DISTRIBUZIONE NORMALE

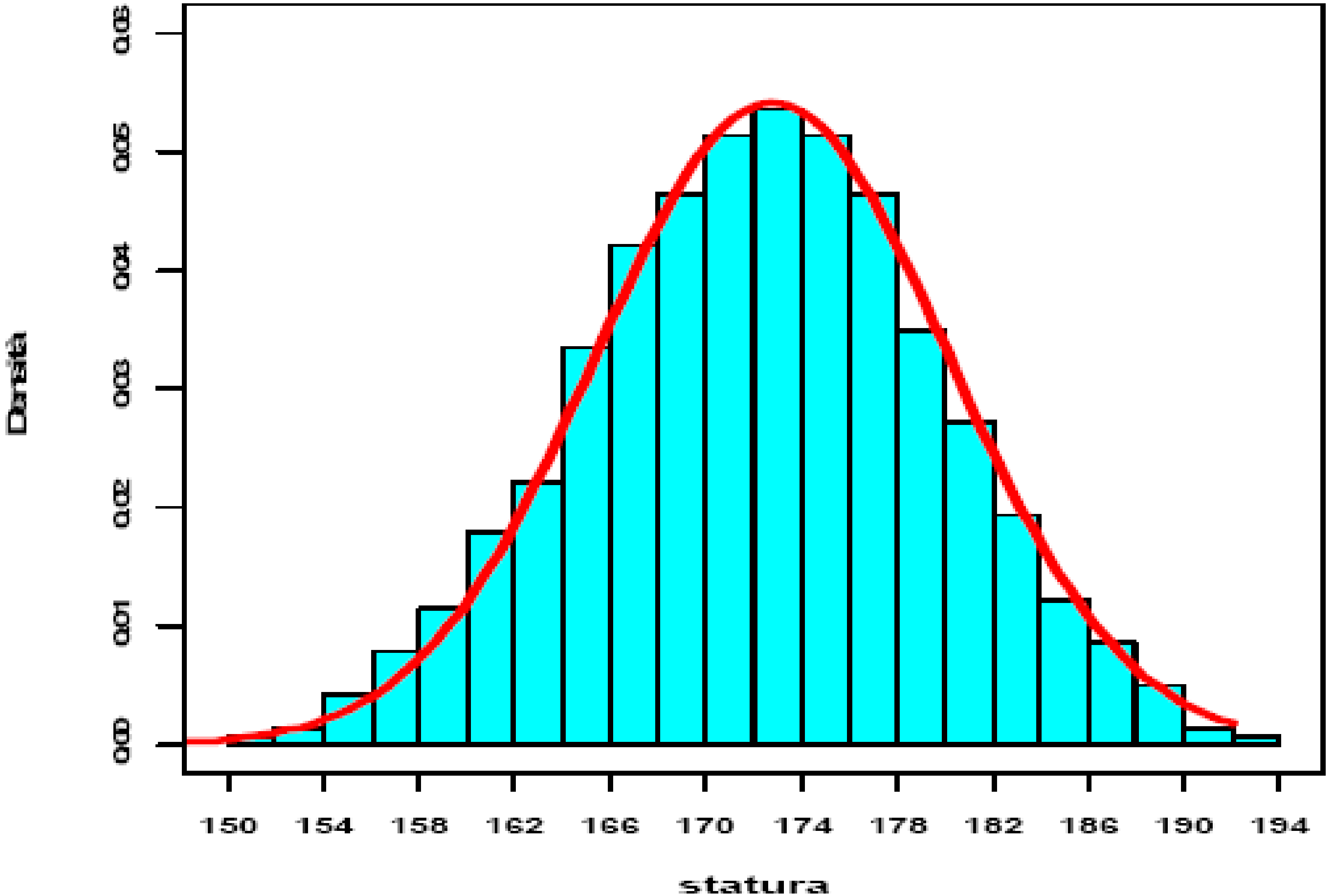
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

annarita.vestri@uniroma1.it

La più conosciuta ed importante distribuzione di probabilità è, senza alcun dubbio, la Distribuzione normale, anche detta distribuzione di Gauss (1777 – 1855), dal nome del ben noto matematico tedesco

Il nome Normale deriva dal fatto che molte variabili di interesse biologico (circonferenza cranica, statura, glicemia, colesterolo, QI, pressione sistolica ecc.) si presentano secondo una distribuzione comune, prevedibile, con frequenze più alte in corrispondenza dei valori prossimi al valor medio centrale e più basse simmetricamente per i valori estremi

Distribuzione Normale o di Gauss



E’ detta anche Curva degli errori accidentali perché, soprattutto nelle discipline fisiche, gli errori commessi misurando numerose volte la stessa grandezza, con lo stesso strumento di misura, approssimano molto bene questa curva

Fu proprio in questo ambito che Gauss la utilizzò nel 1809

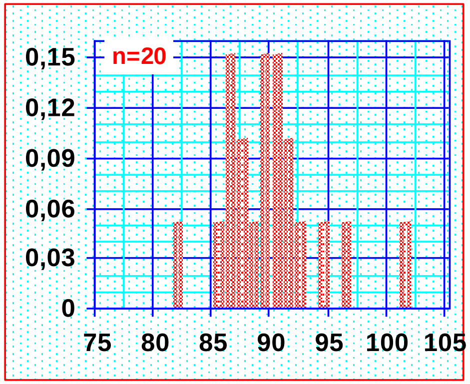
Errori casuali e sistematici

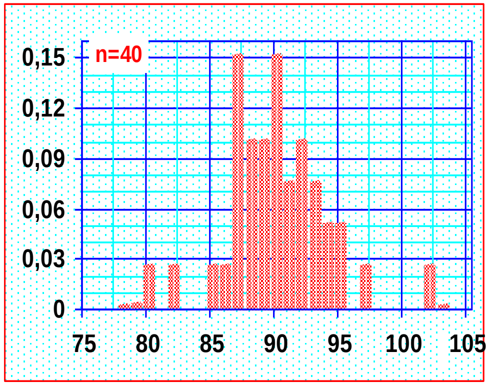
Gli errori vengono generalmente suddivisi in due categorie:
errori casuali ed errori sistematici.

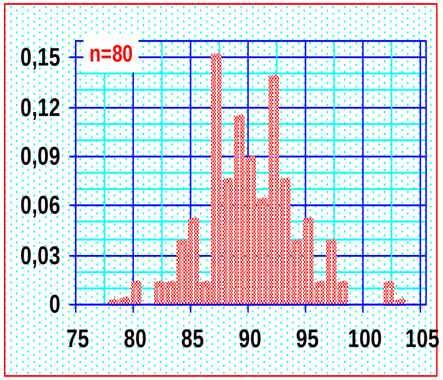
Gli **errori casuali** sono dovuti a influenze non controllabili e non unidirezionali (cioè a media nulla) che intervengono durante una serie di misure. Essi sono responsabili della variabilità dei valori misurati intorno ad un certo valor medio a parità delle condizioni sperimentali.
Sono chiamati invece **errori sistematici** le deviazioni dal valore vero che durante la misura sono costanti in entità e mantengono lo stesso segno.

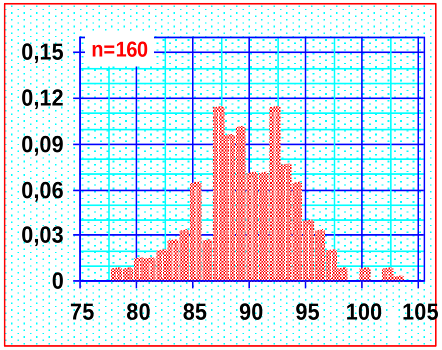
DISTRIBUZIONE DEGLI ERRORI DI MISURA

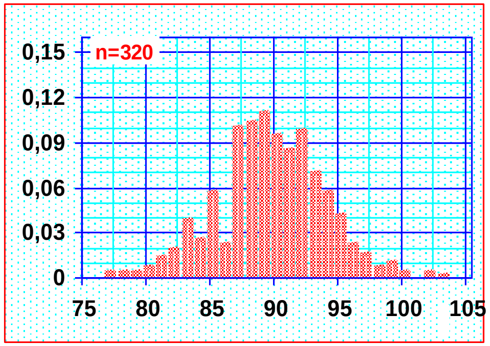
Si supponga di eseguire, in condizioni assai simili e con lo stesso metodo analitico, un **gran numero** di titolazioni di una soluzione di glucosio avente concentrazione θ=90 mg/dl, e di riportare in grafico le **frequenze relative** dei valori ottenuti (x) con le prime 20, 40, ... 5120 misure.

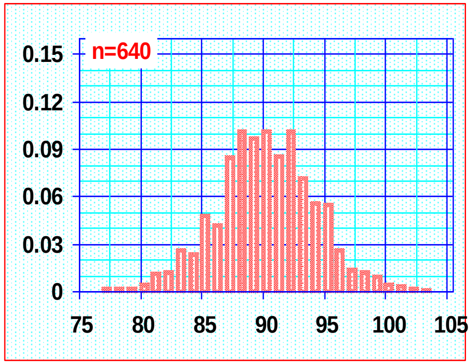

n=20
0,15
0,12
0,09
0,06
0,03
0
75 80 85 90 95 100 105

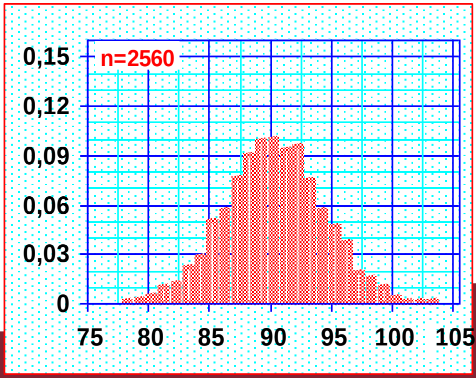

n=40
0,15
0,12
0,09
0,06
0,03
0
75 80 85 90 95 100 105

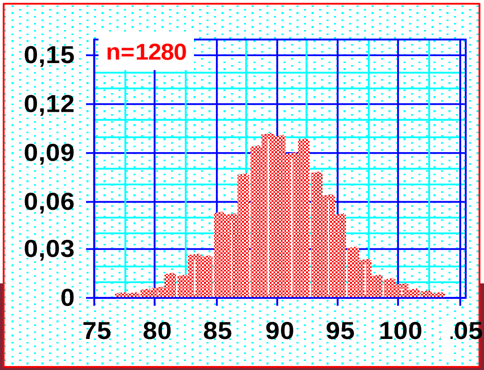

n=80
0,15
0,12
0,09
0,06
0,03
0
75 80 85 90 95 100 105

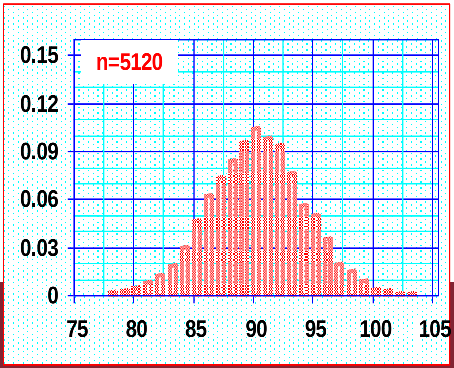

n=160
0,15
0,12
0,09
0,06
0,03
0
75 80 85 90 95 100 105


n=320
0,15
0,12
0,09
0,06
0,03
0
75 80 85 90 95 100 105


n=640
0.15
0.12
0.09
0.06
0.03
0
75 80 85 90 95 100 105

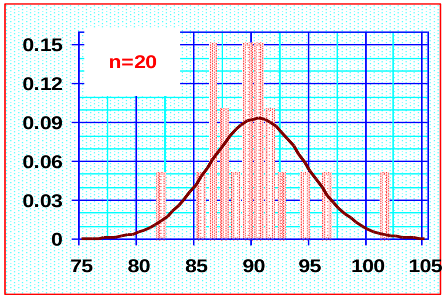

n=2560
0,15
0,12
0,09
0,06
0,03
0
75 80 85 90 95 100 105

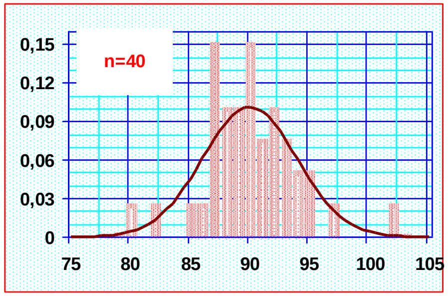

n=1280
0,15
0,12
0,09
0,06
0,03
0
75 80 85 90 95 100 .05

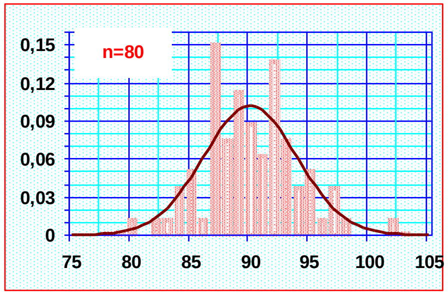

n=5120
0.15
0.12
0.09
0.06
0.03
0
75 80 85 90 95 100 105

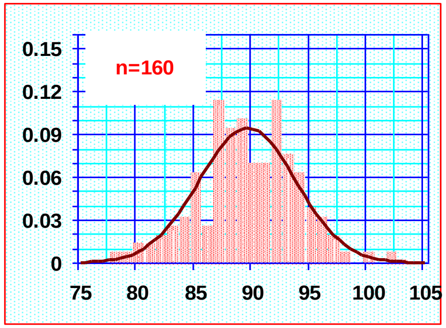
LA FORMA DELLA DISTRIBUZIONE DEGLI ERRORI DI MISURA

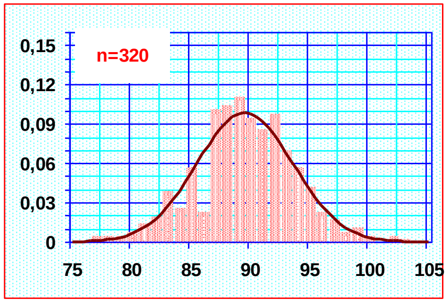
All'aumentare del numero di misure, i valori tendono ad accentrarsi attorno alla loro media e l'istogramma assume una forma ***a campana*** sempre più regolare, che può essere approssimata con una funzione reale nota come **funzione di gauss** o **funzione normale**.

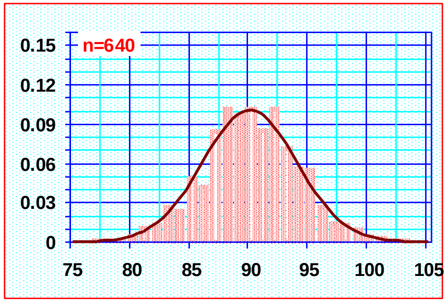

n=20
0.15
0.12
0.09
0.06
0.03
0
75 80 85 90 95 100 105

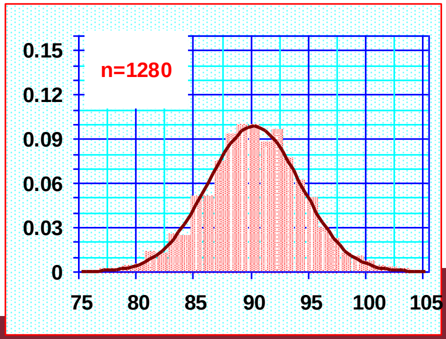

n=40
0,15
0,12
0,09
0,06
0,03
0
75 80 85 90 95 100 105

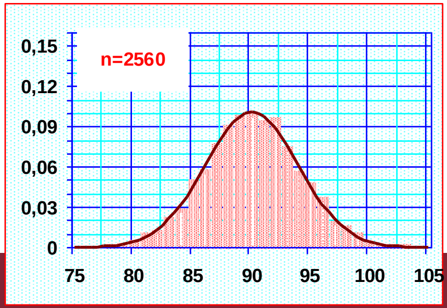

n=80
0,15
0,12
0,09
0,06
0,03
0
75 80 85 90 95 100 105

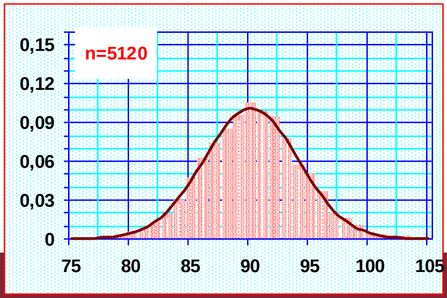

n=160
0.15
0.12
0.09
0.06
0.03
0
75 80 85 90 95 100 105


n=320
0,15
0,12
0,09
0,06
0,03
0
75 80 85 90 95 100 105

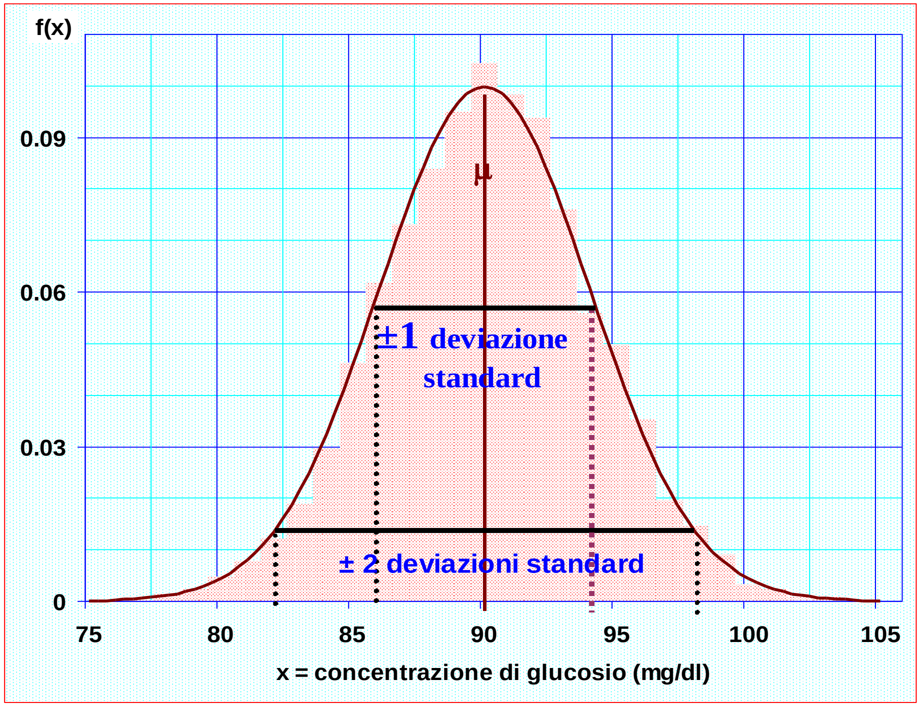

n=640
0.15
0.12
0.09
0.06
0.03
0
75 80 85 90 95 100 105


n=1280
0.15
0.12
0.09
0.06
0.03
0
75 80 85 90 95 100 105


n=2560
0,15
0,12
0,09
0,06
0,03
0
75 80 85 90 95 100 105


n=5120
0,15
0,12
0,09
0,06
0,03
0
75 80 85 90 95 100 105

Questa funzione è nota come funzione di Gauss, o gaussiana.
Essa deve il nome a Karl Friederick Gauss, che la propose per la descrizione delle deviazioni delle misure astronomiche rispetto al loro andamento medio.
Egli ipotizzò infatti che tali deviazioni fossero dovute ad errori casuali di misura e, in base ad argomenti abbastanza generali, derivò una funzione densità di probabilità.
Stanti i forti argomenti teorici per ritenere che gli errori casuali debbano seguire tale distribuzione e la effettiva compatibilità dei dati sperimentali con tale ipotesi, viene comunemente detto che gli errori casuali "seguono Normalmente " tale distribuzione e la distribuzione stessa è perciò chiamata anche distribuzione normale.



La funzione di Gauss (1)

- Gli errori casuali di misura ($\varepsilon = x - \mu$), considerati nel loro complesso, mostrano un comportamento tipico che può essere così descritto:

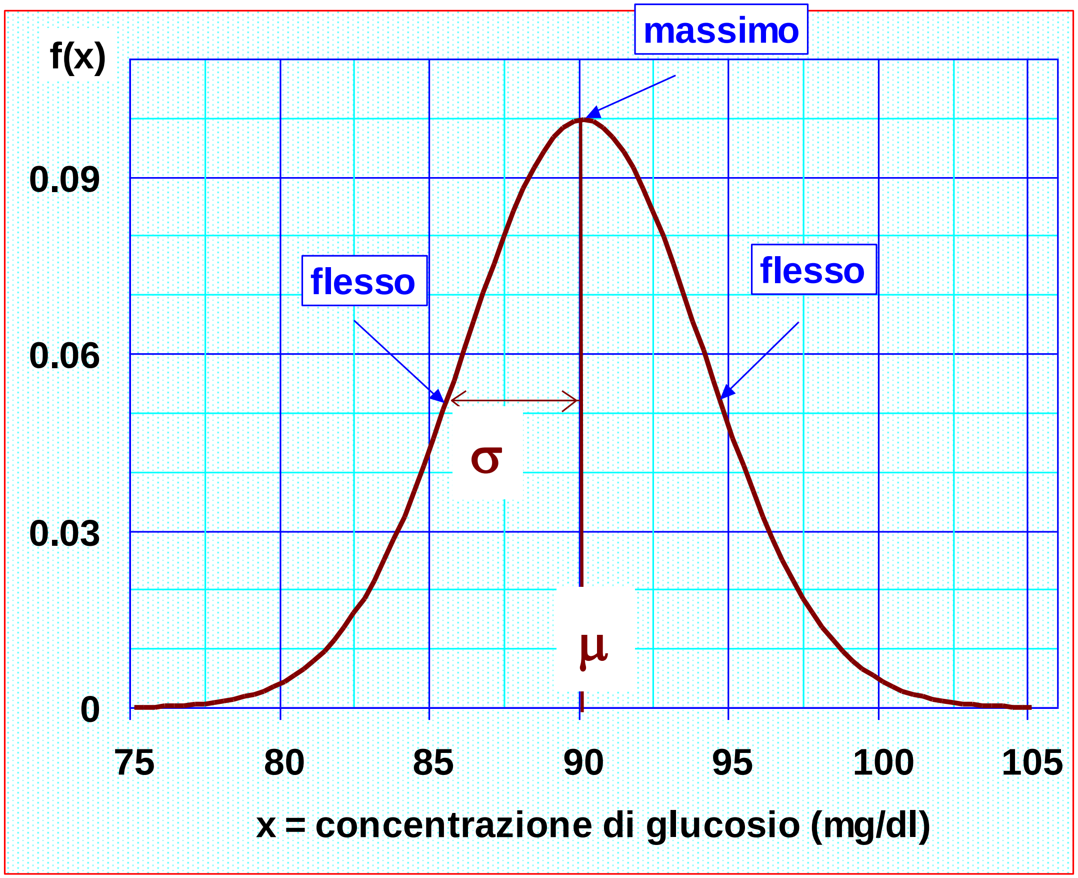
  - Gli **errori piccoli** sono più frequenti di quelli **grandi**;

  - Gli errori di **segno negativo** tendono a manifestarsi con la stessa frequenza di quelli con segno positivo;

  - All'aumentare del numero delle misure si ha che ~2/3 dei valori tendono ad essere inclusi nell'intervallo **media ± 1 deviazione standard**

  - Il **95%** ~ dei valori tende ad essere incluso nell'intervallo **media ± 2 deviazioni standard**

La funzione di Gauss (3)



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

dove: **σ** è la deviazione standard della totalità delle misure;
μ è la media della totalità delle misure;
e = base dei logaritmi naturali (e = 2.71828...).
π è il rapporto tra circonferenza e diametro π = 3.14159...);

La distribuzione Normale quindi non è unica, ma una famiglia di distribuzioni che hanno le stesse caratteristiche e lo stesso andamento, ma variano in funzione di **σ** e di **μ**

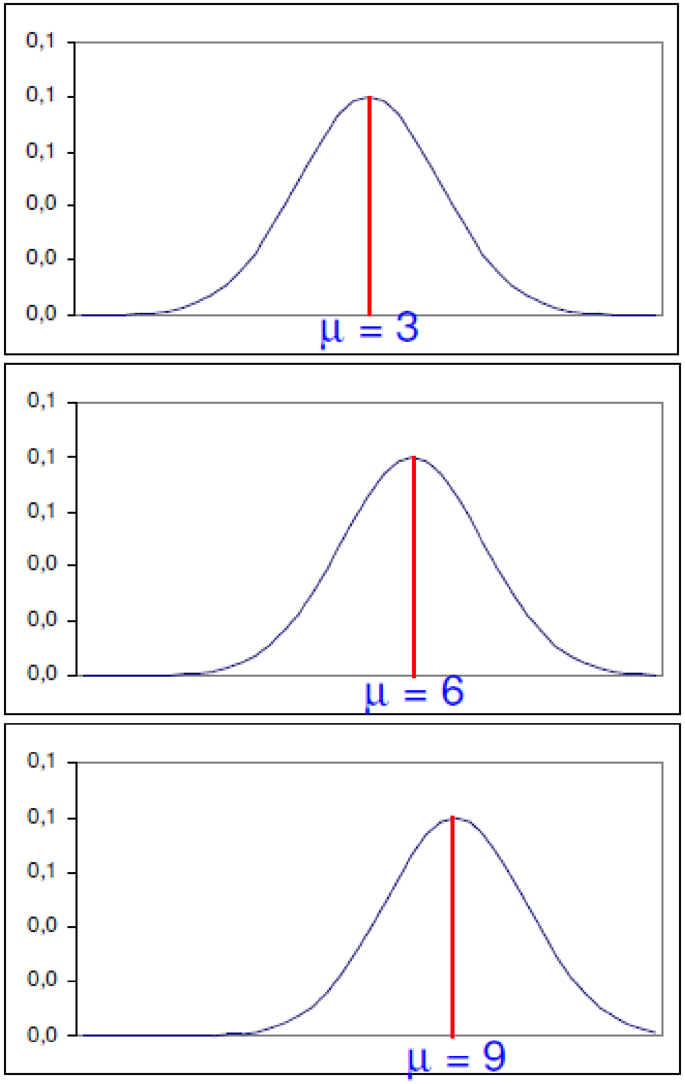
Sono curve simmetriche con valori più concentrati verso il centro e meno nelle estremità laterali (code)

Poiché ciascuno dei due parametri μ e σ può assumere infiniti valori, teoricamente potremmo avere infinito alla seconda **(∞^2)** curve di Gauss

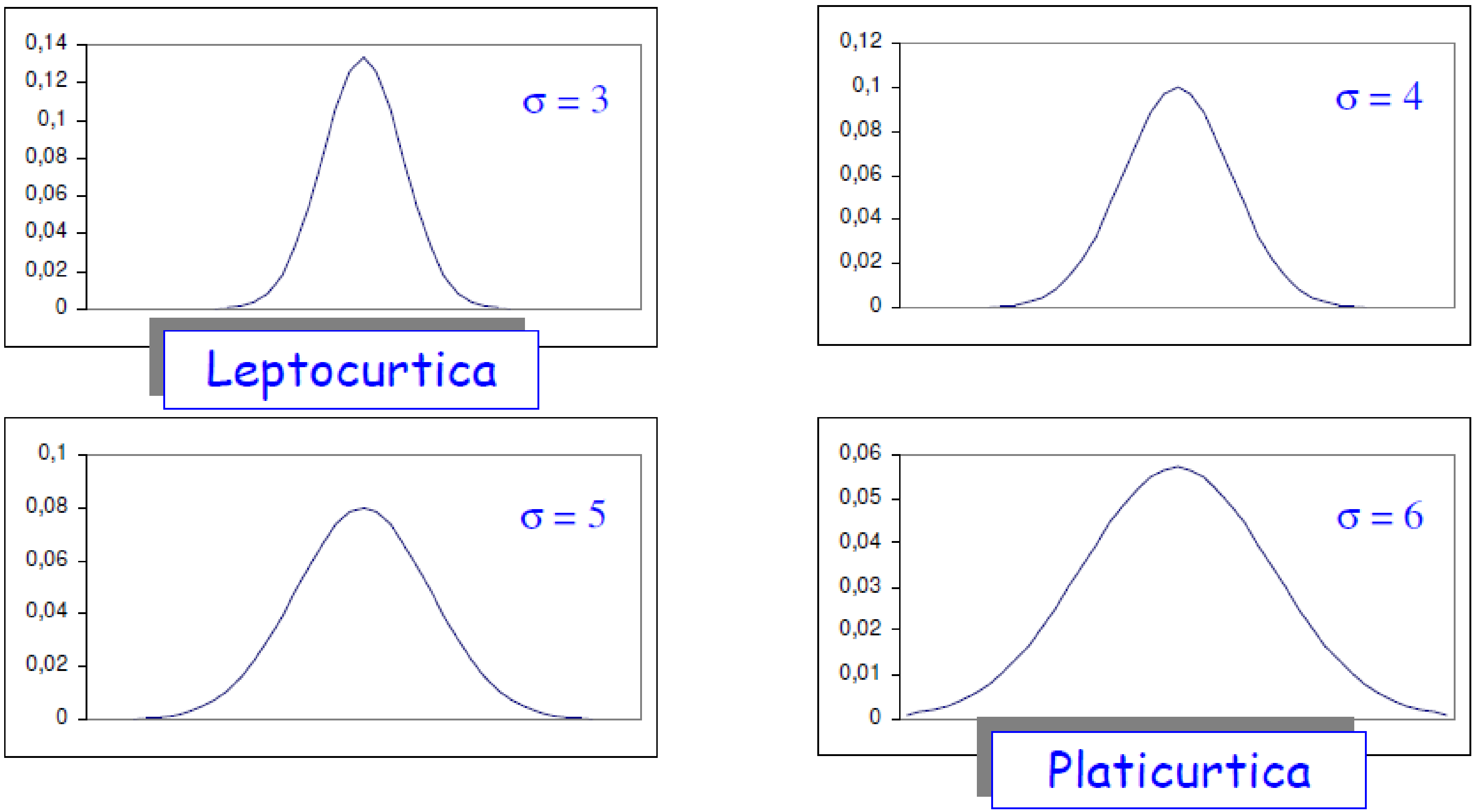
… tante!

Vediamo adesso come i 2 parametri (μ e σ) influenzano la curva normale

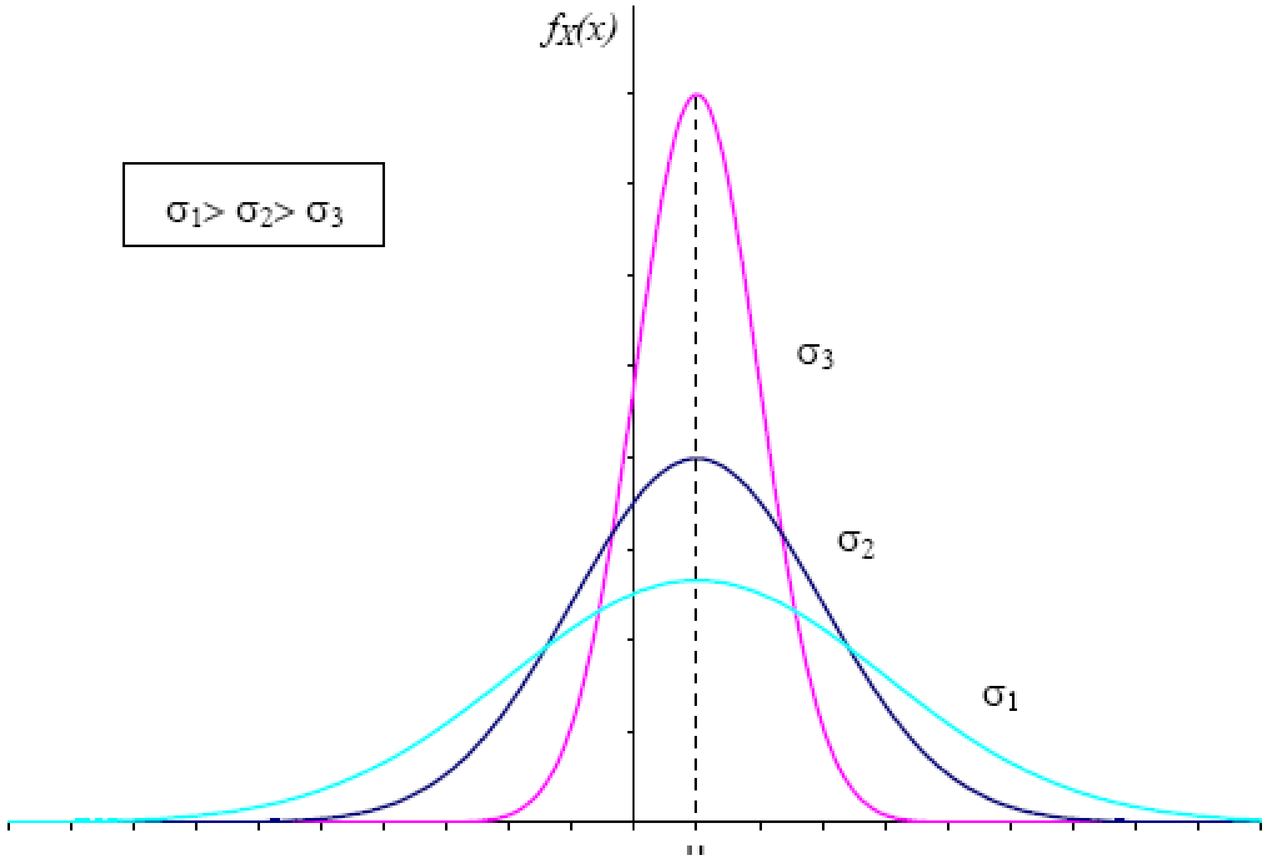
Se a parità di σ facciamo variare la media μ abbiamo curve aventi la stessa forma e la stessa dimensione, ma con l'asse di simmetria in punti diversi:



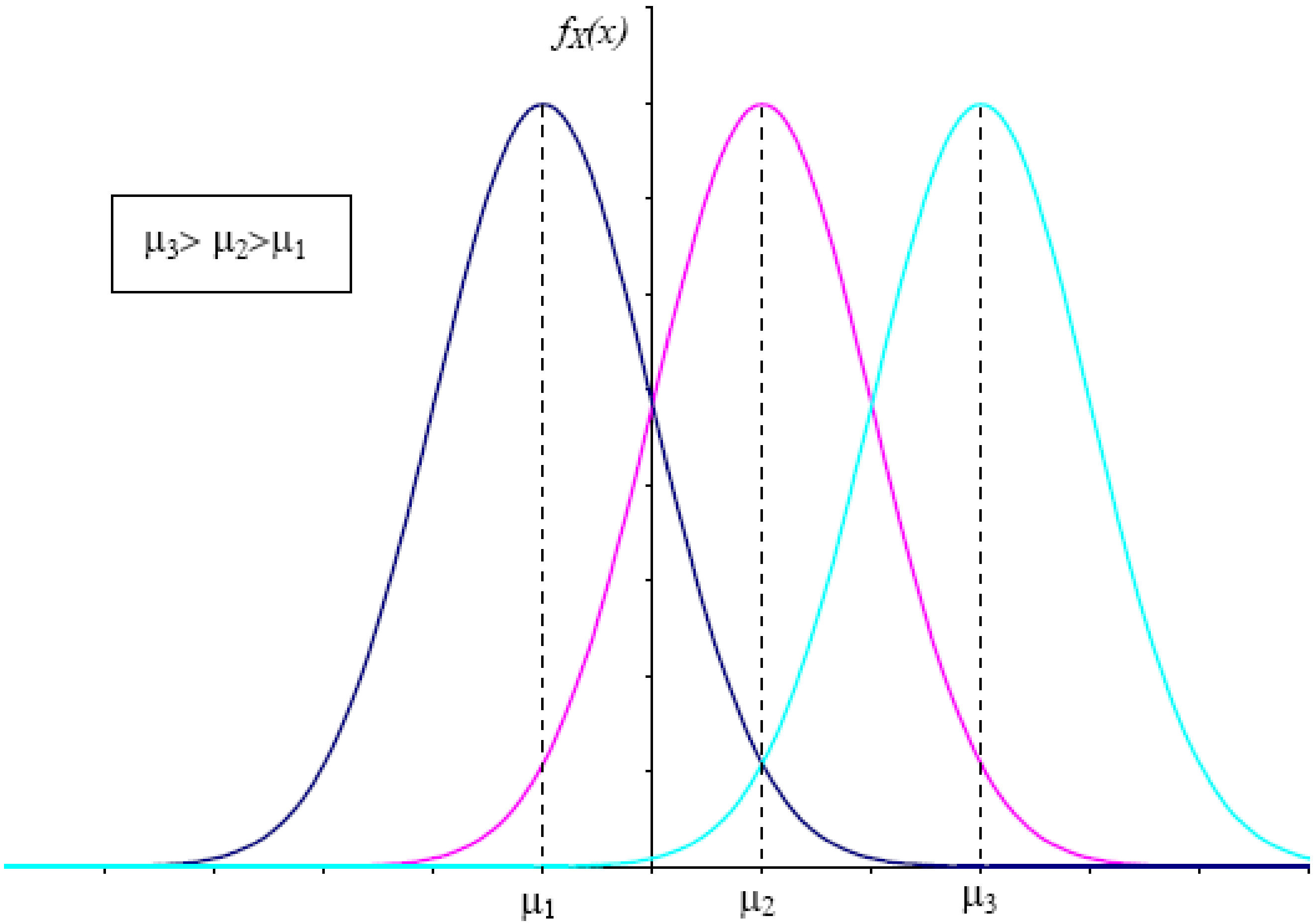
Se a parità di media (μ) facciamo variare la deviazione standard (σ) abbiamo curve aventi lo stesso asse di simmetria, ma sono più o meno appiattite ed il loro "appiattimento" cresce al crescere di σ.



Al ridursi di **σ** la curva si innalza e si “restringe”, al crescere di **σ** si abbassa e si “allarga”



Al variare di **μ** la curva trasla sull'asse delle ascisse



La funzione di Gauss (2)

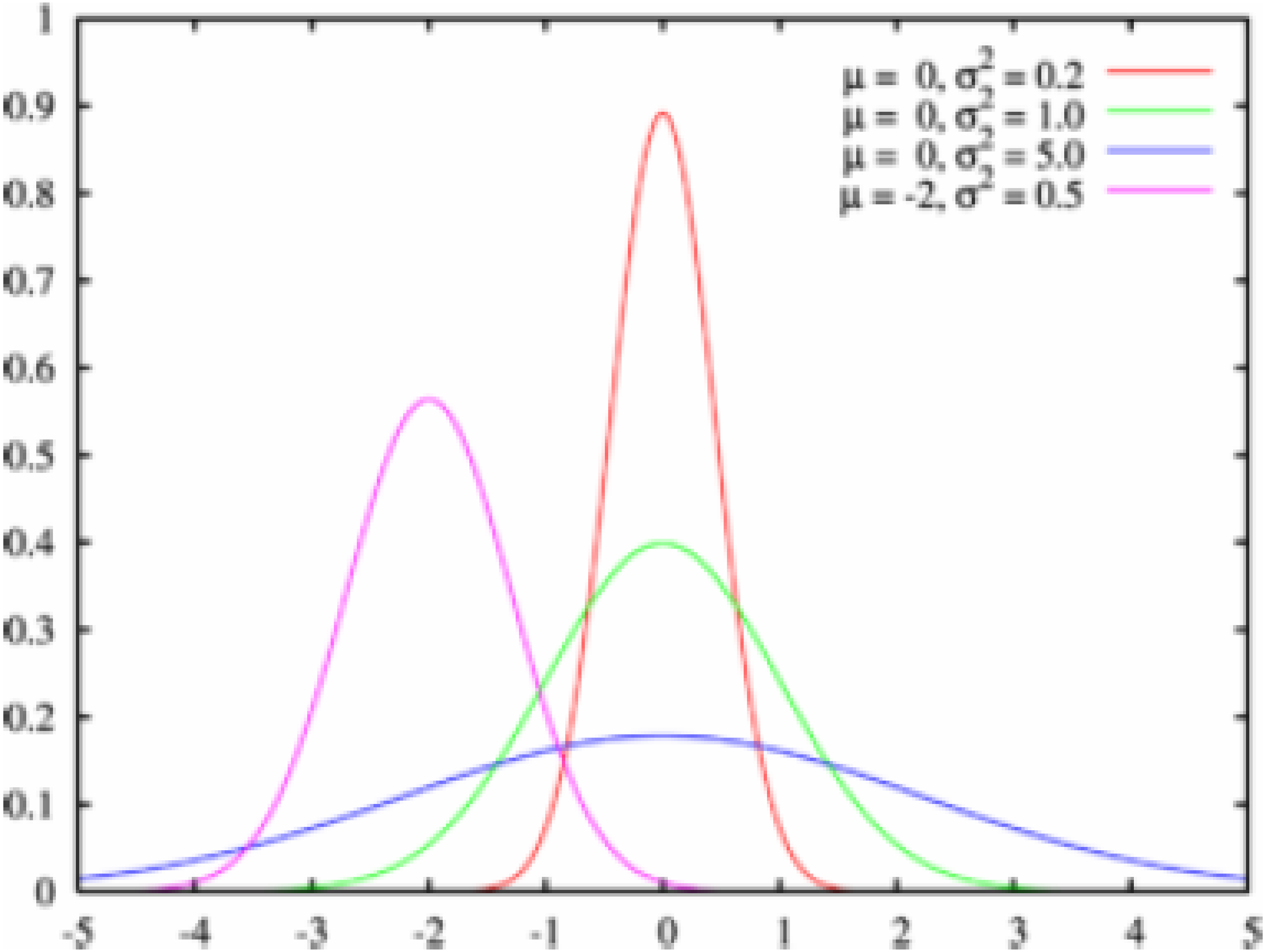
Le distribuzioni “normali” sono una famiglia di curve simmetriche a forma di campana. Esse hanno tutte la stessa forma, ma sono caratterizzate (e completamente individualizzate) dal valore della loro media e della loro deviazione standard.

Se una variabile casuale è distribuita in forma normale, la probabilità che un valore di essa estratto a caso dalla popolazione dei valori cada entro la distanza di una DS dalla media (si tratti cioè di un valore compreso fra $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$) è pari a 0,683.

La probabilità poi che un valore cada entro la distanza di due DS dalla media è pari a 0,954. Infine la probabilità che cada entro tre DS dalla media è pari a 0,997.

E’ utile considerare che esattamente il **95%** dei valori centrali di una distribuzione normale cadono entro l’intervallo che va da

$$\boldsymbol{\mu - 1{,}96\sigma \text{ e } \mu + 1{,}96\sigma}$$



$\mu = 0, \sigma^2 = 0.2$
$\mu = 0, \sigma^2 = 1.0$
$\mu = 0, \sigma^2 = 5.0$
$\mu = -2, \sigma^2 = 0.5$
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5

La probabilità

L'area totale sottesa alla curva è pari ad 1

Questa affermazione si può verificare empiricamente:

scelta una variabile continua, questa viene rappresentata con istogrammi, facendo riferimento alla frequenza relativa la cui somma è pari ad 1

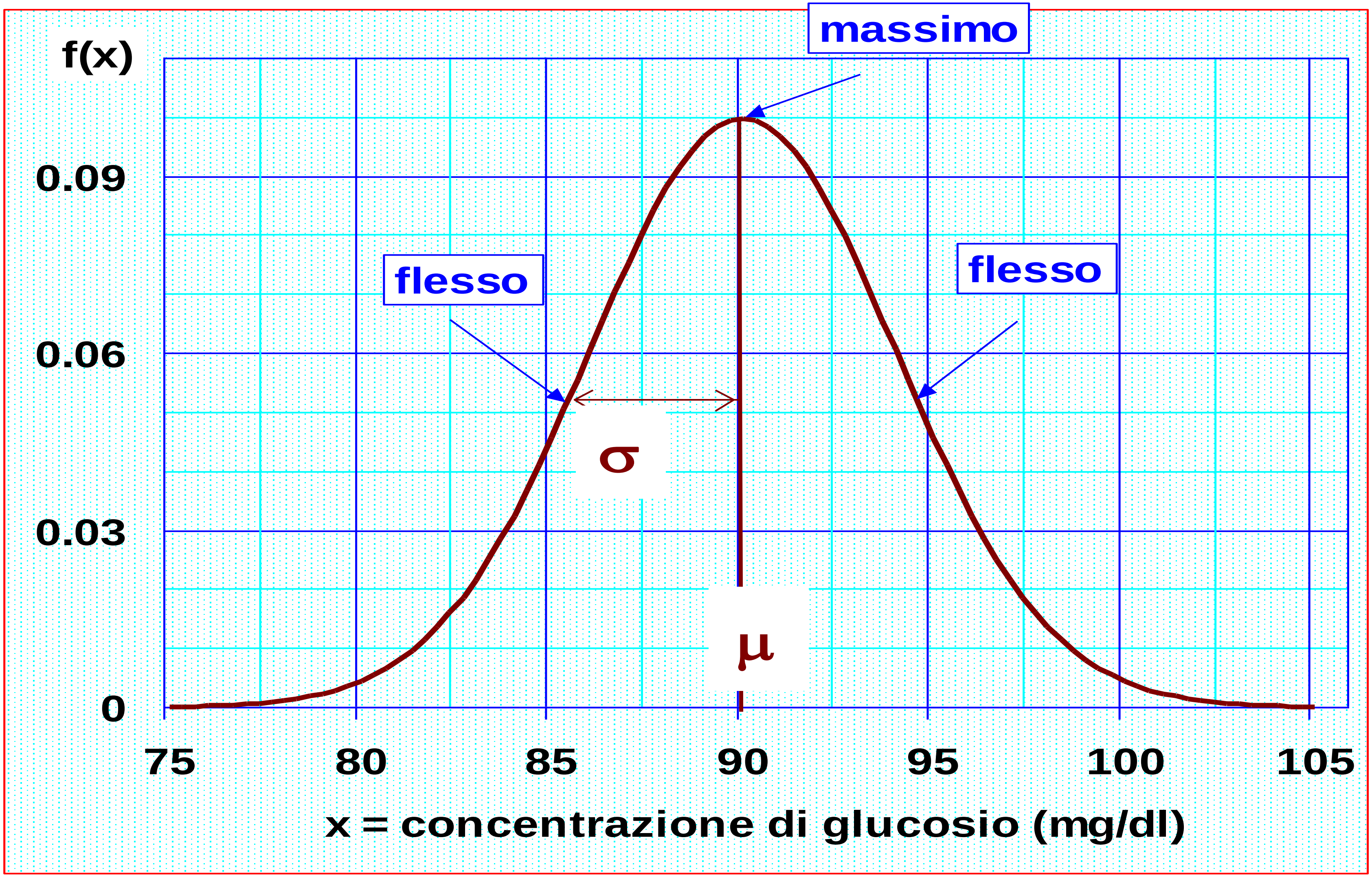
La probabilità

Facendo quindi tendere all'infinito il loro numero, i gradini degli istogrammi si ridurranno sempre più fino a costituire una curva continua, ma conservando sempre l'area totale pari ad 1

La curva ottenuta comprenderà tutti i valori possibili (spazio degli eventi pari al 100% dei risultati), confermando quindi che l'area sottesa alla curva sia pari ad 1 (totale delle probabilità)

La probabilità

La curva normale è quindi una funzione di densità di probabilità di una Variabile Casuale normale, ovvero una funzione la cui area esprime la probabilità che un determinato valore sia compreso entro un qualunque intervallo arbitrario



f(x)
massimo
0.09
0.06
0.03
0
flesso
flesso
σ
μ
75
80
85
90
95
100
105
x = concentrazione di glucosio (mg/dl)

La probabilità

Nota la funzione, l'area (quindi la probabilità) si può ottenere tramite il calcolo dell'integrale definito fra X_1 e X_2 (punti arbitrari) della funzione stessa

Ovviamente l'integrale fra $-\infty$ e $+\infty$ è pari ad 1 (probabilità totale, ovvero probabilità dell'evento certo)

La probabilità

Integrare la funzione, considerata anche la sua complessità, non è certamente agevole, ma le ∞^2 curve normali possono essere ricondotte ad una unica curva, detta Curva normale standardizzata, tramite un semplice cambio di variabile

La distribuzione normale standardizzata

La distribuzione normale è difficilmente trattabile dal punto di vista dei calcoli, a causa dei suoi due parametri, μ e σ^2

Il ricorso alla "distribuzione normale standardizzata" permette invece di individuare facilmente le probabilità relative agli intervalli di valori, utilizzando opportune tavole statistiche.

La standardizzazione è una trasformazione dei dati che consiste nel:

- rendere la media nulla **($\mu = 0$),** dato che ad ogni valore della variabile originaria viene sottratta la media della variabile stessa;
- assumere la deviazione standard σ quale unità di misura **($\sigma = 1$)**

della nuova variabile, dato che ogni valore viene diviso per σ.

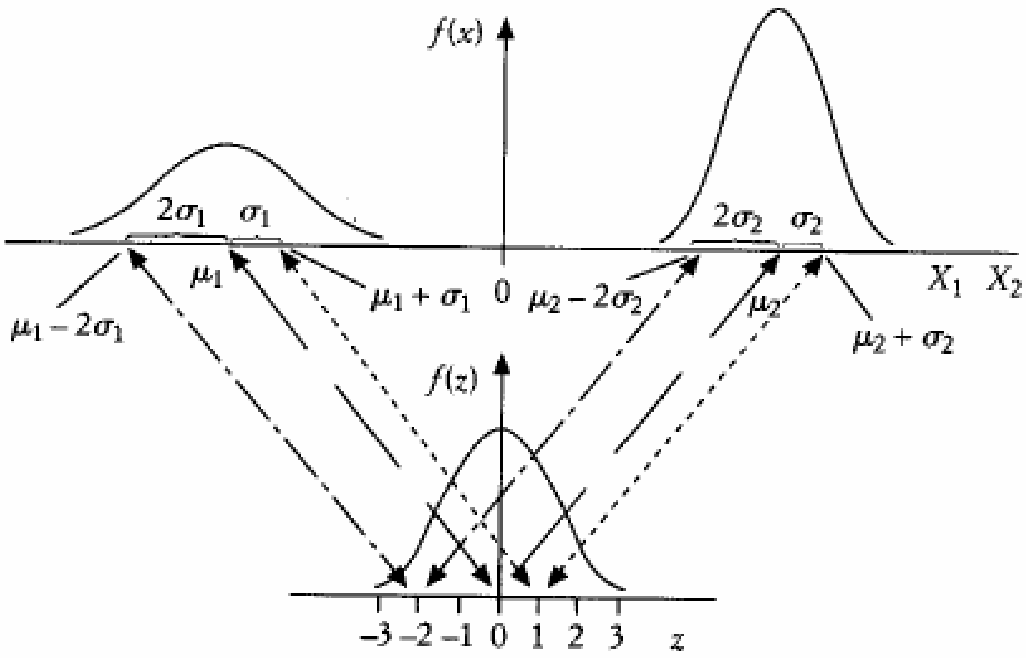
La distribuzione normale standardizzata viene indicata con N(0,1).

La distribuzione normale standardizzata

Si può trasformare una generica funzione gaussiana f(x) con media μ e varianza σ^2, in una **funzione gaussiana standard** $\phi(z)$ con media 0 varianza 1, se si pone :

$$z = \frac{(x - \mu)}{\sigma}$$

LA DISTRIBUZIONE NORMALE 'STANDARDIZZATA'



La v.c. normale

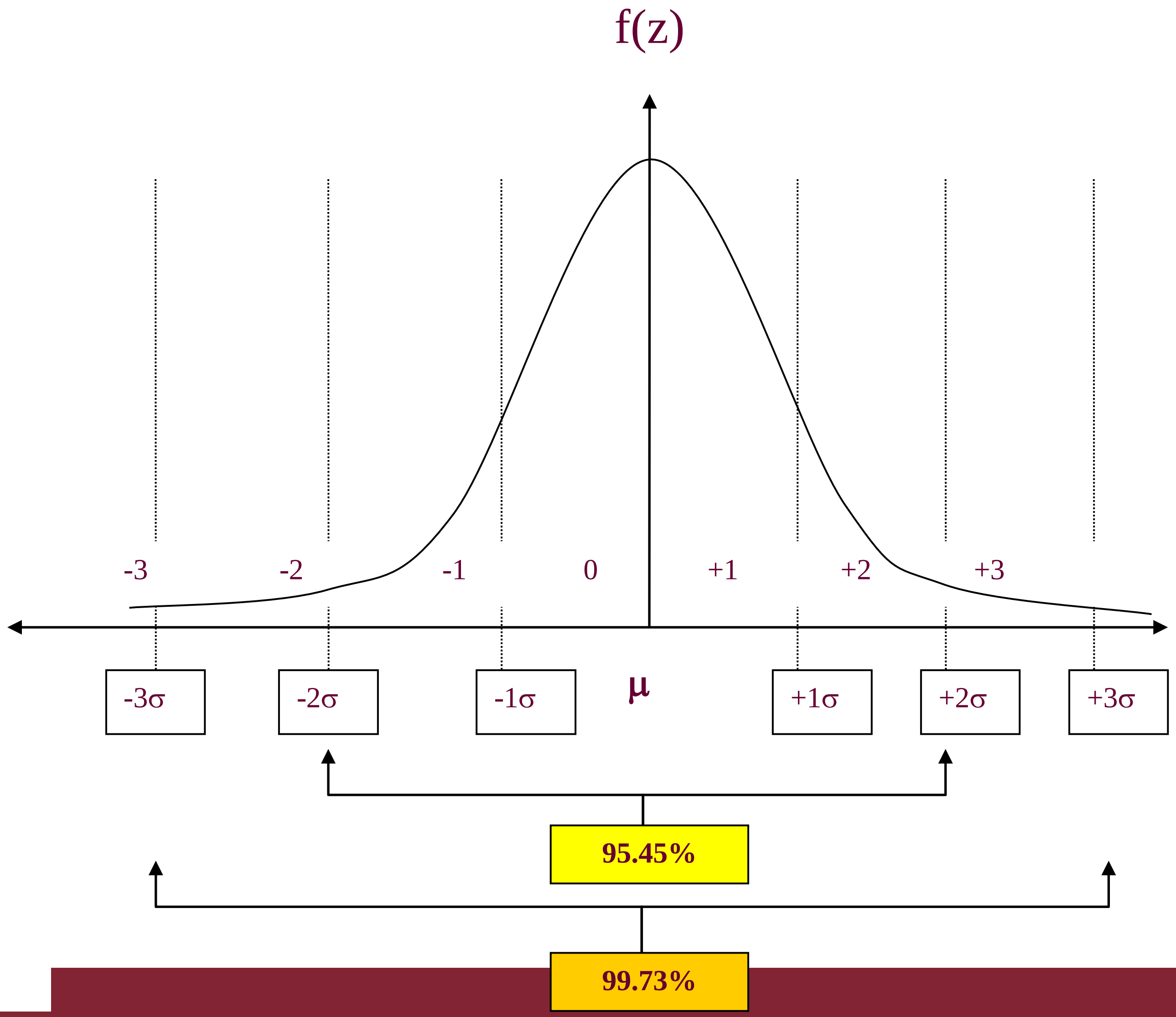
Standardizzata ha MEDIA=0 e DEVIAZIONE STANDARD=1,

per cui è rappresentata da

UNA SOLA CURVA, mentre la distribuzione normale

generale è rappresentata da infinite curve, che variano a seconda dei valori di μ e σ.

LA DISTRIBUZIONE NORMALE ‘STANDARDIZZATA’



Esempio:

Sapendo che la variabile X ha distribuzione normale con $\mu = 3$ e $\sigma = 5$, si standardizzino i seguenti valori:

x_1	x_2	x_3
4	3	0

$$z_1 = \frac{4-3}{5} = 0{,}2 \qquad z_2 = \frac{3-3}{5} = 0 \qquad z_3 = \frac{0-3}{5} = -0{,}6$$

z_1	z_2	z_3
0,2	0	0,6

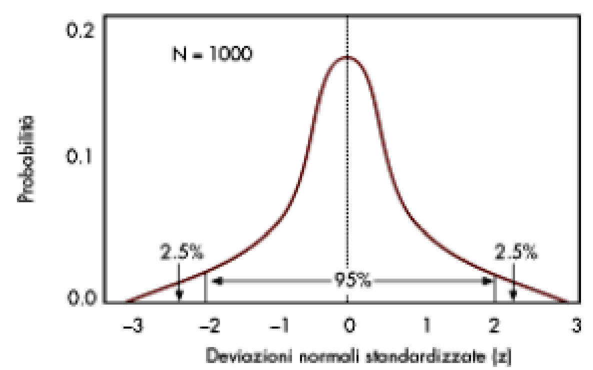
Nel caso particolare di distribuzione normale standardizzatala probabilità di prendere a caso un valore compreso fra -2 e +2 è pari a 0,954, in quanto per tale distribuzione abbiamo $\mu = 0$ e $\sigma = 1$ da cui risulta $\mu - 2\sigma = -2$ e $\mu + 2\sigma = 2$

Esattamente il 95% dei valori centrali di una distribuzione normale standardizzata cadono entro l'intervallo che va -1,96 a +1,96.

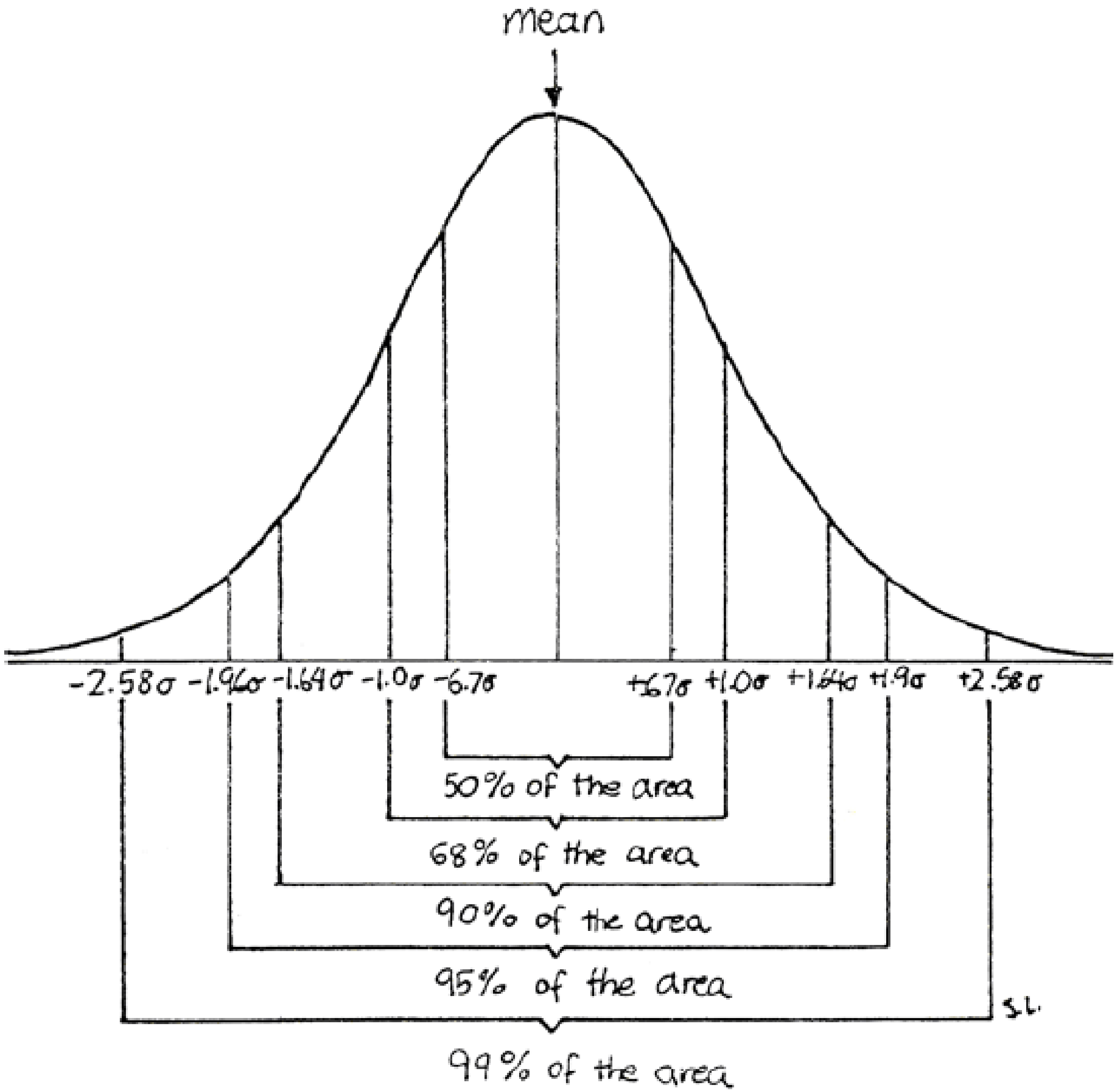
Esattamente il 99% dei valori centrali di una distribuzione normale standardizzata cadono entro l'intervallo che va -2,58 a +2,58.

Se il 95% dei valori cade entro un dato intervallo, significa anche che il 5% dei valori è esterno allo stesso intervallo e, precisamente, data la perfetta simmetria della distribuzione normale, il 2,5% dei valori cadrà al di là del limite superiore dell'intervallo (coda di destra della distribuzione) e il 2,5% cadrà al di sotto del limite inferiore (coda di sinistra della distribuzione).

FIGURA 2.13 • *Deviazioni normali standardizzate*



La distribuzione normale standardizzata



La distribuzione normale standardizzata

Da quanto detto si evince che la Distribuzione Normale Standardizzata (Z) ha media $\mu = 0$ e $\sigma = 1$, con la seguente funzione di densità

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

Quindi attraverso l'operazione di standardizzazione possiamo ricavare i valori di f(x) e F(x) di una qualsiasi distribuzione normale soltanto da 2 tavole: f(z) e F(z).

Vediamo brevemente come si usano le tavole…

Deviata gaussiana Standard: Aree per z>+z* (o per z<-z*)

z= 0.53

Risultato: f(z)= 0.29806

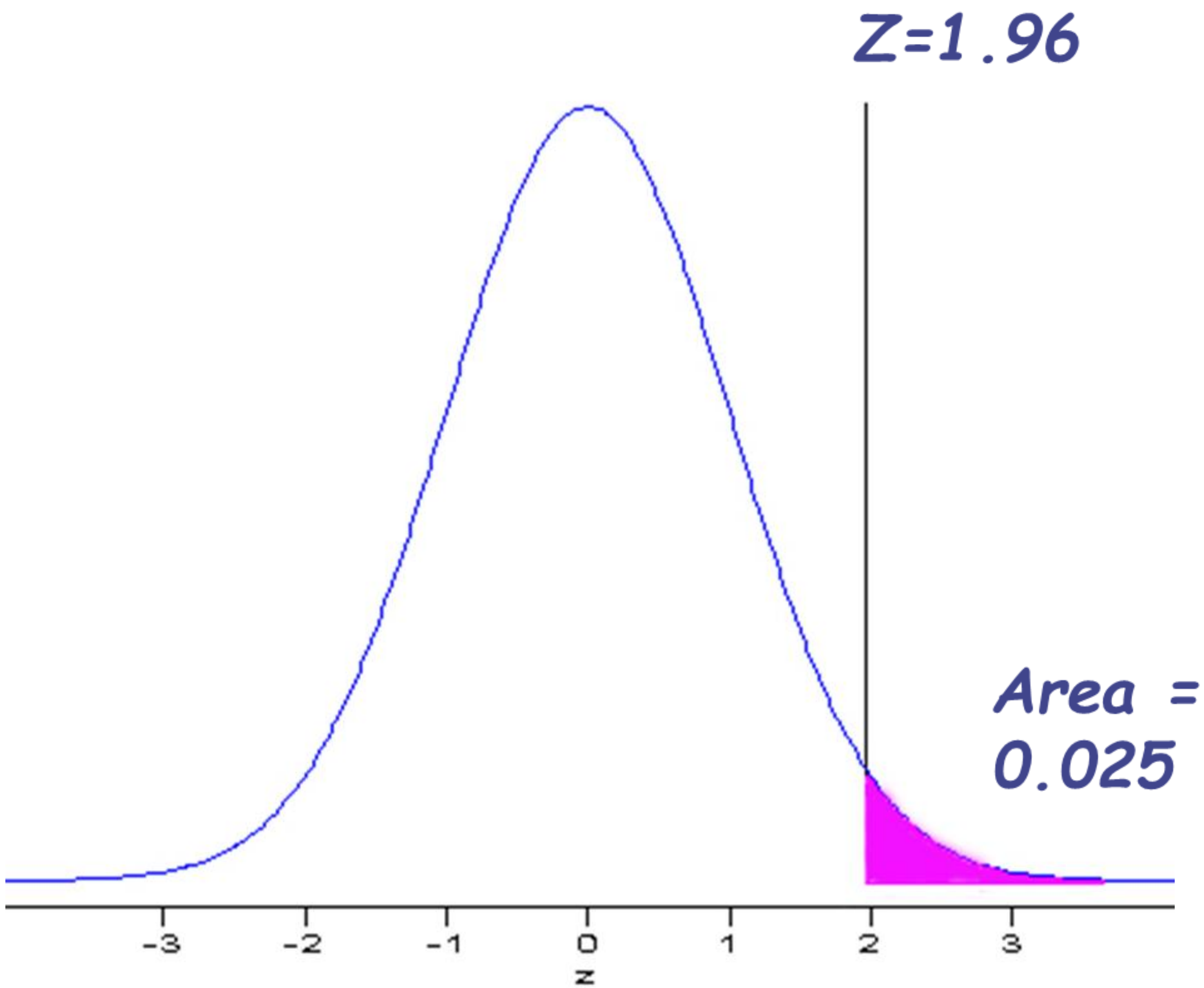
z*	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
	.50000	.49601	.49202	.48803	.48405	.48006	.47608	.47210	.46812	.46414
	.46017	.45620	.45224	.44828	[illegible]	.44038	.43644	.43251	.42858	.42465
	.42074	.41683	.41294	.40905	.40517	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	.38591
	.38209	.37828	.37448	.37070	.36693	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	.34827
	.34458	.34090	.33724	.33360	.32997	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	.31207
	.30854	.30503	.30153	.29806	.29460	.29116	.28774	.28434	.28096	.27760
	.27425	.27093	.26763	.26435	.26109	.25785	.25463	.25143	.24825	.24510
	.24196	.23885	.23576	.23270	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	.21476
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	.20327	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	.18673
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	.16109
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	.13786
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	.12714	.12507	.12302	.12100	.11900	.11702
	.11507	.11314	.11123	.10935	.10749	.10565	.10383	.10204	.10027	.09853
	.09680	.09510	.09342	.09176	.09012	.08851	.08691	.08534	.08379	.08226
	.08076	.07927	.07780	.07636	.07493	.07353	.07215	.07078	.06944	.06811
	.06681	.06552	.06426	.06301	.06178	.06057	.05938	.05821	.05705	.05592
	.05480	.05370	.05262	.05155	.05050	.04947	.04846	.04746	.04648	.04551
	.04457	.04363	.04272	.04182	.04093	.04006	.03920	.03836	.03754	.03673
	.03593	.03515	.03438	.03362	.03288	.03216	.03144	.03074	.03005	.02938
1.9	.02872	.02807	.02743	.02680	.02619	.02559	.02500	.02442	.02385	.02330
2.0	.02275	.02222	.02169	.02118	.02068	.02018	.01970	.01923	.01876	.01831

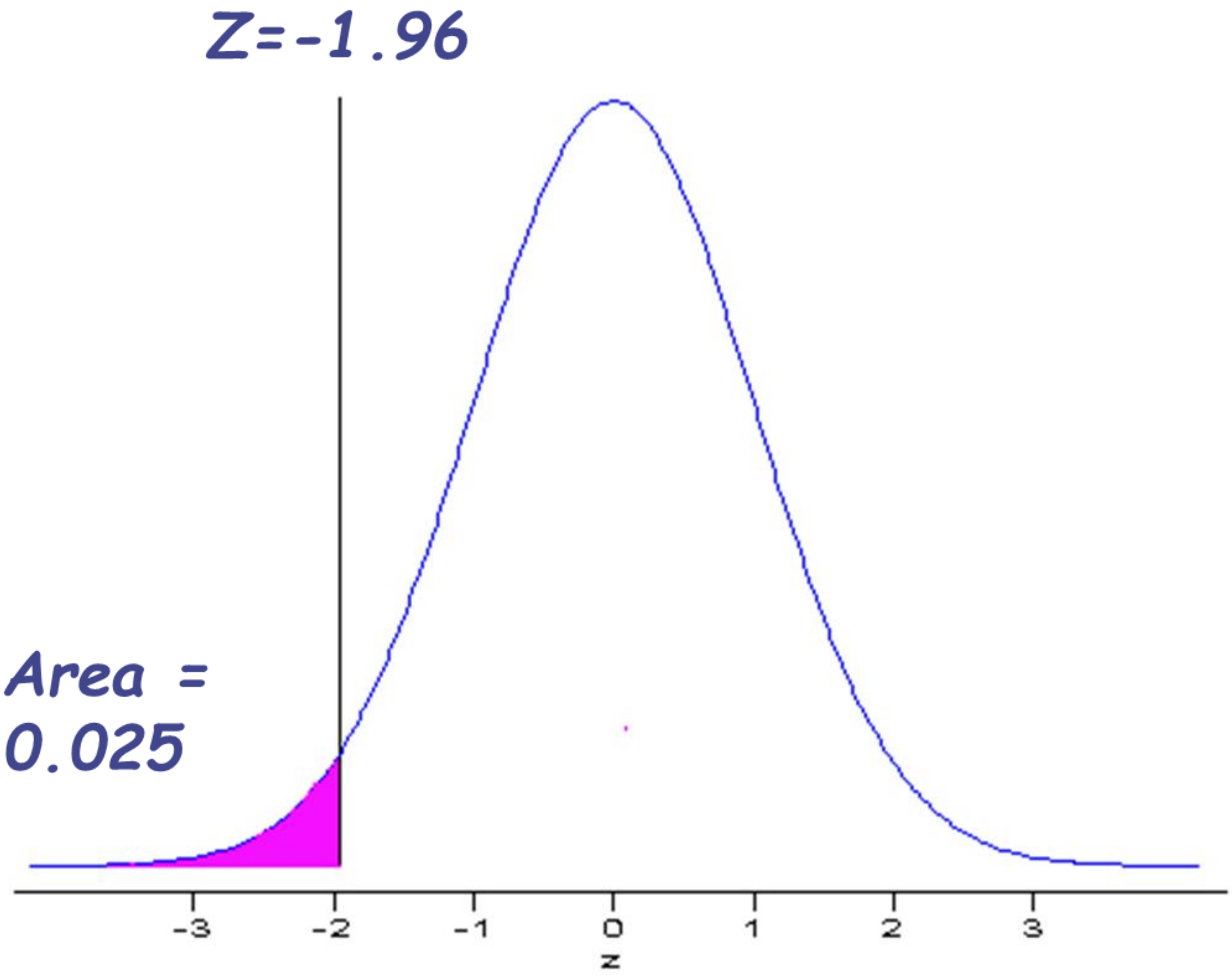
1. Si individua il valore 0,5 sulla prima colonna

2. Si individua il secondo decimale sulla prima riga

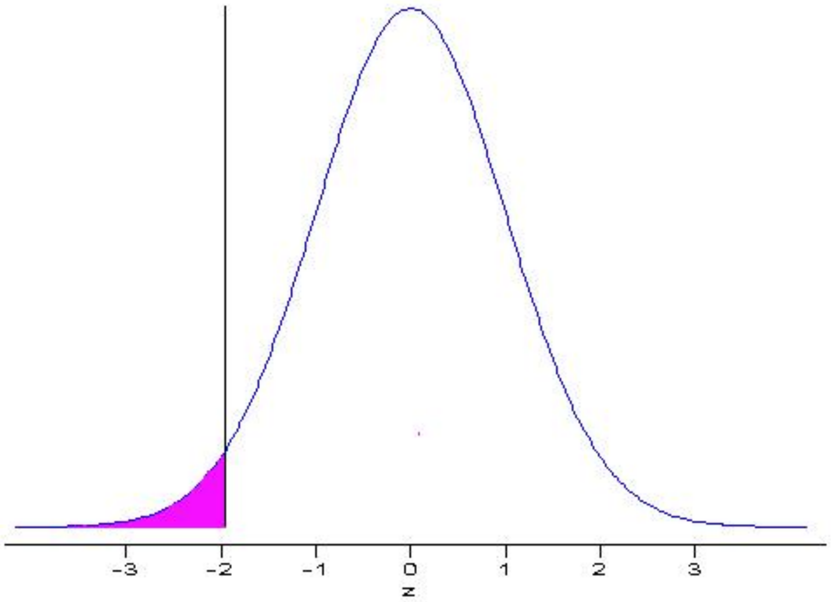
3. All'incrocio della riga e colonna individuate si legge il valore cercato.

Standard Normal



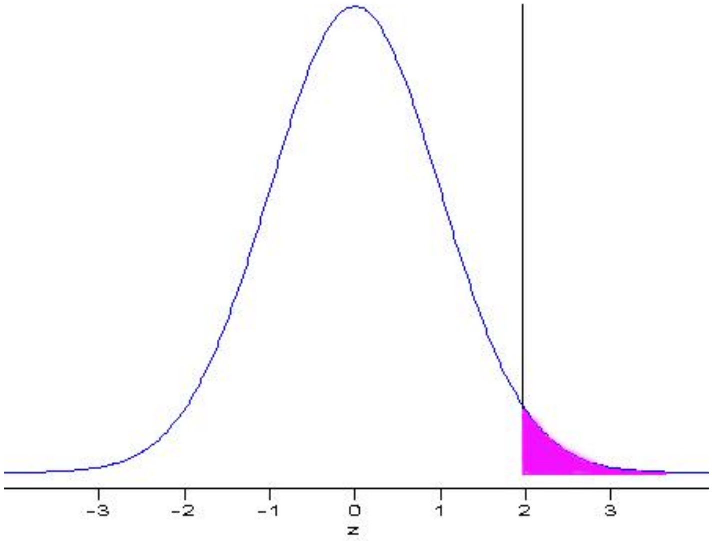

Z=-1.96
Area =
0.025
-3
-2
-1
0
1
2
3
z

Area per la normale



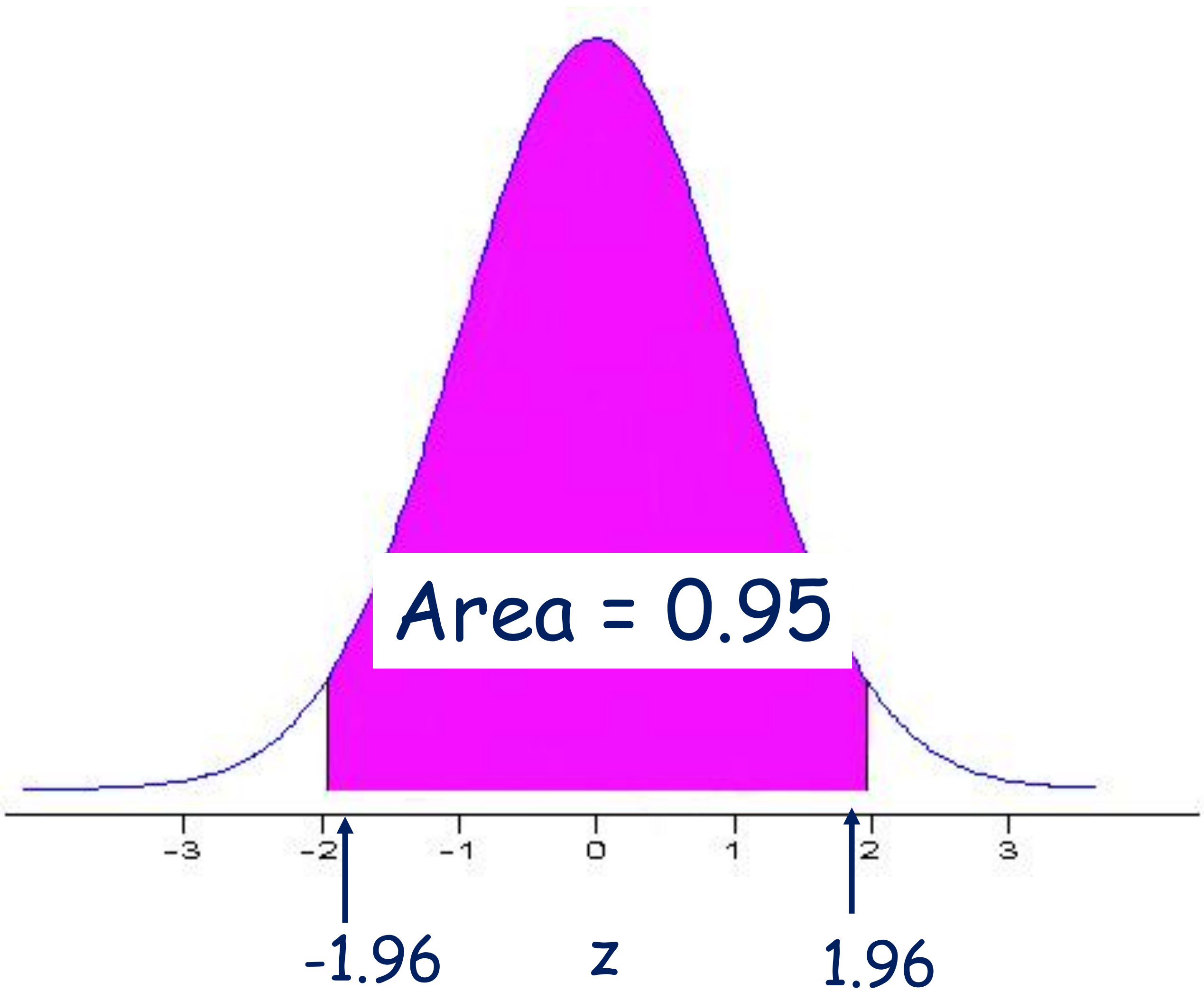
z	area
0	0.5
-1.65	0.049
-1.96	0.025
-2.58	0.005
-3	0.001

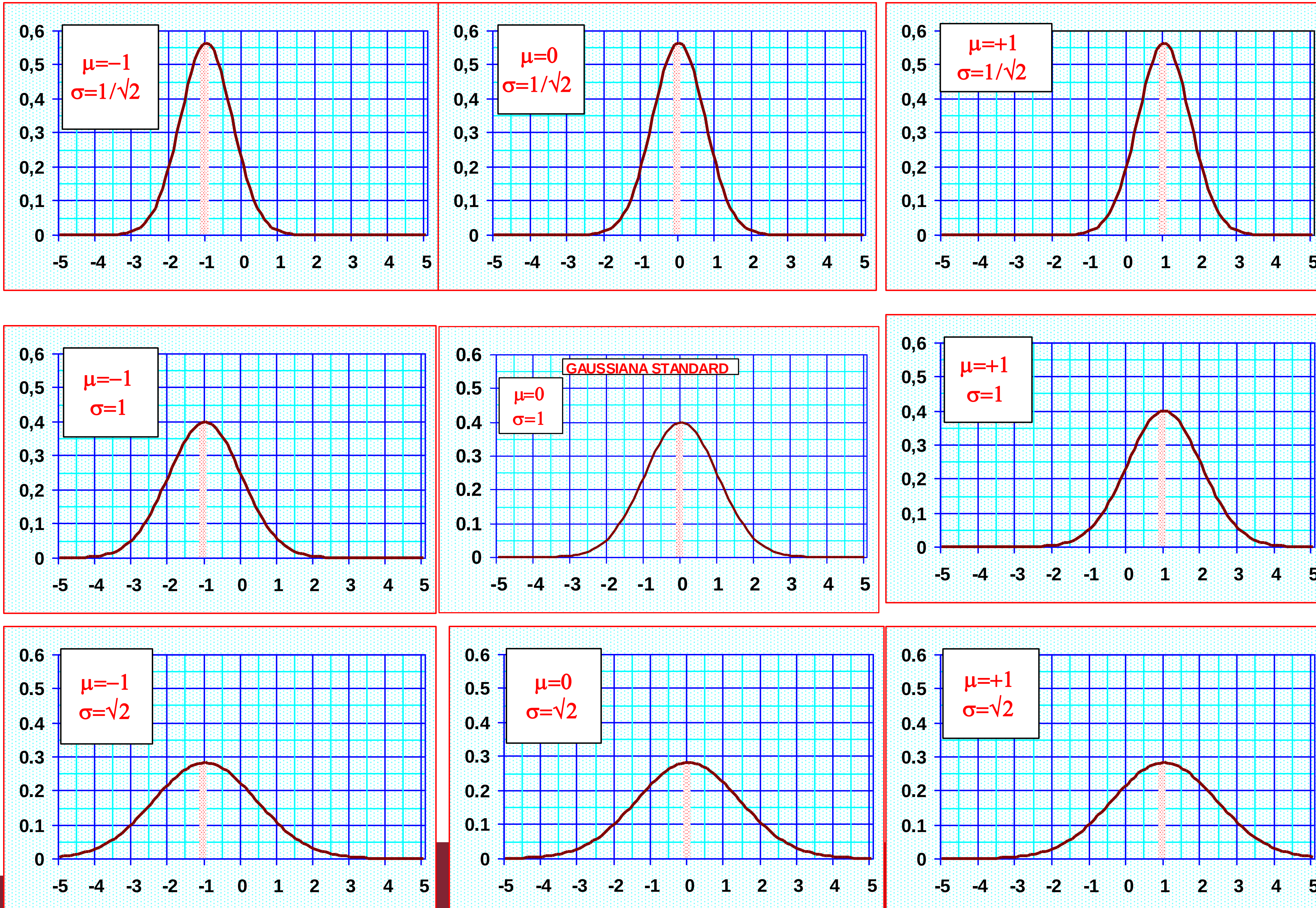
Area per la normale



z	area
0	0.5
1.65	0.049
1.96	0.025
2.58	0.005
3	0.001

Standard Normal





μ=−1
σ=1/√2
μ=0
σ=1/√2
μ=+1
σ=1/√2
μ=−1
σ=1
GAUSSIANA STANDARD
μ=0
σ=1
μ=+1
σ=1
μ=−1
σ=√2
μ=0
σ=√2
μ=+1
σ=√2

Attenzione!

Tutte le gaussiane hanno la stessa identica area, benché quelle con deviazione standard maggiore siano più larghe e più basse di quelle con deviazione standard minore.

Se restringo od allargo la silhouette di un cane ottengo sempre la silhouette di un cane ...




... certamente

Non otterrò la silhouette di un orso

Deviata gaussiana Standard: Aree per z>+z* (o per z<-z*)

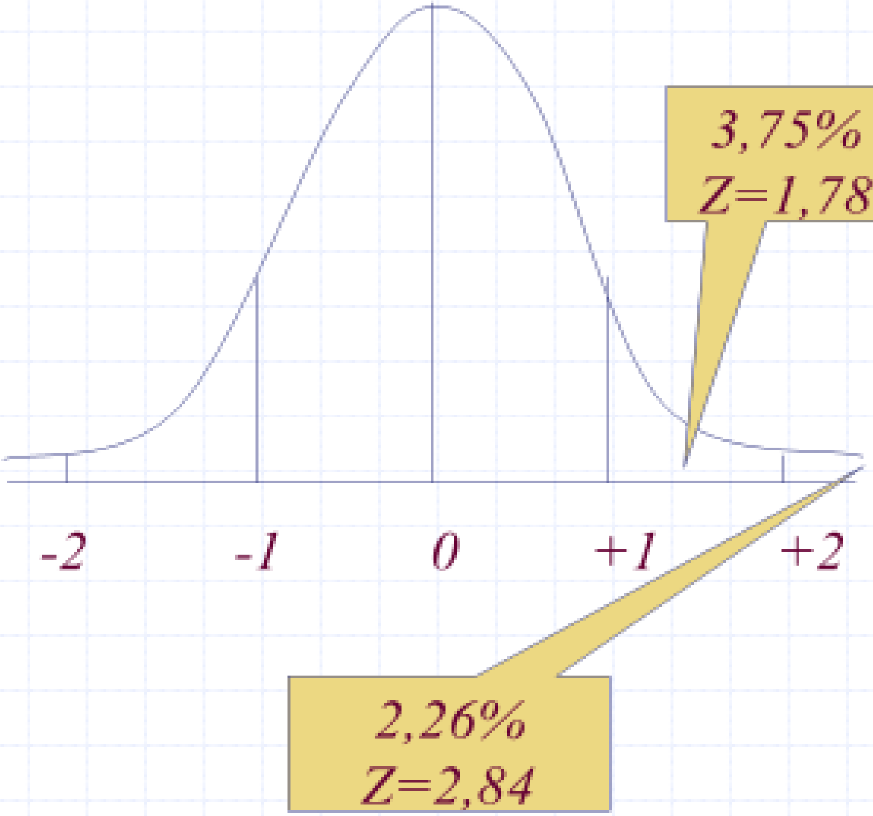
z*	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.50000	.49601	.49202	.48803	.48405	.48006	.47608	.47210	.46812	.46414
0.1	.46017	.45620	.45224	.44828	.44433	.44038	.43644	.43251	.42858	.42465
0.2	.42074	.41683	.41294	.40905	.40517	.40129	.39743	.39358	.38974	.38591
0.3	.38209	.37828	.37448	.37070	.36693	.36317	.35942	.35569	.35197	.34827
0.4	.34458	.34090	.33724	.33360	.32997	.32636	.32276	.31918	.31561	.31207
0.5	.30854	.30503	.30153	.29806	.29460	.29116	.28774	.28434	.28096	.27760
0.6	.27425	.27093	.26763	.26435	.26109	.25785	.25463	.25143	.24825	.24510
0.7	.24196	.23885	.23576	.23270	.22965	.22663	.22363	.22065	.21770	.21476
0.8	.21186	.20897	.20611	.20327	.20045	.19766	.19489	.19215	.18943	.18673
0.9	.18406	.18141	.17879	.17619	.17361	.17106	.16853	.16602	.16354	.16109
1.0	.15866	.15625	.15386	.15151	.14917	.14686	.14457	.14231	.14007	.13786
1.1	.13567	.13350	.13136	.12924	.12714	.12507	.12302	.12100	.11900	.11702
1.2	.11507	.11314	.11123	.10935	.10749	.10565	.10383	.10204	.10027	.09853
1.3	.09680	.09510	.09342	.09176	.09012	.08851	.08691	.08534	.08379	.08226
1.4	.08076	.07927	.07780	.07636	.07493	.07353	.07215	.07078	.06944	.06811
1.5	.06681	.06552	.06426	.06301	.06178	.06057	.05938	.05821	.05705	.05592
1.6	.05480	.05370	.05262	.05155	.05050	.04947	.04846	.04746	.04648	.04551
1.7	.04457	.04363	.04272	.04182	.04093	.04006	.03920	.03836	.03754	.03673
1.8	.03593	.03515	.03438	.03362	.03288	.03216	.03144	.03074	.03005	.02938
1.9	.02872	.02807	.02743	.02680	.02619	.02559	.02500	.02442	.02385	.02330
2.0	.02275	.02222	.02169	.02118	.02068	.02018	.01970	.01923	.01876	.01831

Deviata gaussiana Standard: Aree Per z>+z* (o per z<-z*)

z*	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
	.01786	.01743	.01700	.01659	.01618	.01578	.01539	.01500	.01463	.01426
	.01390	.01355	.01321	.01287	.01255	.01222	.01191	.01160	.01130	.01101
	.01072	.01044	.01017	.00990	.00964	.00939	.00914	.00889	.00866	.00842
	.00820	.00798	.00776	.00755	.00734	.00714	.00695	.00676	.00657	.00639
2.5	.00621	.00604	.00587	.00570	.00554	.00539	.00523	.00508	.00494	.00480
2.6	.00466	.00453	.00440	.00427	.00415	.00402	.00391	.00379	.00368	.00357
2.7	.00347	.00336	.00326	.00317	.00307	.00298	.00289	.00280	.00272	.00264
2.8	.00256	.00248	.00240	.00233	.00226	.00219	.00212	.00205	.00199	.00193
2.9	.00187	.00181	.00175	.00169	.00164	.00159	.00154	.00149	.00144	.00139
3.0	.00135	.00097	.00069	.00048	.00034	.00023	.00016	.00011	.00007	.00005
4.0	.00003	.00002	.00001	.00001	.00001	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000

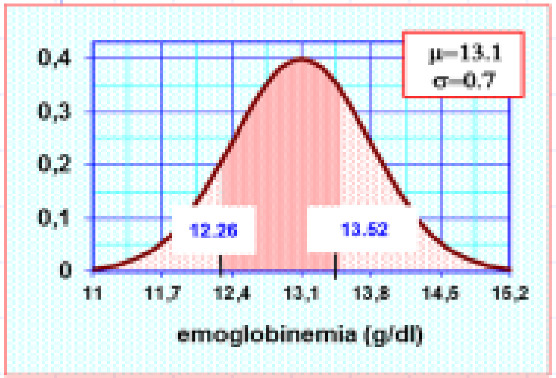
z e la distribuzione normale

Utilizzando la distribuzione normale è possibile calcolare la probabilità che un'osservazione abbia un valore superiore (o inferiore) ad una determinata soglia.



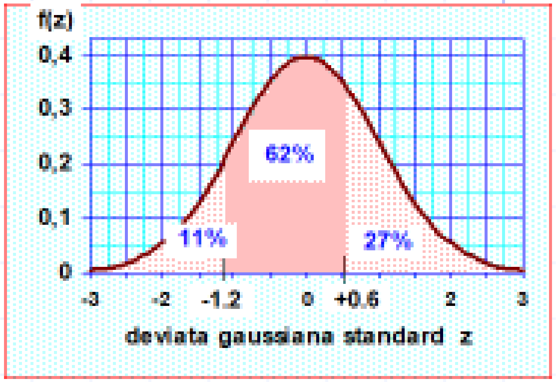
APPLICAZIONE DELLA DEVIATA GAUSSIANA STANDARD

In una popolazione di ragazze di età inclusa tra i 18 e i 25 anni, la concentra-zione di emoglobina nel sangue (x) **approssima** la **distribuzione gaussiana** con media μ=13.1 g/dl e deviazione standard σ=0.7 g/dl. In base a queste sole informazioni possiamo calcolare, ***ad esempio***, quante ragazze hanno emoglobinemia inclusa tra 12.26 e 13.52 g/dl.



$$z_1 = \frac{(12.26-13.10)}{0.7} = -1.2$$

$$z_2 = \frac{(13.52-13.10)}{0.7} = +0.6$$



Distribuzione dell'emoglobina in una popolazione di ragazze di età compresa tra i 18 e i 25 anni.

Nell'11% delle ragazze i valori di Hb ☝ sono minori di 12.26 g/dl, e nel 27% sono maggiori di 13.52 g/dl. Quindi il 62% delle ragazze ha valori di Hb compresi tra 12.26 e 13.52 g/dl.

Esercizi sulla Normale

E’ noto che la variabile altezza si distribuisce, in qualunque popolazione umana, in modo pressocché normale

Si considera la Popolazione italiana di maschi adulti

Si distribuirà secondo una Normale di media μ = 170 cm e SD σ = 11 cm (dati fittizi ma plausibili)

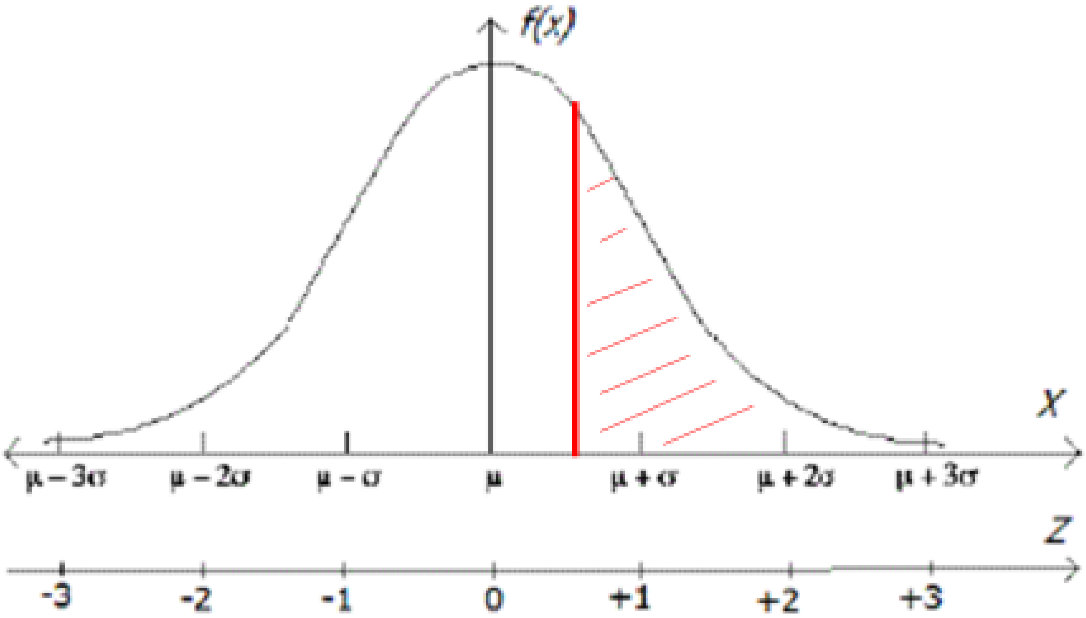
1) Si vuole calcolare la probabilità di estrarre casualmente un individuo (maschio adulto) con altezza superiore a 178 cm

Quindi ci chiediamo $P(x > 178) = ?$

Utilizziamo la deviata standardizzata Z

$$z_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma}$$

$$Z = (178 - 170)/11 = 8/11 = 0.73$$



Dal momento che cerchiamo $P(x > 178)$ la probabilità cercata sarà quella a destra di $Z = 0.73$

La tavola fornisce l'area a destra del valore Z

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	z
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641	0.0
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247	0.1
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859	0.2
0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483	0.3
0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121	0.4
0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776	0.5
0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451	0.6
0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2297	0.2266	0.2236	0.2207	0.2177	0.2148	0.7
0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867	0.8
0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611	0.9
1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379	1.0
1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170	1.1
1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985	1.2
1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823	1.3
1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681	1.4
1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559	1.5
1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455	1.6
1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367	1.7
1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294	1.8
1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233	1.9
2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183	2.0
2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143	2.1
2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110	2.2
2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084	2.3
2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064	2.4
2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048	2.5
2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036	2.6
2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026	2.7
2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019	2.8
2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014	2.9
3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010	3.0
3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007	3.1
3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005	3.2
3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003	3.3
3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002	3.4
3.5	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	3.5
3.6	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	3.6
3.7	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	3.7
3.8	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	3.8

Dalla tavola si ottiene $P = 0.2327$

Quindi

$P(x > 178) = 0.23$

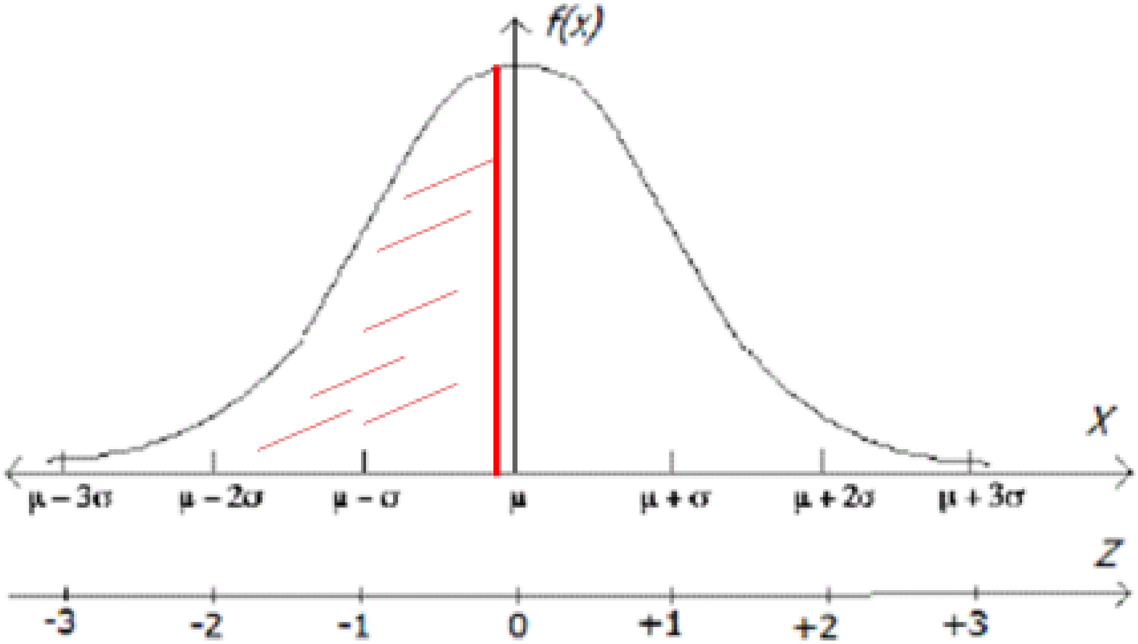
2) Si vuole calcolare la probabilità di estrarre casualmente un individuo con altezza inferiore a 168 cm

Quindi ci chiediamo $P(x < 168) = ?$

Calcoliamo la deviata standardizzata Z

$$z_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma}$$

$Z = (168 - 170)/11 = -2/11 = -0.18$



Cerchiamo $P(x < 168)$ cioé a sinistra di $Z = -0.18$ ma la Tavola non riporta i valori negativi di Z. Occorre perciò fare riferimento ai valori positivi che specularmente forniscono la stessa probabilità

Dalla tavola si ottiene P = 0.4286

Quindi

P(x < 168) = 0.43

Si ricorda che pur con valore negativi di Z l'area (ovvero la probabilità) è sempre positiva

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	z
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641	0.0
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247	0.1
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859	0.2
0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483	0.3
0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121	0.4
0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776	0.5
0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451	0.6
0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2297	0.2266	0.2236	0.2207	0.2177	0.2148	0.7
0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867	0.8
0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611	0.9
1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379	1.0
1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170	1.1
1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985	1.2
1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823	1.3
1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681	1.4
1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559	1.5
1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455	1.6
1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367	1.7
1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294	1.8
1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233	1.9
2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183	2.0
2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143	2.1
2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110	2.2
2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084	2.3
2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064	2.4
2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048	2.5
2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036	2.6
2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026	2.7
2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019	2.8
2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014	2.9
3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010	3.0
3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007	3.1
3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005	3.2
3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003	3.3
3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002	3.4
3.5	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	3.5
3.6	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	3.6
3.7	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	3.7
3.8	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	3.8

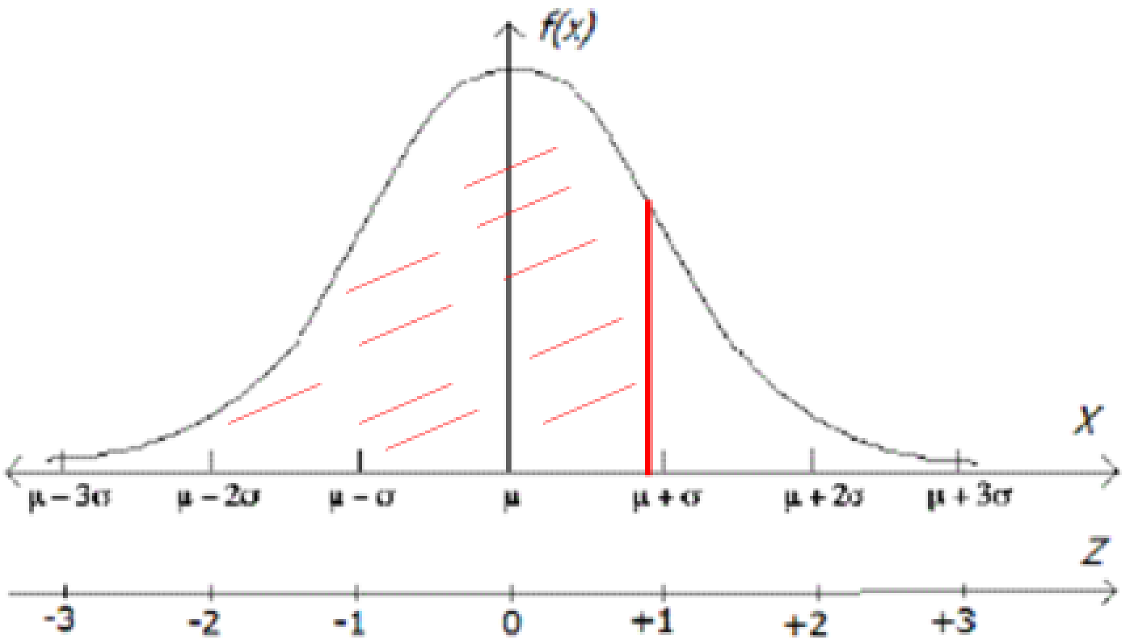
3) Si vuole calcolare la probabilità di estrarre casualmente un individuo con altezza inferiore a 180 cm

Quindi ci chiediamo $P(x < 180) = ?$

Calcoliamo la deviata standardizzata Z

$$z_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma}$$

$Z = (180 - 170)/11 = 10/11 = 0.91$



L'area fornita dalla Tavola è sempre quella a destra di Z, ma a noi interessa quella a sinistra. Occorre perciò calcolare l'area a destra di Z e quindi sottrarla dall'area totale 1

Dalla tavola si ottiene $P = 0.1814$

Quindi

$P(x < 180) = 1 - 0.18$

$P(x < 180) = 0.82$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	z
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641	0.0
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247	0.1
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859	0.2
0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.2707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483	0.3
0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121	0.4
0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776	0.5
0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451	0.6
0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2297	0.2266	0.2236	0.2207	0.2177	0.2148	0.7
0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867	0.8
0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611	0.9
1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379	1.0
1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170	1.1
1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985	1.2
1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823	1.3
1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681	1.4
1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559	1.5
1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455	1.6
1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367	1.7
1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294	1.8
1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233	1.9
2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183	2.0
2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143	2.1
2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110	2.2
2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084	2.3
2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064	2.4
2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048	2.5
2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036	2.6
2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026	2.7
2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019	2.8
2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014	2.9
3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010	3.0
3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007	3.1
3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005	3.2
3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003	3.3
3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002	3.4
3.5	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	3.5
3.6	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	3.6
3.7	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	3.7
3.8	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	3.8

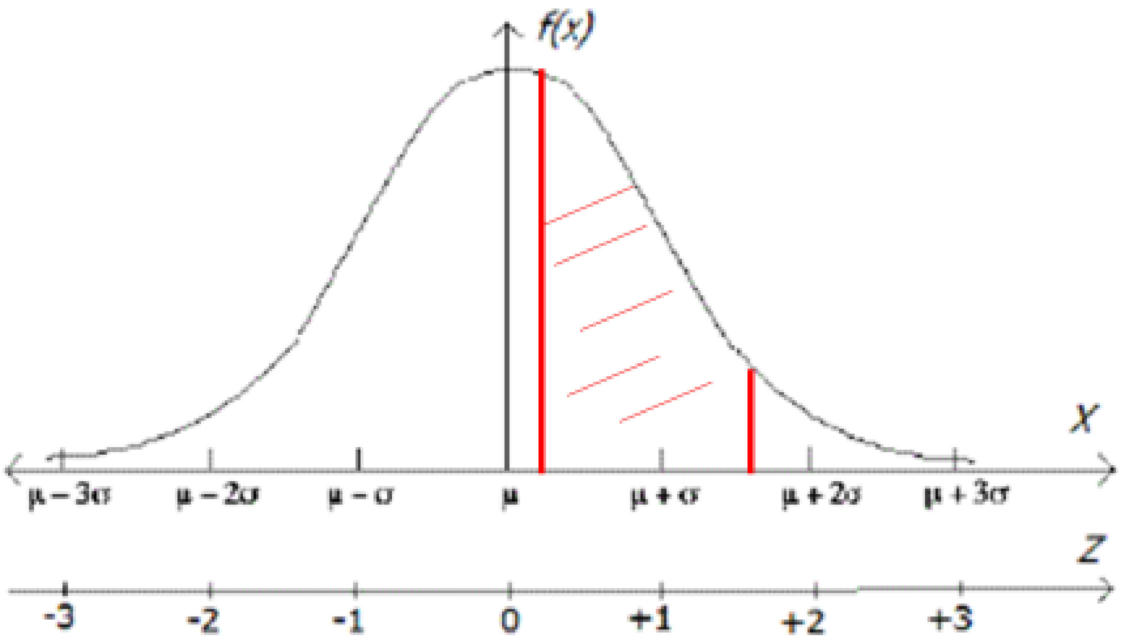
4) Si vuole calcolare la probabilità di estrarre casualmente un individuo con altezza compresa tra 174 e 188 cm

Quindi $P(174 < x < 188) = ?$

Occorre calcolare due punti Z: Z_1 e Z_2

$$Z_1 = (174 - 170)/11 = 4/11 = 0.36$$

$$Z_2 = (188 - 170)/11 = 18/11 = 1.64$$



L'area che ci interessa è quella compresa tra i due punti Z. Occorre perciò calcolare l'area a destra di Z_1 e Z_2 quindi sottrarre la minore dalla maggiore

$P(Z_1) = 0.3594$

$P(Z_2) = 0.0505$

Da cui

$P(174 < x < 188) =$

$= 0.3089 = 0.31$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	z
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641	0.0
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247	0.1
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859	0.2
0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483	0.3
0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121	0.4
0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776	0.5
0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451	0.6
0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2297	0.2266	0.2236	0.2207	0.2177	0.2148	0.7
0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867	0.8
0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611	0.9
1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379	1.0
1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170	1.1
1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985	1.2
1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823	1.3
1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681	1.4
1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559	1.5
1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455	1.6
1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367	1.7
1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294	1.8
1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233	1.9
2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183	2.0
2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143	2.1
2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110	2.2
2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084	2.3
2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064	2.4
2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048	2.5
2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036	2.6
2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026	2.7
2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019	2.8
2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014	2.9
3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010	3.0
3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007	3.1
3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005	3.2
3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003	3.3
3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002	3.4
3.5	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	3.5
3.6	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	3.6
3.7	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	3.7
3.8	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	3.8

Esercizio

Si consideri una popolazione con altezza distribuita in maniera Gaussiana con media (μ) =172,5 cm e deviazione standard (σ) = 6,25 cm.

Qual è la probabilità di incontrare un individuo estratto da tale popolazione e di altezza superiore a cm 190?

$$Z = (190 - 172{,}5) / 6{,}25 = 2{,}8$$

➔ Dalle tavole trovo p= 0,00256, quindi la probabilità di trovare un soggetto più alto di 190cm è dello 0,2%

Qual è la probabilità di incontrare un individuo estratto da tale popolazione con un'altezza compresa tra cm 165 e175?

$$Z_1 = (165 - 172{,}5) / 6{,}25 = -1.2$$

$$Z_2 = (175 - 172{,}5) / 6{,}25 = 0.4$$

$$P(Z_1)=0.115$$

$$P(Z_2)=0.345$$

$$P(165 \leq X \leq 175) = P(-1.2 \leq Z \leq 0.4) =$$

$$1- [0.115+0.345]=0.54$$

Qual è quel valore di altezza che delimita il 5% superiore della distribuzione?

$$p=0.05 \rightarrow z=1.645$$

$$z=(x-172.5)/6.25 \rightarrow 1.645=(x-172.5)/6.25$$

$$x = 172.5+(6.25*1.645)$$

$$x = 182.78$$

Circa il 5% della popolazione in studio ha un'altezza superiore di 182.78 cm

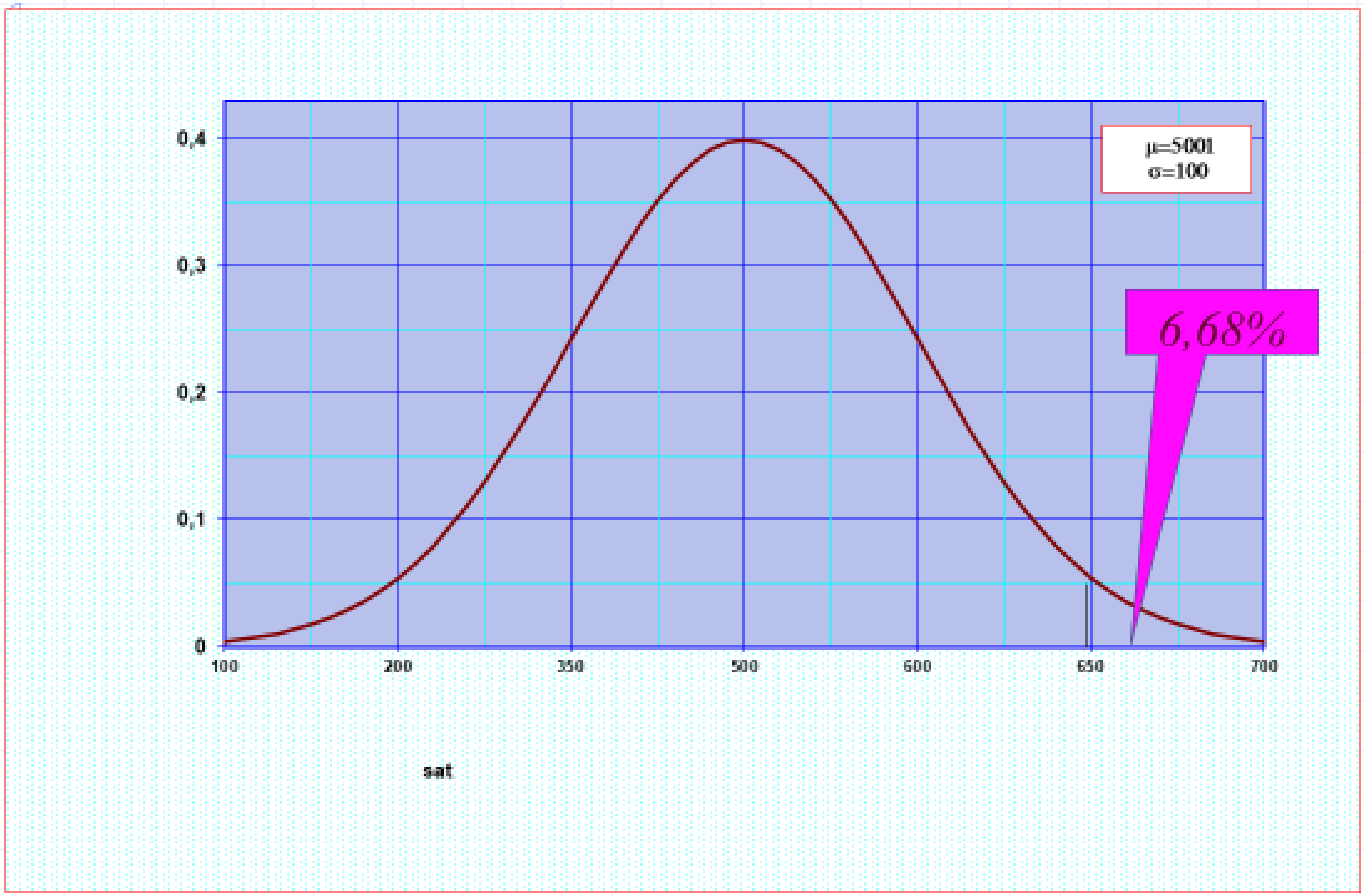
Esempio SAT

- Scholastic *Aptitude Test*
- *Risultati normalmente distribuiti*
- *M=500, s.q.m.=100*

- Qual è la probabilità di selezionare un individuo con X>650

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{650 - 500}{100} = \frac{150}{100} = 1{,}5$$

$$p(X > 650) = p(z > 1{,}5) = 0{,}0668$$


μ=5001
σ=100
6,68%
0,4
0,3
0,2
0,1
0
100
200
350
500
600
650
700
sat

Il problema della standardizzazione dei dati
z-scores

Analisi di voti di esame da due professori diversi

- Il voto dello studente: 28
- Prof. “severo”
  - Media: 25
  - Dev. St.: 4,2
- Prof. “generoso”
  - Media: 27
  - Dev. St. 2,8

La standardizzazione dei dati /2

- Severo
  - Voto: 28
  - Media: 25
  - Voto-Media: 3
  - Dev. St. 4,2

.

$$z = \frac{(X - \overline{X})}{\sigma} = 0{,}71$$

A1= 24,19%

- Generoso
  - Voto: 28
  - Media: 27
  - Voto-Media 1
  - Dev. St. 2,8

$$z = \frac{(X - \overline{X})}{\sigma} = 0{,}36$$

A2= 35,94%

Un’indagine epidemiologica condotta su 10.000 maschi da 40 a 60 anni ha evidenziato che la distribuzione della pressione arteriosa diastolica (PAD) ha media=84 mmg e varianza=16 mmg.

Determinare:

1. quanti soggetti hanno pad compresa tra 86 e 90?
2. Superiore a 91?
3. Inferiore a 90?

$$z1 = \frac{(86-84)}{4} = 0,5$$

$$z2 = \frac{(90-84)}{4} = 1,5$$

A1= 0.30854

A2= 0.06681

A= A1-A2= 0,24173 = 24%

La funzione di Gauss

1) qual è l'area sottesa alla curva gaussiana fra z=0 e z=1.43 ?

1)	$P(0 \leq z \leq 1.43)$	=	?
2)	$P(z \geq 0.55)$	=	?
3)	$P(z \geq -0.55)$	=	?
4)	$P(z < -2.33)$	=	?
5)	$P(\|z\| < 1.28)$	=	?
6)	$P(z < 2.33)$	=	?
7)	$P(-1.96 \leq z \leq 1.96)$	=	?
8)	$P(-2.58 \leq z \leq 2.58)$	=	?
9)	$P(-1.65 \leq z \leq 1.65)$	=	?
10)	$P(z = .74)$.	=	?

La funzione di Gauss

1) qual è la deviata gaussiana z_1 corrispondente all'area P(...) ?

1)	$P(z \leq z_1)$	=	0.0055	z_1=?
2)	$P(-2.67 \leq z \leq z_1)$	=	0.9718	z_1=?
3)	$P(z > z_1)$	=	0.0384	z_1=?
4)	$P(z_1 \leq z \leq 1.28)$	=	0.1117	z_1=?
5)	$P(-z_1 \leq z \leq z_1)$	=	0.8132	z_1=?
6)	$P(z > z_1)$	=	0.0055	z_1=?
7)	$P(-\infty \leq z \leq z_1)$	=	0.9999	z_1=?
8)	$P(\lvert z\rvert > z_1)$	=	2/3	z_1=?
9)	$P(-\infty \leq z \leq z_1)$	=	1/3	z_1=?
10)	$P(\lvert z\rvert \leq z_1)$	=	0.95	z_1=?

La funzione di Gauss

1) qual è l'area sottesa alla curva gaussiana fra z=0 e z=1.43 ?

1)	$P(0 \le z \le 1.43)$	=	0.42364149
2)	$P(z \ge 0.55)$	=	0.29115969
3)	$P(z \ge -0.55)$	=	0.70884031
4)	$P(z < -2.33)$	=	0.00990308
5)	$P(\|z\| < 1.28)$	=	0.799454860
6)	$P(z < 2.33)$	=	0.99009692
7)	$P(-1.96 \le z \le 1.96)$	=	0.95
8)	$P(-2.58 \le z \le 2.58)$	=	0.99
9)	$P(-1.648 \le z \le 1.648)$	=	0.90
10)	$P(z = 0.74)$.	=	0.0

La funzione di Gauss

1) qual è la deviata gaussiana z_1 corrispondente all'area P(...) ?

1)	$P(z \leq z_1)$	=	0.0055	$z_1=-2.5426988$
2)	$P(-2.17 \leq z \leq z_1)$	=	0.975	$z_1=2.3264763$
3)	$P(z > z_1)$	=	0.0384	$z_1=1.7695628$
4)	$P(z_1 \leq z \leq 1.28)$	=	0.1117	$z_1=.7995956$
5)	$P(-z_1 \leq z \leq z_1)$	=	0.8132	$z_1=1.3201049$
6)	$P(z > z_1)$	=	0.0055	$z_1=2.5426988$
7)	$P(-\infty \leq z \leq z_1)$	=	0.9999	$z_1=3.7190165$
8)	$P(\lvert z\rvert > z_1)$	=	2/3	$z_1=-.4307273$
9)	$P(-\infty \leq z \leq z_1)$	=	1/3	$z_1=-.4307273$
10)	$P(\lvert z\rvert \leq z_1)$	=	0.95	$z_1=1.96$