondamentalmente le stesse del test per la media di un campione confrontata con un valore di riferimento noto

Nel caso in oggetto, il valore di riferimento noto è dato dal valore 0, perché, sulla base dell'ipotesi nulla, si presuppone che non ci sia stata alcuna variazione nel tempo

Campioni dipendenti

Quindi avremo

$$H_0 : \Delta_1 = 0$$

$$H_1 : \Delta_1 \neq 0$$

$$H_1 : \Delta_1 > 0$$

$$H_1 : \Delta_1 < 0$$

Test a 2 code (bidirezionale)

Test ad 1 coda (unidirezionale)

Campioni dipendenti

Esempio

Si vuole valutare l'efficacia di un nuovo sonnifero in soggetti affetti da insonnia

Poiché lo studio è di fase 2 (non comparativo) non si prevede un farmaco/placebo di confronto

Campioni dipendenti

UNITA' STATISTICHE
A
B
C
D
E
G
H
K
I
L

[redacted]

Campioni dipendenti

UNITA' STATISTICHE	VALORE BASALE
A	4
B	6
C	5
D	4
E	7
G	6
H	5
K	3
I	4
L	5

[redacted]

Campioni dipendenti

UNITA' STATISTICHE	VALORE BASALE	VALORE DOPO TRATTAMENTO
A	4	6
B	6	5
C	5	5
D	4	6
E	7	6
G	6	7
H	5	7
K	3	6
I	4	5
L	5	7

[redacted]

Campioni dipendenti

UNITA' STATISTICHE	VALORE BASALE	VALORE DOPO TRATTAMENTO	VARIAZIONI
A	4	6	2
B	6	5	-1
C	5	5	0
D	4	6	2
E	7	6	-1
G	6	7	1
H	5	7	2
K	3	6	3
I	4	5	1
L	5	7	2
			11

Campioni dipendenti

Otterremo

$$\bar{d} = \frac{11}{10} = 1.1$$

Ci serve ora la SD campionaria

Campioni dipendenti

UNITA' STATISTICHE	VALORE BASALE	VALORE DOPO TRATTAMENTO	VARIAZIONI	SCARTI
A	4	6	2	0.9
B	6	5	-1	-2.1
C	5	5	0	-1.1
D	4	6	2	0.9
E	7	6	-1	-2.1
G	6	7	1	-0.1
H	5	7	2	0.9
K	3	6	3	1.9
I	4	5	1	-0.1
L	5	7	2	0.9
			11	0

[redacted]

Campioni dipendenti

UNITA' STATISTICHE	VALORE BASALE	VALORE DOPO TRATTAMENTO	VARIAZIONI	SCARTI	SCARTI AL QUADRATO
A	4	6	2	0.9	0.81
B	6	5	-1	-2.1	4.41
C	5	5	0	-1.1	1.21
D	4	6	2	0.9	0.81
E	7	6	-1	-2.1	4.41
G	6	7	1	-0.1	0.01
H	5	7	2	0.9	0.81
K	3	6	3	1.9	3.61
I	4	5	1	-0.1	0.01
L	5	7	2	0.9	0.81
			11	0	16.9

Campioni dipendenti

Da cui

$$s(di) = \sqrt{\frac{\sum si^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{16.9}{9}} = 1.37$$

$$\hat{E}S = \frac{1.37}{\sqrt{10}} = \frac{1.37}{3.16} = 0.434$$

Campioni dipendenti

Fissiamo

$$H_0 : \Delta_1 = 0$$

$$H_1 : \Delta_1 \neq 0$$

$\alpha = 0.05$

Campioni dipendenti

Avremo

$$t = \frac{1.1 - 0}{0.434} = 2.53$$

Gdl = n - 1 = 10 – 1 = 9

Campioni dipendenti

Valori della funzione t (area a destra)

DEGREES OF FREEDOM	$t_{.100}$	$t_{.050}$	$t_{.025}$	$t_{.010}$	$t_{.005}$
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947

Campioni dipendenti

Si è ottenuto un risultato significativo, in quanto il valore trovato ($t = 2.53$) supera il valore soglia 2.262

La probabilità che il risultato campionario trovato sia attribuibile al caso è, pertanto, molto bassa

Campioni dipendenti

Di conseguenza respingo l'ipotesi nulla: il farmaco somministrato ha un effetto positivo sulla durata del sonno

Nel fare questa affermazioni si corre il rischio, pari al valore dell'errore di primo tipo fissato (0.05), di sbagliare

TEST D'IPOTESI- per dati appaiati

H_0:δ=0

H_1:δ≠0

Test statistico:

$$t = \frac{\bar{d} - 0}{e.s.(d)} = \frac{\bar{d} - 0}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}}$$

con (n-1) gradi di libertà

Assunzioni:

1- I campioni appaiati sono selezionati casualmente dalla popolazione

2- La popolazione delle differenze è distribuita normalmente

ESEMPIO 2. Si vuole verificare se un conservante per alimentazione umana abbia effetti sui fattori di crescita. A questo scopo, un gruppo di 10 cavie adulte è stato sottoposto a un regime di alimentazione contenente la sostanza da testare.

Ogni soggetto è stato pesato sia prima che dopo la nuova dieta, per misurarne le variazioni. Nella tabella sottostante sono riportati i pesi in grammi prima e dopo la dieta, per ognuna delle 10 cavie:

Cavia	Prima	Dopo
1	180	190
2	175	170
3	150	175
4	158	164
5	174	185
6	187	184
7	172	185
8	157	168
9	164	180
10	165	173

Si vuole sapere:

1 - Se la sostanza può essere la causa di variazioni significative di peso.

2 - Quale è la reale variazione (δ) di peso determinata dal conservante, alla probabilità $\alpha = 0.05$.

Risposta 1. E' un test bilaterale, in cui (come sempre)

- **l'ipotesi nulla H_0** afferma che la media reale (δ) delle differenze (d) è uguale a 0 **H_0: $\delta = 0$**
- mentre **l'ipotesi alternativa H_1** afferma che è diverso da 0: **H1: $\delta \neq 0$**

Dalla colonna delle differenze (D) tra le 10 coppie di valori osservati si calcolano - la somma delle D che risulta uguale a +90 e

- la somma delle $(d - \bar{d})^2$ (cioè la devianza) che risulta uguale a 676.

Cavia	Prima	Dopo	D	$(d-\bar{d})^2$
1	180	190	**10**	**1**
2	175	170	**- 5**	**196**
3	150	175	**25**	**256**
4	158	164	**6**	**9**
5	174	183	**9**	**0**
6	187	184	**-3**	**144**
7	172	185	**13**	**16**
8	157	168	**11**	**4**
9	164	180	**16**	**49**
10	165	173	**8**	**1**
TOTALE			***+90***	**676**

Da esse, si ricavano

- la media ($\overline{d}$),

$$\overline{d} = \frac{90}{10} = 9$$

- la deviazione standard (s_d)

$$s_d = \sqrt{\frac{676}{10-1}} = 8{,}66$$

- il numero di **coppie di osservazioni** (n) o di differenze sulle quali sono stati effettuati i calcoli

$$n = 10$$

Infine si stima

$$t_9 = \frac{9}{\frac{8{,}66}{\sqrt{10}}} = 3{,}28$$

un valore di **t** con **9** gdl uguale a **3,28**.

Per un **test a due code**, il valore critico della distribuzione **t** per 9 gdl e δ = 0.05 è uguale a 2,262.

Il valore calcolato (3,28) è superiore: la probabilità **P** che la differenza riscontrata sia dovuta al caso è minore di 0.05.

Si rifiuta l'ipotesi nulla H_0 e si può concludere che la nuova dieta determina nelle cavie una differenza ponderale che è significativa.

t Table

cum. prob	$t_{.50}$	$t_{.75}$	$t_{.80}$	$t_{.85}$	$t_{.90}$	$t_{.95}$	$t_{.975}$	$t_{.99}$	$t_{.995}$	$t_{.999}$	$t_{.9995}$
one-tail	**0.50**	**0.25**	**0.20**	**0.15**	**0.10**	**0.05**	**0.025**	**0.01**	**0.005**	**0.001**	**0.0005**
two-tails	**1.00**	**0.50**	**0.40**	**0.30**	**0.20**	**0.10**	**0.05**	**0.02**	**0.01**	**0.002**	**0.001**
df											
1	0.000	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66	318.31	636.62
2	0.000	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327	31.599
3	0.000	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215	12.924
4	0.000	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	0.000	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	0.000	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	0.000	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	0.000	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	0.000	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	0.000	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	0.000	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	0.000	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	0.000	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	0.000	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	0.000	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	0.000	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	0.000	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	0.000	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	0.000	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	0.000	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	0.000	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	0.000	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	0.000	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.768
24	0.000	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	0.000	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	0.000	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	0.000	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	0.000	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	0.000	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	0.000	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
40	0.000	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
60	0.000	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
80	0.000	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.195	3.416
100	0.000	0.677	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.174	3.390
1000	0.000	0.675	0.842	1.037	1.282	1.646	1.962	2.330	2.581	3.098	3.300
z	0.000	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291
	0%	50%	60%	70%	80%	90%	95%	98%	99%	99.8%	99.9%
	Confidence Level										