VARIABILE CASUALE

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

annarita.vestri@uniroma1.it

DEFINIZIONE DI VARIABILE CASUALE

Se un fenomeno è governato dal caso alle possibili manifestazioni del fenomeno stesso sono associabili un valore numerico ed un peso, che esprimono, in termini quantitativi, l'intensità e la relativa capacità di verificarsi.

Una variabile casuale è una variabile che assume determinati valori in modo casuale (non deterministico).

VARIABILE CASUALE

Esempi

Misurazione della pressione arteriosa

l’esito di una estrazione del Lotto;

il risultato di una partita di calcio;

il voto di un esame;

la durata della vita di una persona;

il numero di incidenti stradali in un determinato periodo….

DEFINIZIONE DI VARIABILE CASUALE

Se ai possibili esiti che rappresentano l'esaustiva descrizione del fenomeno viene associata la sequenza numerica, x1,x2,…,xn e come peso la rispettiva probabilità di verificarsi P(x1),P(x2),…P(xn) $\longrightarrow$

il fenomeno prende il nome di variabile casuale (v.c.)

DEFINIZIONE DI VARIABILE CASUALE

La v.c. è definita dall’insieme di coppie di valori:

[x1,P(x1)] [x2,P(x2)]   [xn,P(xn)]

I primi elementi sono le possibili determinazioni della variabile, i secondi sono le probabilità associate che descrivono numericamente il fenomeno aleatorio

Una variabile casuale o aleatoria è una variabile che può assumere determinati valori in corrispondenza al verificarsi di eventi aleatori;

Dato che ciascuno dei valori xi della v.c.ha una probabilità di presentarsi, ci sarà anche una funzione p(x)= P[X=x] detta distribuzione di probabilità della v.c.X;

DEFINIZIONE DI VARIABILE CASUALE

Si definisce discreta una v.c. che in un intervallo di variazione [a,b] assume un numero finito di valori

Continua se nello stesso intervallo assume un numero infinito di valori

In generale le probabilità associate ad una v.c. X si ottengono applicando opportune funzioni matematiche

Variabile casuale discreta

La probabilità che la variabile X assuma uno specifico valore xi, è definita dalla sua funzione di probabilità

$f(x) = P(X=x)$ i valori di $x \in$ all'intervallo di definizione di X

f(x) soddisfa:

$f(x) \geq 0 \qquad x = a, \ldots, b$

$\sum f(x) = 1$

La distribuzione di probabilità di una v.c. può essere rappresentata graficamente o con una tabella

Es.v.c. discreta

Sia X = numero degli esiti C di tre lanci consecutivi di una moneta.

I possibili risultati sono: 0,1,2,3.

A tali valori sono associabili le rispettive probabilità.

Se la moneta non è truccata si avranno $2^3 = 8$ risultati possibili dati dalle $D^r_{2,3}$ disposizioni con ripetizione di 2 elementi di classe 3.

I possibili esiti E_i ($i=1,\ldots,8$) sono tutti ugualmente probabili $P(E_i)=1/8$ da cui sommando gli eventi elementari si ottengono le probabilità associate alla v.c. X = 0,1,2,3.

Es.v.c. discreta

1	2	3	x	P(X=x)
T	T	T	0	1/8
T	T	C	1	1/8
T	C	T	1	1/8
C	T	T	1	1/8
T	C	C	2	1/8
C	T	C	2	1/8
C	C	T	2	1/8
C	C	C	3	1/8

Es.v.c. discreta

Variabile casuale discreta

Consideriamo il lancio di due monete.

Sia X la variabile casuale che indica il numero di volte che è uscita testa.

Lo spazio campione è:

$\Omega = \{TT, TC, CT, CC\}$

Per ciascun elemento dello spazio campione avremo una trasformazione mediante la X:

$X(TT) = 2$; $X(TC) = 1$; $X(CT) = 1$; $X(CC) = 0$

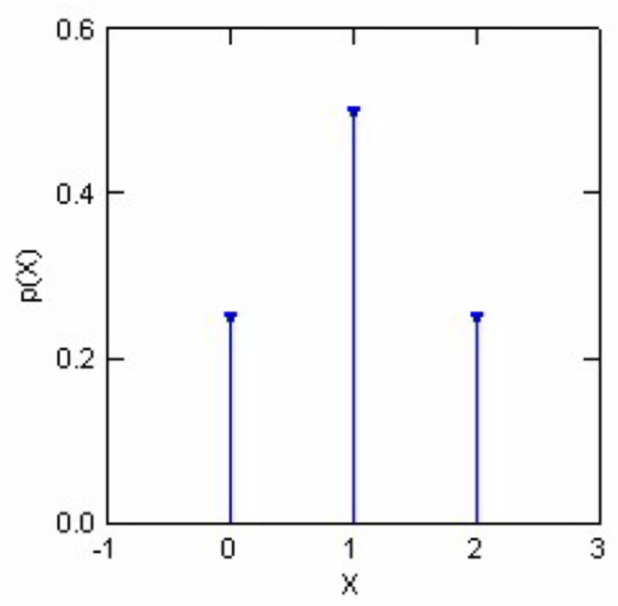
conseguentemente l'insieme immagine di X diventa:

$X(\Omega) = \{2, 1, 0\}$

Variabile casuale discreta

Dal momento che ciascun elemento di questo insieme ha una probabilità di avverarsi possiamo costruire una distribuzione di probabilità

X	**P(x)**
0	1/4
1	2/4
2	1/4



La *funzione di ripartizione $F(x)$*, è una funzione che associa a ciascun valore definito x_0 la probabilità che la v.c. assuma un valore non superiore a x_0 stesso; formalmente :

$$F(x_0) = P[X \leq x_0]$$

$F(x)$ gode delle seguenti proprietà:

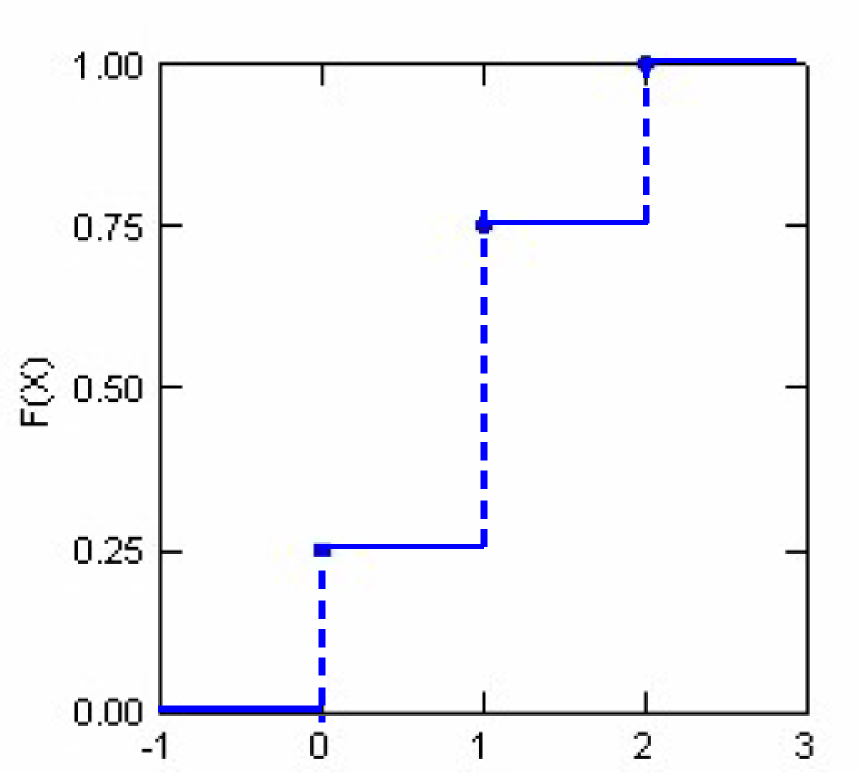
$$1.\ F(-\infty) = P[X \leq -\infty] = 0$$

$$2.\ F(+\infty) = P[X \leq +\infty] = 1$$

Funzione di ripartizione

x	p(X)	F(X)
0	0,25	0,25
1	0,5	0,75
2	0,25	1

Graficamente la *funzione di ripartizione* *F(x)*, è una funzione monotòna non decrescente che si compone di una serie di gradini; il suo valore minimo è 0, il massimo è 1 :



Variabile casuale continua

Può assumere infiniti valori nell'intervallo di definizione [a,b] e quindi la prob P(x) che la v.c. assuma uno specifico valore x è nulla, anche se l'evento non è impossibile.

Si dovrà definire la prob rispetto ad un intervallo di valori dx infinitesimo.

Siano x e x+dx i limiti di questo intervallo

Si assume $P(x) \approx f(x)dx$

Variabile casuale continua

ATTENZIONE

Se la v.c. X è *continua* non ha più senso la definizione di funzione di probabilità data per il caso discreto.

infatti:

$$P[X = x_i] = 0 \quad \forall x \in [a,b]$$

In questo caso non possiamo più calcolare la probabilità in un punto ma solo su un determinato intervallo di valori della X, intervallo definito tra due estremi $[a,b]$.

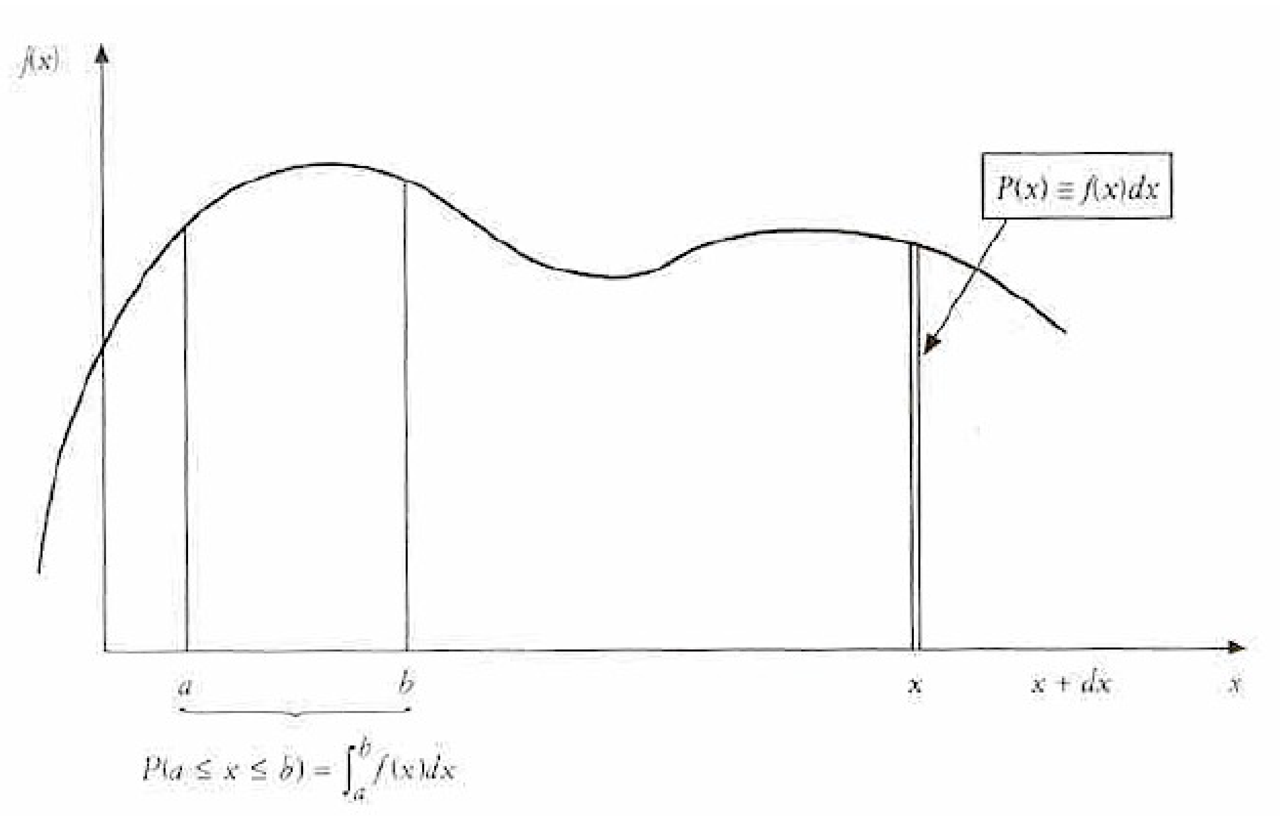
Non si potrà più parlare di funzione di probabilità ma di *funzione di densità* di probabilità.

Tale funzione $f(x)$ è una funzione di densità se soddisfa le seguenti condizioni:

1. $f(x) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Variabile casuale continua

Geometricamente la probabilità P(x) è un'area.



Variabile casuale continua

La f(x) soddisfa:

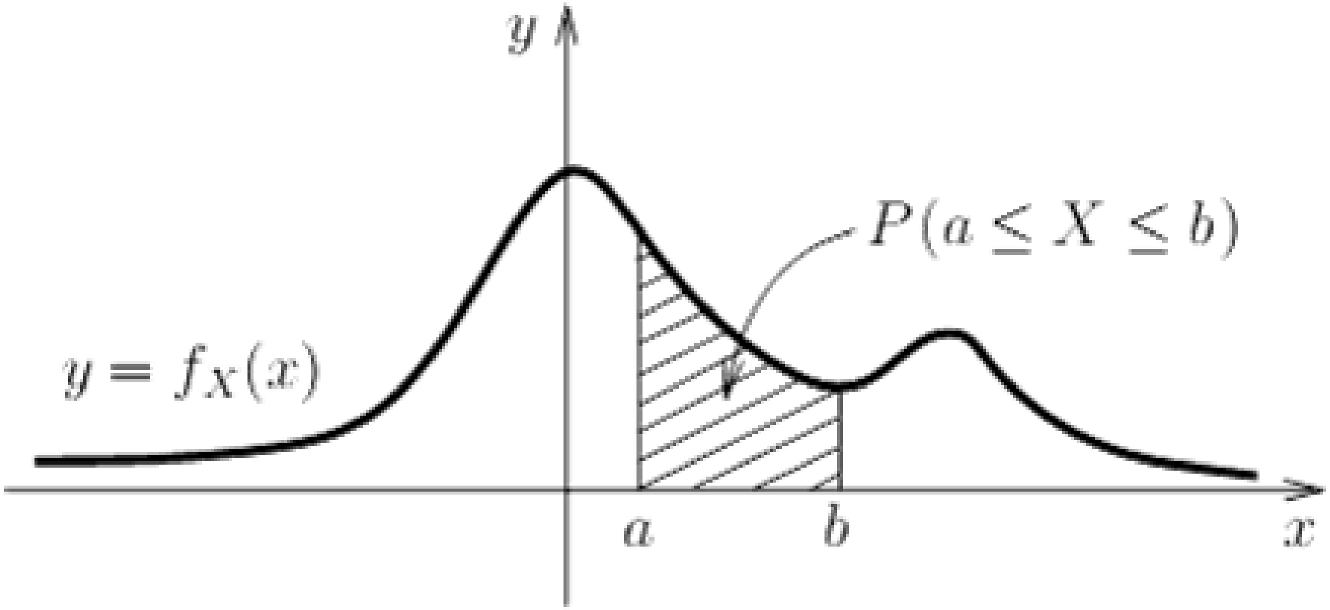
$f(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in [a,b]$

$\int f(x)dx = 1$

Geometricamente la p(x) è data dall'area sottesa dalla curva f(x)

Variabile casuale continua

La probabilità che una variabile aleatoria continua X assume valori in un intervallo reale (a,b) è data dall'area sottesa al grafico della funzione di densità.



La *funzione di ripartizione F(x)*, è una funzione che associa a ciascun valore definito x la probabilità che la v.c. assuma un valore non superiore a x stesso; formalmente :

$$F(x) = P[X \leq x]$$

$F(x)$ si esprime anche come:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$