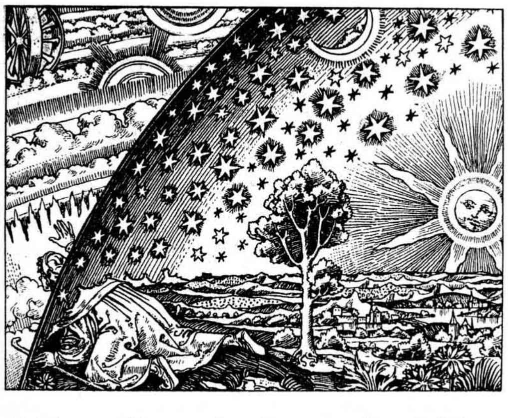
Riccardo Migliari

La prospettiva e l'infinito

Le curve «infinitamente larghe» e le superfici «infinite in due dimensioni» sono solo espressioni abbreviate per dire che devono essere escluse soglie superiori fisse dell'estensione. Se questo è chiaro, si può far uso del modo di espressione noto, comodo e in uso tra i matematici, ma sarebbe bene che il suo senso fosse chiarito anche nei libri di testo della geometria. (Felix Kaufmann[1])



Debbo confessare che, dopo vent'anni di insegnamento, le lezioni che coinvolgono l'idea dei punti all'infinito per me costituiscono ancora un problema. Perché mai? Non posso affrontare quest'argomento senza sentire nel profondo della mia coscienza risuonare una voce che dice: qui c'è qualcosa di oscuro. Io ripeto ai miei studenti che non esistono concetti difficili, ma solo concetti non chiari: ebbene il concetto di punto all'infinito è, a mio avviso, uno di questi ultimi, e cercherò di spiegare perché. Lo farò anche, diciamo così, per pagare un vecchio debito: un giorno di molti anni fa, alla fine della lezione, Orseolo Fasolo si attardava nella guardiola del portiere, come suo solito, per riprender fiato e chiacchierare un po'; e così, di punto in bianco, mi disse che, secondo lui, la prospettiva poteva farsi benissimo senza i punti all'infinito. Io non tanto ero incredulo, quanto dispiaciuto all'idea di rinunciare a un concetto che allora mi appariva così intrigante e che, diciamo la verità, mi dava l'ebbrezza di uno sconfinamento nella metafisica. Oggi credo di aver capito che cosa il vecchio professore avesse in mente quella sera e voglio, perciò, intervenire nella conversazione, così come faceva lui rivolgendosi ai maestri del passato[2]. Ma quando si parlava con Fasolo, bisognava aver cura di usare termini assolutamente evidenti, senza dare nulla per scontato, senza chiudere alcun passaggio in una forma implicita, nemmeno quello più evidente; perciò riprenderò la questione dal principio, anche a costo di qualche banalità.

Indagine su un personaggio ignoto

Consideriamo una retta *r*, un centro di proiezione *O'* e un piano di quadro π' (fig. 2), o, meglio, consideriamo un'asta di legno *r*, una macchina fotografica *O'* e una pellicola fotografica π'[3]. Consideriamo anche i punti *T'r*, intersezione della retta *r* con il piano π', e *I'r*, intersezione, con il medesimo piano π' della retta r^0 che passa per *O'* ed è parallela alla retta oggettiva *r*.
Fotografiamo ora l'asta *r*, con la macchina *O'*: sulla pellicola π' resterà impressa l'immagine *r'* dell'asta[4]. Ora, si dimostra facilmente che la fotografia *r'* dell'asta passa per il punto *T'r* e per il punto *I'r*, impresso idealmente, sulla pellicola, dalla retta r^0 che abbiamo descritto.
Ciò premesso, osserviamo che ad ogni punto dell'oggetto *r* corrisponde un punto della sua fotografia *r'*, e viceversa: se, per esempio, individuo sull'asta *r* un punto *P*, esiste sulla fotografia *r'* un solo punto *P'*, immagine di *P*, quello allineato sul raggio proiettante (*O'P*); se, al contrario, individuo sulla fotografia *r'*, corredata dei due punti *T'r* e *I'r*, un punto *Q'*, esiste sull'asta *r* un solo punto *Q* che ha quella immagine. In sintesi: tra la retta *r* e la retta *r'* intercede una relazione nota come corrispondenza biunivoca.
La metafora della fotografia ci aiuterà a chiarire ulteriormente questo concetto. Immaginiamo che la retta *r* sia una lunga fila di uomini allineati e che ogni punto della retta sia un individuo, del quale sono noti i dati anagrafici, ed ogni corrispondente punto della retta *r'* sia la fotografia di quello. Perciò, se vogliamo trovare la fotografia del signor *P* conoscendone il nome, basta costruire la retta (*O'P*) per trovare *P'* e , viceversa, se vogliamo sapere chi è il signore che ha le fattezze ritratte nella fotografia *Q'*, basta costruire la retta (*O'Q'*) per determinare il punto *Q*, nel quale, senza incertezze, la retta stessa incontra la retta *r*.
Ciò detto, consideriamo il punto *I'r* che, per appartenere alla fotografia *r'* è, esso stesso, un punto «immagine», cioè la fotografia di qualcuno, e proviamo a identificare questo ignoto personaggio: la retta (*O'I'r*), che dovrebbe fornirci la risposta, non incontra la retta *r* in alcun punto, perché, per costruzione, le è parallela e, secondo Euclide, due rette parallele non hanno alcun punto in comune!
Chi o che cosa ha prodotto allora l'immagine *I'r*? Ci sovviene allora che il quinto postulato di Euclide, detto «delle parallele», postulato che sostiene il nostro ragionamento e il nostro interrogativo, è in realtà l'unico, tra gli assiomi euclidei, che sia stato messo in dubbio dalla matematica di fine Ottocento, dando luogo ad altre geometrie, dette, appunto, non-euclidee. In particolare se, con Lobacevskij, affermiamo che «per un punto dato (*O'*), si possono condurre ad una retta data (*r'*), nei due versi opposti, due distinte parallele»[5], per il centro di proiezione *O'* passano almeno due rette che non incontrano la retta data e la nostra domanda si pone con maggior ragione; se invece, con Riemann, affermiamo che le «due rette qualsiasi di un piano hanno sempre almeno un punto in comune»[6], allora la nostra domanda trova una risposta immediata.
Il problema, dunque, si fa più complesso e più inquietante il nostro interrogativo.

Indizi, prove e tentativi di trovare lo scomparso a tutti i costi: cioè la sintesi estrema di una secolare istruttoria

Guidoubaldo del Monte (1545-1607) non dovrebbe forse essere chiamato in causa, perché, a dire il vero, non sembra che abbia mai affrontato esplicitamente questa questione.
Tuttavia egli è il primo ad attribuire un significato al punto *I'r*, non solo, ma è a tal punto padrone delle premesse del nostro problema da far credere che questa risposta mancata sia in realtà una volontaria e lungimirante omissione. Guidoubaldo, com'è noto, dimostra, nelle proposizioni del primo libro del suo celebre trattato di prospettiva[7], che il punto *I'r*, cioè la fotografia del personaggio ignoto che noi vogliamo identificare, è il *punctum concursus*, cioè il punto di fuga, come noi oggi diciamo, delle rette parallele a quella che va dall'occhio *O'* al punto *I'r* stesso. Per dimostrare questo assunto a noi basta osservare (fig. 3) che l'operazione di proiezione di ogni retta parallela alla retta *r*, come ad esempio *s*, conduce alla co-

1/ *Pagina precedente.* Paradossalmente la concezione medioevale dell'universo, adombrata in questa incisione, è più vicina ad una moderna concezione dello spazio geometrico e forse anche dello spazio fisico di quanto non sia la concezione proiettiva che, attualmente, è utilizzata nella ricerca e nell'insegnamento della prospettiva.
2/ Il personaggio della figura precedente esplora il significato del punto *I'r,* immagine di un punto della retta *r* che non esiste nello spazio fisico secondo la concezione antica, e moderna, alla quale si è fatto cenno.

3/ Si scopre qui che il punto *I'r* è comune a due rette parallele.

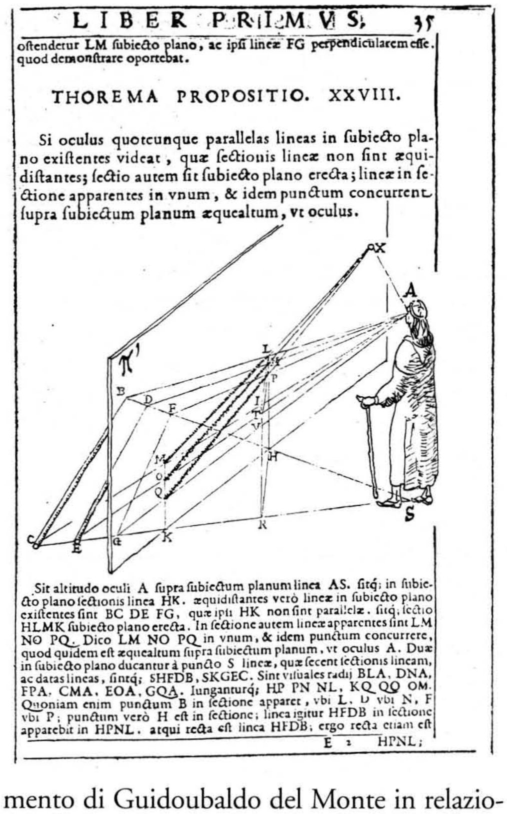
4/ Il personaggio è entrato nella celebre xilografia di Giudoubaldo del Monte, e riconosce il punto di fuga come punto di concorso delle prospettive di rette parallele, senza fare alcun ricorso all'infinito.

struzione di una retta s^0, proiettante, che coincide con r^0, perciò, porta a identificare un punto *I's* che coincide con *I'r*. Ma Guidoubaldo ragiona in modo diverso dal nostro, che è di discendenza proiettiva, ragiona, cioè, con ortodosso riguardo ai principi di Euclide. Egli, perciò, non considera rette infinitamente estese ma solo segmenti finiti ed osserva che le immagini di quei segmenti convergono in un punto *X* (quello che noi chiamiamo *I'r*) pur senza averlo in comune. La figura che Guidoubaldo usa per illustrare il suo ragionamento (fig. 4) non ha così bisogno di alludere all'infinita estensione delle rette, così come la nostra, perché lavora su entità che sono completamente finite, i segmenti oggettivi da proiettare e i segmenti immagine di quelli, che si raccolgono nel punto *X.*

Nel secondo libro del suo trattato Guidoubaldo si pone il problema di passare da una rappresentazione alla corrispondente figura oggettiva e quindi è evidente che possiede ben chiara l'idea della corrispondenza biunivoca tra gli enti e le loro rappresentazioni. In conclusione, come abbiamo anticipato, la mancanza di una risposta esplicita sembra essa stessa il risultato di una riflessione: è come se Guidoubaldo rifiutasse di considerare una condizione che, travalicando i limiti del nostro mondo sensibile e finito, raggiunge territori nei quali è impossibile operare con il disegno; territori dei quali a questa scienza di riga e compasso non è consentito discutere, forse, se mai, lo sarà ad altra che guarda esclusivamente allo spirito. È questo un atteggiamento che si ritrova, tal quale, in Guarino Guarini, quando, polemizzando con Aguillon[8], nega che l'ortografia gettata (la pianta, diremmo noi) possa essere intesa come una proiezione da un centro a distanza infinita, perché quel centro, proprio per essere così lontano, non vedrebbe nulla, dal momento che, come già Euclide osserva nella sua *Ottica*[9], le grandezze apparenti dei corpi si riducono a misura che questi si allontanano dall'osservatore; Guarini propone perciò di guardare alle cosiddette proiezioni ortogonali come ad una rappresentazione puramente convenzionale, che nulla ha a che fare con il fenomeno della visione.

Come potremo giudicare dunque l'atteggiamento di Guidoubaldo del Monte in relazione alla questione suddetta? Pragmatico, direi, e logico insieme. Alla domanda chi sia il personaggio che si nasconde dietro *I'r* egli risponderebbe che non vi è nessun personaggio (in forza della logica euclidea) e che, perciò, la questione è errata, non solo, ma è anche inutile, perché la prospettiva si può benissimo praticare anche senza simili artificiose elucubrazioni, basta osservare che le rette che sono oggettivamente parallele hanno immagini convergenti verso un punto *X,* come ognuno sa per l'esperienza quotidiana dell'occhio, e che questo punto si costruisce come abbiamo visto.

Non è un caso, dunque, se il primo germe di un'idea diversa, quella che oggi noi prevalentemente pratichiamo, lo si trova nell'opera di un astronomo, condotto dalle esigenze dei suoi stessi studi a procurarsi strumenti geometrici capaci di superare i limiti dell'universo accessibile. Alludo a Johan Kepler (1571-1630) che per primo, a quanto sembra[10], ipotizza che linee parallele possano incontrarsi in un punto infinitamente lontano. Con questa intuizione Kepler addita al mondo scientifico una possibile identità del nostro personaggio.


LIBER PRIMVS. 35

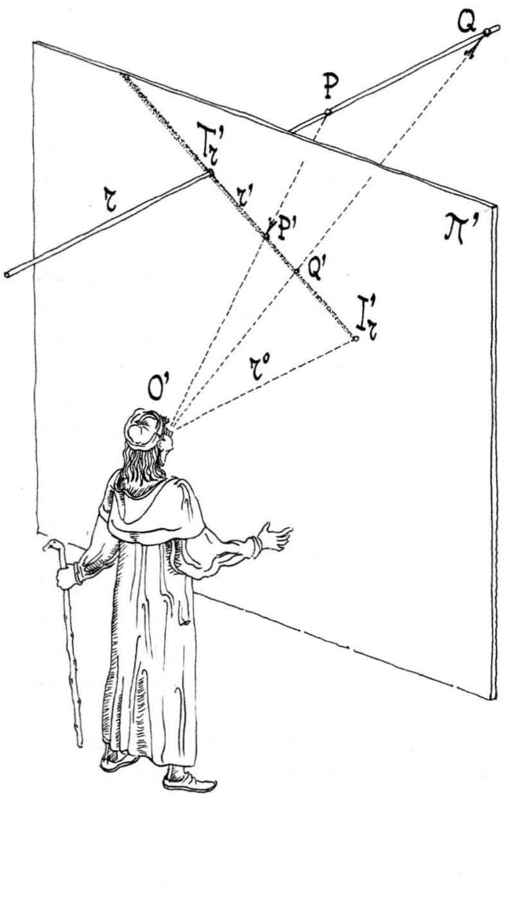
ostendetur LM subiecto plano, ac ipsi lineæ FG perpendicularem esse. quod demonstrare oportebat.

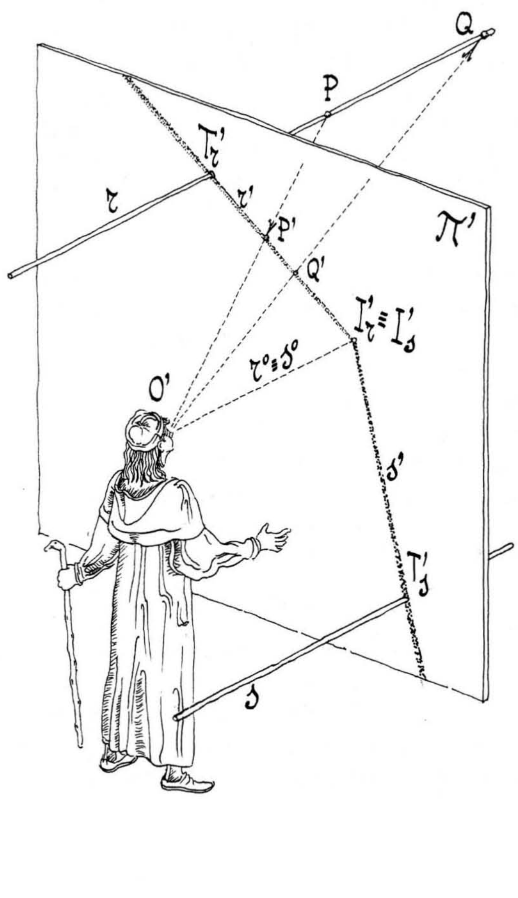
THOREMA PROPOSITIO. XXVIII.

Si oculus quotcunque parallelas lineas in subiecto plano existentes videat, quæ sectionis lineæ non sint æquidistantes; sectio autem sit subiecto plano erecta; lineæ in sectione apparentes in vnum, & idem punctum concurrent supra subiectum planum æquealtum, vt oculus.

Sit altitudo oculi A supra subiectum planum linea AS. sitq; in subiecto plano sectionis linea HK. æquidistantes verò lineæ in subiecto plano existentes sint BC DE FG, quæ ipsi HK non sint parallelæ. sitq; sectio HLMK subiecto plano erecta. In sectione autem lineæ apparentes sint LM NO PQ. Dico LM NO PQ in vnum, & idem punctum concurrere, quod quidem est æquealtum supra subiectum planum, vt oculus A. Duæ in subiecto plano ducantur à puncto S lineæ, quæ secent sectionis lineam, ac datas lineas, sintq; SHFDB, SKGEC. Sint visuales radij BLA, DNA, FPA, CMA, EOA, GQA. Iunganturq; HP PN NL, KQ QO OM. Quoniam enim punctum B in sectione apparet, vbi L, D vbi N, F vbi P; punctum verò H est in sectione; linea igitur HFDB in sectione apparebit in HPNL. atqui recta est linea HFDB; ergo recta etiam est

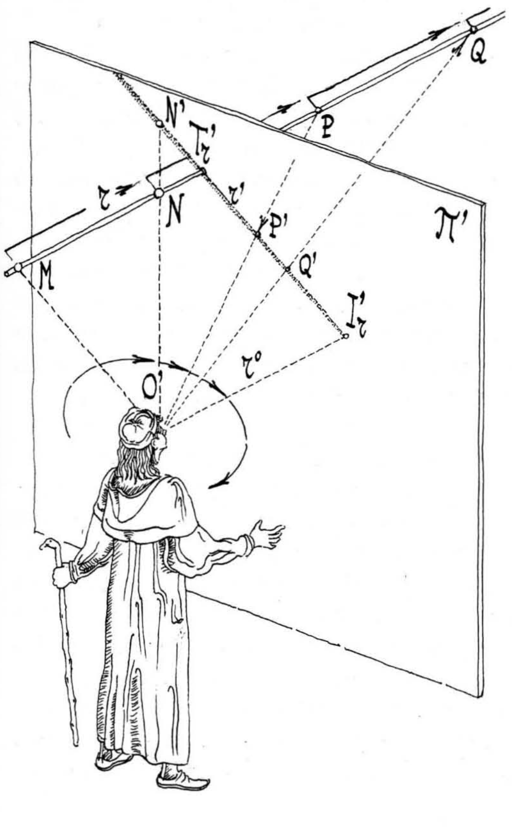
E 2 HPNL;





5/ Si sperimenta qui la relazione tra il movimento di un punto sulla retta oggettiva e il movimento della relativa retta proiettante per scoprire che si giunge a *I'r* sia percorrendo la retta in avanti che indietro.

Poiché, infatti, la retta oggettiva *r* e la retta proiettante r^0 sono parallele, è chiaro che esse si incontrano in un *punctum infinite distans*, e perciò la fotografia *I'r* riproduce le sembianze di un punto all'infinito, precisamente del punto all'infinito che appartiene, insieme, alla retta *r* e a tutte le rette che le sono parallele. Quest'idea è rafforzata dalla osservazione del movimento della retta proiettante che insegue un punto oggettivo, mobile sulla retta data (fig. 5): a misura che il punto si allontana avanti all'osservatore, diminuisce l'angolo che la retta proiettante forma con la retta oggettiva e sembra evidente, perciò, che ad una distanza infinita corrisponda un angolo nullo, cioè il parallelismo. Sembra, ho detto, evidente, perché in realtà, come in ogni passaggio al limite, anche qui si insinua una grave contraddizione: infatti questo stesso processo, eseguito in senso opposto, cioè con il punto mobile che si allontana dietro all'osservatore, porta allo stesso risultato, sicché il punto all'infinito sulla retta, percorsa in avanti, e il punto all'infinito sulla medesima retta, percorsa indietro, hanno la medesima immagine *I'r*. Si tratta di una semplice coincidenza delle immagini di due entità distinte? o, piuttosto, è la natura del punto all'infinito, che gli permette di trovarsi al tempo stesso in due luoghi diametralmente opposti dello spazio e infinitamente distanti? Questo dilemma non può essere sciolto, né con la logica, né con l'intuizione; ma, considerando l'origine astronomica della ipotesi kepleriana sono più propenso a credere alla prima soluzione.



Alla nostra questione, dunque, Kepler avrebbe probabilmente risposto che nel punto *I'r* si confondono, sovrapposte, le immagini di due degli enti che costituiscono la retta *r*: il punto all'infinito che la retta incontra nel cielo boreale e il punto all'infinito che la medesima intercetta nel cielo australe. Ma questa risposta non è stata mai data, forse perché Kepler ben sapeva che avrebbe irrimediabilmente cozzato con l'assioma di Euclide, che vuole che due rette incidenti abbiano un solo punto in comune.

Io credo che sia questa ambiguità a suggerire a Girard Desargues (1532-1662) una nuova soluzione, tanto avanzata da essere giudicata nel suo tempo oscura, come oscuro, in generale, il suo linguaggio. Il fatto è che proprio sul linguaggio si fonda la risposta di Desargues. Così come Euclide premette alle sue proposizioni quelle definizioni, postulati e nozioni comuni, che noi oggi identifichiamo come assiomi, così Desargues premette alla sua trattazione alcune convenzioni di carattere logico e linguistico, tra le quali figura il concetto di *but d'une ordonnance de droites*, che liberamente si potrebbe tradurre «sostegno di una classe di rette», concetto che unifica sia la stella di rette comune, quando il sostegno è accessibile, sia la stella di rette parallele, quando il sostegno è a distanza infinita[11]. Mi pare che due siano gli aspetti essenzialmente originali di questa concezione: il primo sta nel modo di arrivarci, assiomatico, appunto, e non derivato da passaggi al limite, come nel caso di Kepler; il secondo sta nel modello che permette di capire e di giustificare l'assioma. Così come la retta, che è un assioma, ha nel raggio di luce il suo modello, così il *but* desarguiano ha il suo modello in un luogo, *un endroit*, verso il quale tendono le rette della stella. Questo luogo, inteso come meta di un viaggio (ecco perché il termine *but*) non cambia la sua natura se è prossimo o lontano o lontanissimo. La risposta di Desargues alla nostra domanda suonerebbe dunque così: la fotografia *I'r* è quella del luogo verso il quale tendono le rette parallele che tu consideri. Risposta che, come vedremo, con minima correzione, è ancora oggi tra le più accreditate e che, tuttavia, non risolve l'ambiguità del davanti o dietro, che ho sopra accennato. Bisogna ricordare, tuttavia, che Desargues introduce i concetti su esposti in un ambito che non è squisitamente prospettico e perciò la sua risposta è ancora indiretta.

La questione è invece affrontata da Brook Taylor (1685-1731) direttamente in ambito prospettico. Egli riprende, con più agili dimostrazioni, i risultati di Guidoubaldo e chiama il punto *X*, o *I'r* che dir si voglia, *vanishing point*, punto evanescente. Sentiamo come lo stesso Taylor giustifica questa scelta suggestiva: «Quando la retta oggettiva passa essa stessa per il suo punto evanescente, la sua intera proiezione sarà tale punto, così che, in questo caso, si può dire che la retta svanisce. Questa è una delle ragioni che giustificano il mio uso di questo termine. Un'altra ragione è, che più un oggetto è lontano, su una retta, più è piccola la sua proiezione, e allo stesso tempo più è vicina al punto evanescente; e quando giunge nel punto, la sua grandezza svanisce, perché l'oggetto è a una distanza infinita. Ciò si comprende facilmente, immaginando un uomo che si allontana da Voi per un lungo cammino: egli sembra essere sempre più piccolo, a mano a mano che procede»[12].

Mi sembra dunque che la posizione di Taylor non sia molto dissimile da quella di Guidoubaldo del Monte, con una differenza: Taylor non elude la questione che abbiamo posta, rispondendo che il punto *I'r* è l'immagine di una zona di indeterminazione, nella quale gli oggetti del nostro mondo sensibile si annichilano in una dimensione per noi impraticabile, che è quella dell'infinito o, per meglio dire, dell'indeterminato. Mi sembra poi non casuale l'esempio di un uomo che si allontana da noi che lo osserviamo, perciò davanti a noi, ciò esclude ogni ambigua coincidenza di ciò che è infinitamente lontano in un verso, da ciò che si perde nella distanza opposta.

Si giunge così a quello che taluni considerano il massimo contributo di pensiero in ordine al

Significato di *I'r*	Cosa è l'ente rappresentato in *I'r*	Risposta di	Anno	Carattere della soluzione
punctum concursus	il problema non sussiste	Guidoubaldo del Monte	1600	pragmatico
	punctum infinite distans, punto all'infinito	Johan Kepler	1604	fantastico
	but d'une ordonnance de droites, sostegno di una classe di rette	Girard Desargues	1639	linguistico
vanishing point	*an infinite distance*, un luogo inaccessibile	Brook Taylor	1729	operativo
	punto che appartiene al piano all'infinito	Jean Victor Poncelet	1822	euristico
fuga della retta	punto improprio che appartiene al piano improprio	matematici	1900	assiomatico

nostro problema: la concezione generalizzante di Jean Victor Poncelet (1788-1867). Egli riprende e completa la soluzione di Desargues affermando che: I. «tutti i punti all'infinito di un piano possono essere considerati idealmente come distribuiti su una retta unica, situata essa stessa all'infinito su quel piano»[13]; II. «si può supporre che tutti i punti all'infinito dello spazio appartengano a un solo e medesimo piano, la cui posizione è necessariamente indeterminata»[14]. Da notare che questi due enunciati non si trovano affatto in rapida successione, così come sono qui ricordati, bensì distribuiti e ripresi nella mole di un trattato di quasi novecento pagine, divise in due tomi. Che vuol dir ciò? Innanzitutto significa che Poncelet non si è affatto posto il problema di stabilire a priori un proprio sistema di postulati e che, anzi, gli enunciati suddetti risultano da un lungo processo di scoperta, come proprietà dei punti all'infinito della cultura seicentesca, proprietà che servono a giustificare, convenzionalmente, la generalità di alcuni altri teoremi. Significa poi che gli enunciati medesimi, valgono, o per meglio dire tornano utili, in un ambito limitato, che è quello della nascente geometria proiettiva.
Se dunque a Poncelet fosse chiesto di rispondere alla nostra inchiesta, egli, molto probabilmente, direbbe che *I'r* è la proiezione di un punto del piano all'infinito, come si scopre seguendo il movimento della retta proiettante, e darebbe perciò, alla propria soluzione un carattere euristico; ma direbbe anche che questo punto è unico perché unico è il punto comune a due rette incidenti, nello spazio prossimo, come a distanza infinita, e con ciò avrebbe cura di non contraddire i fondamenti della geometria euclidea.
Ciò nondimeno, queste nozioni, che pure erano state avanzate con grande prudenza e reiterate avvertenze[15], sono state interpretate successivamente quasi come una integrazione dei cosiddetti postulati esistenziali euclidei, sicché agli enti fondamentali della geometria elementare i punti, le rette, i piani, si sono aggiunti i punti, le rette e il piano all'infinito. Ciò ha portato, infine, ad un uso generalizzato di questi enti, anche fuori del loro contesto, che certamente dispiacerebbe allo stesso Poncelet.
Avremo modo tra breve di criticare questa concezione. Per ora ci limitiamo a registrare alcune varianti che sono intervenute in tempi più recenti e che denotano, a mio avviso, un certo irrisolto imbarazzo degli studiosi.
Ai termini *punto, retta, piano all'infinito* si sono andati sostituendo, infatti, i termini *punto, retta e piano impropri*[16], quasi a voler privilegiare la indeterminatezza dei nuovi enti, rispetto ad una loro collocazione nell'infinito, sia pure ideale. Alcuni, poi, preferiscono usare il termine *direzione*[17], in luogo del *punto improprio*, e il termine *giacitura* in luogo della *retta impropria*, e ciò per la semplice ragione che la caratteristica comune a una stella di rette parallele è la direzione, mentre la caratteristica comune a un fascio di piani paralleli è la giacitura nello spazio. In questo modo la soluzione data al problema viene ricondotta ad un carattere squisitamente linguistico (e cos'è infatti la geometria se non un linguaggio). Ragion per cui, concludendo, la risposta alla nostra questione, che oggi sembra più convincente, ancorché fortemente astratta, è che il punto *I'r* è l'immagine della direzione della retta *r* e delle rette che le sono parallele. Non si può negare che si tratti di una risposta efficace e suggestiva che sfugge, almeno, alle ambiguità che abbiamo prima rilevato.
Se, dunque, un odierno cultore della materia fosse invitato a rispondere alla nostra domanda, direbbe quasi certamente che l'immagine *I'r* è quella di un punto improprio che, per essere unico, ha la sorprendente capacità di trovarsi, al tempo stesso, a un capo e all'altro della infinita estensione della retta. E questo è principio ampiamente oggi accettato, tant'è vero che, nel mondo delle proiezioni, la retta si considera «saldata» nel punto all'infinito[18].
In conclusione, e per riassumere in un quadro di insieme gli sforzi sin qui compiuti, potremo raccogliere gli indiziati oggetto della nostra inchiesta nella tabella in alto.
Per quanto sia estremamente rozza, questa classificazione ha il pregio di sintetizzare l'evolversi della questione, in generale da soluzioni di carattere pratico verso soluzioni del tutto astratte; in più essa mostra come le soluzioni date nell'ambito degli studi prospettici abbiano, in verità, sempre evitato di chiamare in causa l'infinito, probabilmente perché concetto di dominio esclusivamente matematico o filosofico, certamente non necessario per operare, ma anche superfluo nella giustificazione razionale dei procedimenti geometrici. Sembra dunque che il problema sia stato affrontato da due distinti punti di osservazione.

Prospettiva per gli artisti e prospettiva per i matematici

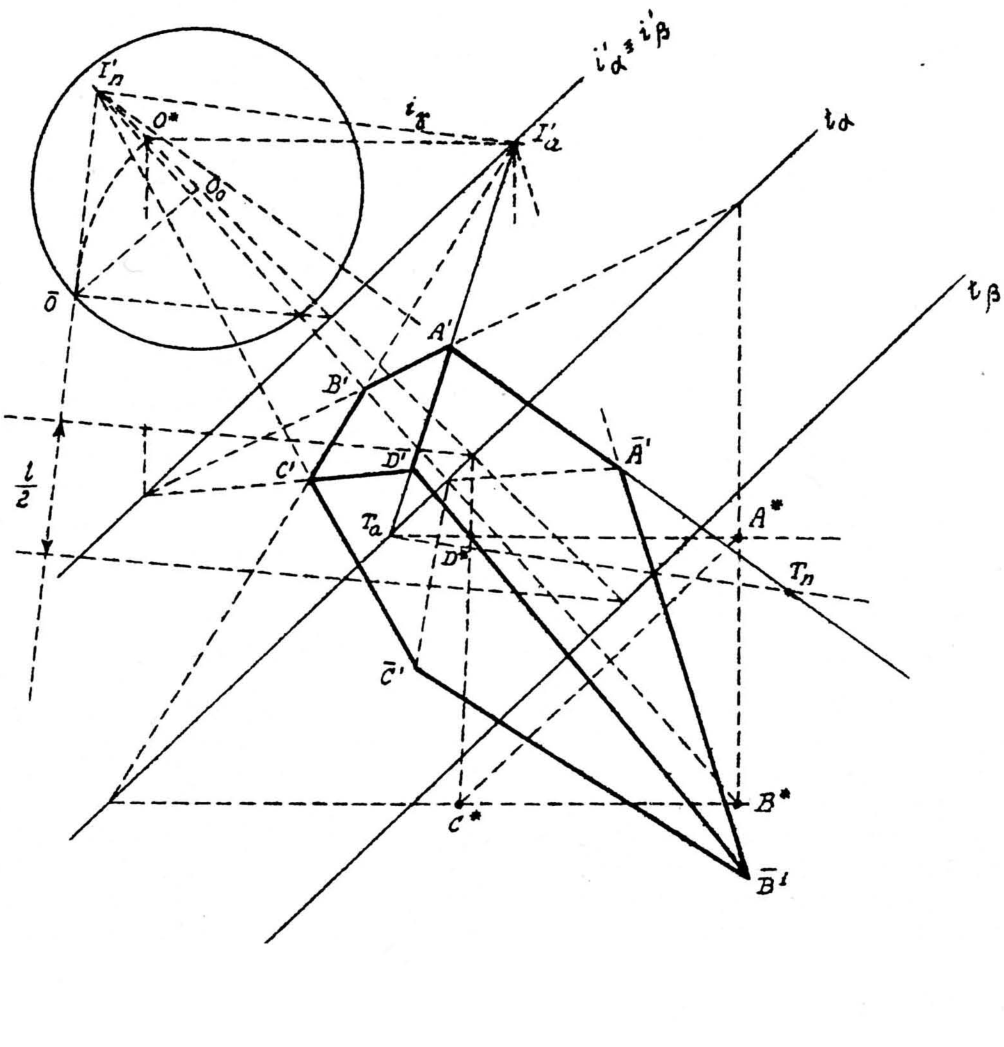
Che vi siano due punti di vista in materia di geometria è fuor di dubbio. La storia è di vecchia data e nasce con il conflitto amoroso tra arte e scienza. Si può dire che, da che mondo è mondo, la geometria pratica ha fornito alla geometria teorica argomenti di riflessione e quest'ultima ha restituito alla prima soluzioni liberate da ogni sospetto di empirismo. Ancora Gino Fano, per citare un esempio tra i

6/ Nel suo orgoglioso distacco dai problemi pratici, come dal mondo fisico, la prospettiva dei matematici del Novecento produce immagini che non possono essere osservate nel modo giusto, quello cioè che restituisce l'aspetto reale del solido rappresentato.

tanti, nelle sue *Lezioni di Geometria Descrittiva*[19], dedica un capitolo alla proiezione centrale ed uno alla prospettiva, e, come lui, Comessatti[20], per concludere che la seconda è compresa nella prima come un momento, operativo, del medesimo pensiero, e ancora Chisini[21] e molti altri.

Questa distinzione ancora oggi sopravvive, per quanto non abbia più senso. Nel capitolo della proiezione centrale viene generalmente accolta la trattazione della prospettiva come metodo di rappresentazione, capace cioè di produrre autonomamente la rappresentazione e la ricostruzione nello spazio di un oggetto tridimensionale. È questa l'ultima evoluzione della prospettiva antica così come si trova nel trattato di Wilhem Fiedler[22]. Nel capitolo della prospettiva vengono invece raccolti alcuni procedimenti pratici, come quello detto «degli architetti», che si servono, per lo più, di una pianta e di un alzato per ricavare l'immagine prospettica e che, perciò, non possono ad alcun titolo annoverarsi tra i metodi di rappresentazione, giacché mancano della necessaria autonomia. Nel suo orgoglioso distacco dalle applicazioni, la proiezione centrale era arrivata a tal punto di astrazione da operare sulle forme geometriche in totale anamorfosi (fig. 6), rendendo così impossibile ogni controllo visivo della forma.

Si deve ad Orseolo Fasolo il recupero della proiezione centrale come strumento operativo o, se si preferisce, l'aver ridato alla prospettiva piena dignità di metodo, rendendo oggi vacua ogni distinzione tra le due discipline. Prima di quest'evento, e dunque fino a tutta la prima metà del Novecento, la spinosa questione dei punti all'infinito è stata affrontata in due ambiti distinti: quello squisitamente matematico e quello che diremo artistico, anche se non nel senso romantico del termine, bensì nel senso illuminista.



Ci proponiamo ora di esaminare il ruolo dei punti all'infinito (e quando occorra degli altri enti) nella prospettiva, secondo questi diversi punti di osservazione.

La prospettiva dei matematici e la critica della soluzione assiomatica

Esiste un solo modo di introdurre gli enti all'infinito in un sistema logico deduttivo quale è la geometria, e consiste nell'annoverare i punti all'infinito, le rette all'infinito e il piano all'infinito tra gli assiomi del sistema considerato. Se la loro collocazione nel contesto logico è tale da non produrre contraddizioni, allora questi assiomi sono validi. E poiché, afferma Chisini, termini come *direzione* e *punto*, o *punto improprio* e *punto*, possono essere scambiati «nelle espressioni che danno proprietà grafiche (di congiungimento o intersezione relative a punti, rette e piani) della geometria, ottenendo enunciati ancora veri», si adottano senz'altro in geometria descrittiva e proiettiva.

Cerchiamo allora di dare alla osservazione di Chisini un significato concreto scrivendo le espressioni di alcune proprietà grafiche e, subito dopo, le corrispondenti espressioni che fanno uso dei punti, delle rette e del piano all'infinito[23].

Se, ad esempio dico: *a due punti, distinti, appartiene una sola retta, due punti distinti, perciò, individuano una retta;* posso anche dire: *a un punto e una direzione appartiene una sola retta;* oppure anche *a un punto e un punto all'infinito, appartiene una sola retta.*

È chiaro che ho sostituito uno dei due punti della prima espressione con un punto all'infinito ottenendo un enunciato ancora vero, infatti esiste una sola retta che passa per un punto dato e ha una data direzione.

Non solo, posso anche dire: *a due direzioni appartiene una sola giacitura;* oppure, *a due punti all'infinito appartiene una sola retta all'infinito.*

E, in questo caso, ho sostituito tutte e due i punti.

Altrettanto si può fare con la retta, sebbene con molta buona volontà.

Ad esempio il famoso postulato euclideo, che tanto ci sta occupando, può suonare così: *da-*

ta una retta e un punto, distinti, si può condurre per quel punto una sola retta parallela alla retta data; ma se si sostituisce la retta data con una retta all'infinito, l'espressione cambia notevolmente aspetto, infatti: *data una giacitura e un punto, distinti, si possono condurre per quel punto infinite rette parallele alla giacitura data.* E se si sostituisce il punto dato con un punto all'infinito si ottiene una negazione, infatti: *data una retta e un punto all'infinito, distinti, non si può condurre per quel punto all'infinito alcuna retta parallela alla retta data.*
Per convincersi di quanto sopra basta considerare che le rette che escono da quel punto all'infinito hanno, per definizione, una direzione diversa da quella della retta data (abbiamo detto retta e punto all'infinito, distinti). Ci si potrà consolare costruendo il piano che passa per la retta data e contiene il punto all'infinito assegnato, ma ciò è tutt'altra cosa, mi pare, rispetto alla espressione che si voleva conservasse il suo valore.
Se infine si tenta di coinvolgere in questo gioco di scambi il piano all'infinito, allora il ragionamento sconfina nel paradosso. Infatti, se è vero che: *dati un piano e un punto, distinti, si possono condurre per quel punto infinite rette parallele al piano;* non ha senso dire che *dato il piano all'infinito e un punto, distinti, si possono condurre per questo rette o piani a quello paralleli.* Infatti, il piano improprio non ammette il parallelismo, poiché qualunque retta e qualunque piano lo incontrano, sempre e comunque. D'altronde, anche le rette all'infinito non ammettono il parallelismo (due giaciture parallele sono la medesima giacitura).
Ma ragioniamo ancora sul piano all'infinito. Ad ogni retta dello spazio ordinario appartiene un punto all'infinito. Ciò significa che il piano all'infinito avvolge lo spazio ordinario, ed io credo che, quando Poncelet afferma che il piano all'infinito ha una posizione sempre indeterminata, persegue appunto questa idea o, se si preferisce, guarda idealmente a questa immagine. Ma, se così è, allora i punti in cui una retta incontra siffatto piano, dovrebbero essere due, uno per ciascuno dei due versi nei quali la retta può essere percorsa senza fine; perciò due rette parallele avrebbero due punti all'infinito in comune, diametralmente opposti, e ciò, abbiamo già osservato, contrasta con il postulato euclideo che vuole che due rette, quando sono incidenti, abbiano un solo punto in comune.
Insomma, a conti fatti, non sembra che l'inserimento degli enti all'infinito nella geometria della quale ci occupiamo, che è quella che modella gli oggetti e li rappresenta, sia del tutto indolore, anzi a me sembra palesemente problematico.
E qui vorrei ribadire il concetto: come meglio tra poco vedremo, questa è una critica della soluzione assiomatica di certi problemi di prospettiva; questa critica non vuole estendersi all'uso dei medesimi concetti nella matematica in generale e in particolare nella geometria proiettiva[24].

La prospettiva degli artisti e l'esclusione dell'infinito

Non voglio dunque negare che l'introduzione degli entri impropri nella geometria proiettiva sia un dato fondamentale, sebbene mi sentirei di negare che sia indispensabile, perché, come credo, potrebbe essere sostituita da altre convenzioni. Voglio piuttosto affermare che l'uso degli enti impropri è contradditorio in prospettiva e anche inutile. Quanto alla prima affermazione – che sia contradditorio – basta, credo, il già più volte ricordato problema della identificazione del punto *Ir*, cioè del punto oggettivo che ha per immagine *I'r*. Questo punto dovrebbe godere di una proprietà metafisica, come già aveva avvertito Poncelet, per trovarsi nello stesso momento in due luoghi infinitamente distanti. E la prospettiva si occupa invece di rappresentare il mondo fisico, anzi di rappresentarlo così come lo si vede dall'interno, in un ambito totalmente finito. Quanto alla seconda – che sia inutile – basta pensare alla maturità raggiunta dalla prospettiva sei e settecentesca per rendersene conto, ma più avanti ne daremo altra dimostrazione.
Vorrei aggiungere poche considerazioni, in generale, sull'uso del concetto di infinito in geometria, non mie, ma di studiosi del problema. Felix Kaufmann, nella sua importante discussione sull'infinito in matematica[25], stabilisce un principio che a me sembra fondamentale e che credo si possa così sintetizzare: se non si vuole che i dati intuitivi sui quali si fonda la geometria, come i concetti di *punto, retta* e *piano,* diano luogo a contraddizioni ed errori, occorre accettare e ricordare la loro origine, astratta dal mondo sensibile, e poiché «intuitivamente sono date solo le cose corporee estese» occorre pensare le superfici come volumi schiacciati fino ad assumere uno spessore piccolo a piacere, le linee come volumi schiacciati fino ad assumere uno spessore e una larghezza piccola a piacere e i punti come volumi schiacciati, allo stesso modo, nelle tre dimensioni. Ma «la piccolezza a piacere non significa eliminazione dell'estensione, ma solo l'esclusione di una soglia inferiore fissa di essa». Al di là delle conseguenze di queste considerazioni in ambito logico deduttivo, ciò che mi preme sottolineare è il richiamo, da parte di un grande matematico del Novecento, ad una concezione dello spazio che sia astratta quanto si vuole ma non in contraddizione con i dati dell'esperienza sensibile. Posso perciò pensare lo spazio infinito come una dilatazione della stanza nella quale scrivo, ma non debbo applicare al concetto di spazio la qualità dell'infinito, che pure la mia mente possiede, per applicarla a concetti trascendenti, come, ad esempio, quelli religiosi.
Al medesimo risultato mi pare che approdi Paolo Zellini nella sua analisi filosofica del concetto, quando afferma che è «evidente come il problema matematico dell'infinito si trovi proiettato nella sfera morale»[26].

Verso una concezione nuova attraverso lo studio dei modelli

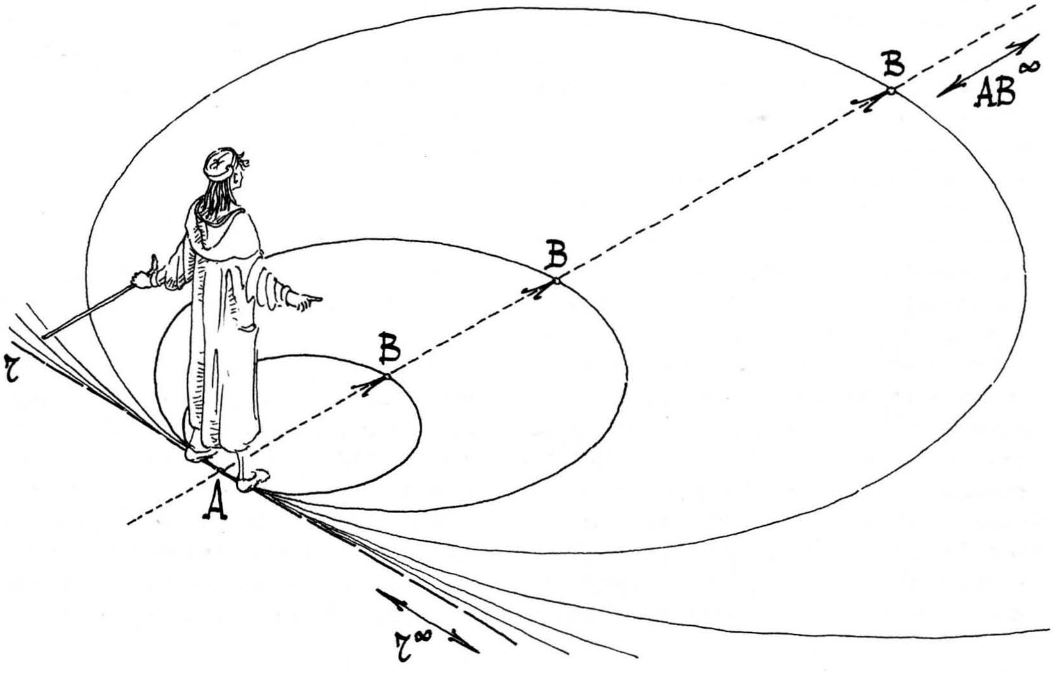
Da queste scarne considerazioni emerge l'importanza dei modelli in geometria. Se è vero, come afferma René Thom[27], in senso del tutto generale, che l'universo sarebbe inconoscibile senza modelli matematici in qualche modo riconducibili al mondo fisico, è altresì fuor di dubbio che la geometria desume dal mondo fisico i mattoni con i quali costruisce le sue architetture. Il modello, dunque, è fondamentale negli studi geometrici, esso avvalora la teoria perché le dona, appunto, quell'evidenza intuitiva che era accettata nelle ipotesi di partenza. È lecito, allora, confrontare le ipotesi teoriche con un modello ed è altresì lecito chiedersi, come fa Campedelli, se sia sempre il modello che nasce dalla teoria e non anche, talvolta, il contrario[28].

Cerchiamo allora di applicare questi metodi di indagine ai nostri problemi.

Critica della retta proiettiva e dei suoi modelli
L'idea della retta proiettiva è caratterizzata, come abbiamo detto, da una saldatura[29] nel punto improprio. In questa concezione, la retta proiettiva è un cerchio di raggio infinito e due punti distinti *A, B* non la dividono in un segmento (*AB*) e due semirette (...*A*), (*B*...), come accade per la retta euclidea, ma la dividono in due segmenti, uno finito (*AB*) e l'altro infinito (*BA*). Questo assioma nasce, dunque, contestualmente al suo modello, quello, appunto, di un cerchio il cui raggio si dilata fino a diventare infinito.
Esaminiamo ora con maggior cura il modello della retta proiettiva.
Se immagino di stare in piedi su un tratto *A* del cerchio prima della dilatazione che lo trasforma in retta, e immagino di assistere alla dilatazione stessa, vedo che il punto *B*, che era davanti a me, sul cerchio ma dalla parte opposta, si allontana fino a raggiungere una distanza indeterminata e, contestualmente, la curvatura della circonferenza sotto i miei piedi si riduce fino a non essere più misurabile, cioè si rettifica. Ma, in questa scena (fig. 7), il punto *B* si è allontanato da *A* scorrendo sulla retta (*AB*) (che è un diametro del cerchio) e quando ha superato il limite interdetto alla mentalità operazionista, ma non a quella matematica, si è trasformato in una direzione. Orbene, questa direzione è quella della retta (*AB*), che nulla a che vedere ha con la direzione della retta che passa sotto i miei piedi, anzi è ad essa ortogonale!
Se immagino, invece, di trovarmi al centro del cerchio che si dilata, vedo che tutti i punti della circonferenza si trasformano in punti impropri e dunque la linea si trasforma nella retta impropria, o giacitura, del piano sul quale sto.
In entrambi i casi il modello cade in contraddizione.
Piuttosto il secondo scenario sembra prestarsi bene a esprimere l'idea della giacitura. Approfittiamone, allora, per un esperimento: tracciamo una retta qualunque sul piano e osserviamo che essa interseca la giacitura[30] in due punti, coerentemente con le nostre osservazioni precedenti.

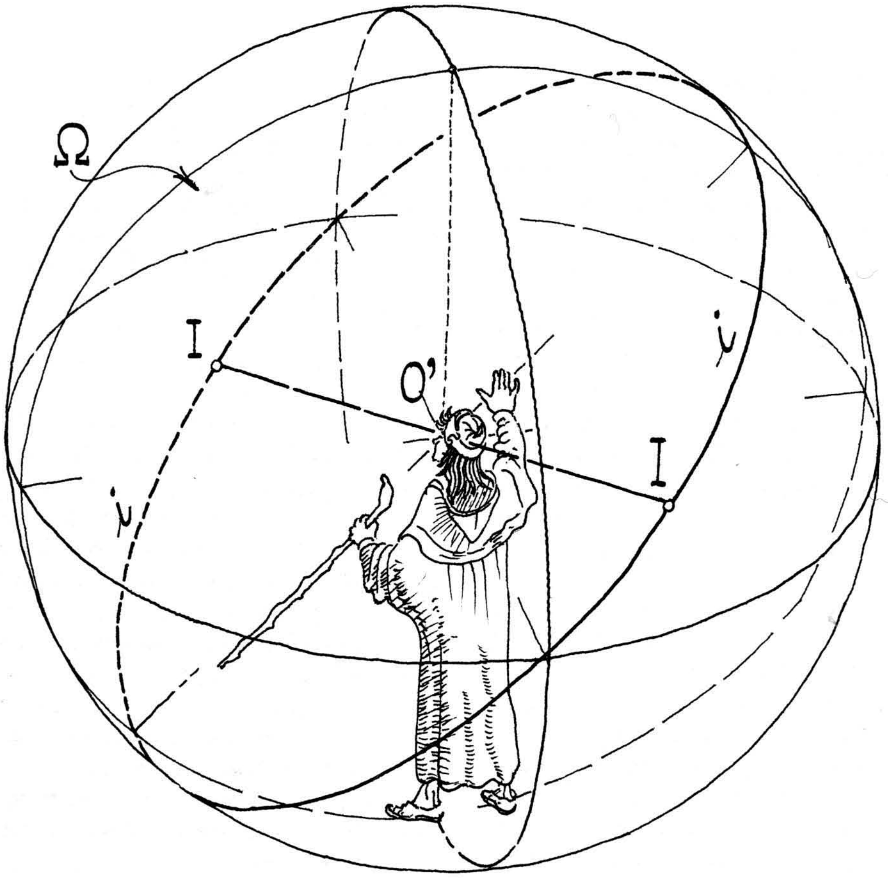
Un modello operativo
Vediamo ora come il problema può essere affrontato dal punto di vista operativo[31]. Bisogna però, innanzitutto, porre una questione di metodo: il concetto di infinito dovrà essere rimosso dal nostro vocabolario. L'infinito, infatti, porta inevitabilmente a paradossi e contraddizioni quando è impiegato in un ambito operativo. Mi sia consentito di mostrare questa incompatibilità, senza citare Bridgman[32] ma ricordando, invece, una splendida lezione epistolare che debbo a Decio Gioseffi (come a lui debbo la scoperta dell'operazionismo e della sua importanza in ambito geometrico). Si tratta dunque del celebre paradosso di Achille e la tartaruga[33] che Gioseffi, testualmente, risolve così in chiave operazionista: «...Ciò che mi imbroglia è il fatto che non Achille, ma io (che divido tempi e strade per metà) mi sono impegolato in un'operazione di durata infinita...». Dunque Achille, che ha concesso un certo vantaggio alla tartaruga in una gara di corsa, la supererà agevolmente, perché la gara si svolge nel nostro mondo sensibile e finito, mentre la tartaruga avrebbe facile vittoria solo se la gara dovesse svolgersi nel mondo della logica assiomatica, dove, posto il concetto di infinito, esiste anche la possibilità di una riduzione senza fine del suo vantaggio.

Vediamo dunque come, dal medesimo punto di vista, potrebbe risolversi la questione che abbiamo posta in principio.
La retta proiettante proietta un punto proprio della retta oggettiva fin tanto che si può misurare l'angolo che essa forma con la retta medesima. Infatti, fin tanto che quest'angolo è misurabile con gli strumenti a disposizione dell'osservatore, è misurabile, altresì, la distanza del punto oggettivo proiettato dall'osservatore stesso e perciò il punto si trova in una zona accessibile dello spazio (anche se per percorrere questa distanza dovessi usare un'astronave). Quando l'angolo formato dalle due rette non è più misurabile con gli strumenti a disposizione dell'osservatore le due rette sono parallele e non c'è più proiezione perché, anche da un punto di vista logico, non c'è bisogno che vi sia e perché manca l'ente proiettato, inghiottito, com'è, dalle nebbie dell'indeterminatezza.
Come si riflette questa impostazione teorica sull'idea dei punti di fuga?
È semplice. Il punto di fuga ha un duplice significato: riguardato dal punto di vista meramente geometrico è quel punto che, insieme alla traccia della retta oggettiva, individua la retta proiezione[34], cioè permette di disegnarla; come tale il punto di fuga è solo l'intersezione con il quadro della parallela alla retta oggetti-



7/ Il personaggio della incisione antica esplora qui un modello della odierna concezione proiettiva per scoprirne alcune gravi contraddizioni: la retta sulla quale poggia i piedi e la circonferenza di raggio infinito, che dovrebbe sovrapporsi ad essa, sono entità geometriche affatto diverse.

8/ Il nostro personaggio è ora in un modello
che non presenta contraddizioni, a condizione, però,
di considerare due punti indeterminati sulla retta, i punti *I*.
Non vi è dubbio che egli si sente qui molto più a suo agio,
la sfera che contiene il mondo è la stessa dalla quale è venuto.



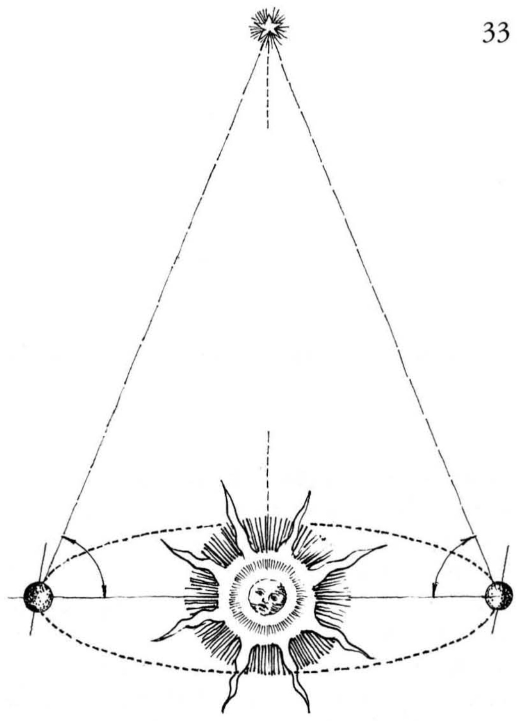
va e non rappresenta alcunché, come già ci aveva spiegato Guidoubaldo, perché, quando le due rette sono parallele non hanno punti in comune e non vi è dunque alcuna proiezione. Se riguardato, invece, dal punto di vista squisitamente prospettico, il punto di fuga rappresenta semplicemente un'area di indeterminatezza, e cioè l'intorno nel quale l'operazione di proiezione viene a cadere e, perciò, il punto mobile, allontanandosi dall'osservatore, semplicemente scompare. Il punto di fuga, perciò, è in realtà un cerchio, il cui raggio dipende dalla precisione dello strumento per misurare gli angoli che l'osservatore ha a disposizione. E, in questo senso, lungimirante appare la definizione di Brook Taylor *vanishing point*, limite della scomparsa, punto di non ritorno dell'immagine.
Cosa intendeva dire Orseolo Fasolo quando parlava di una prospettiva senza punti all'infinito, perciò senza la loro immagine? Io credo esattamente questo: una prospettiva operativa che facesse a meno delle difficili (perché sostanzialmente ambigue) questioni che derivano dalla concezione dello spazio infinito.
Un modello, simile a quello della retta proiettiva che abbiamo sopra ricordato, può meglio chiarire questa idea.
Immaginiamo una sfera Ω che abbia il centro nell'occhio *O'* di un osservatore, centro di proiezione di una prospettiva, e supponiamo di poter misurare il raggio di questa sfera (fig. 8). Ogni retta proiettante, che esce, cioè, dal centro *O'*, incontra la superficie della sfera in due punti diametralmente opposti, *I* e *I*, che si distinguono solo introducendo un orientamento della retta; ogni piano proiettante seziona la sfera secondo un cerchio massimo *i*. Se ora immaginiamo di dilatare il raggio della sfera fino a raggiungere il limite accessibile ai nostri strumenti di misura, la superficie della sfera, la cui curvatura non è più apprezzabile, si identifica nel luogo di indeterminazione dello spazio, il cerchio *i*, la cui curvatura non è più apprezzabile, si identifica nel luogo di indeterminazione del piano e i punti *I* si identificano nei luoghi di indeterminazione della retta.

Come il modello operativo si pone nei confronti dell'infinito metafisico

Nel modello operativo la sfera Ω si pone dunque come un limite, che dipende dalla nostra capacità di misurare lo spazio. Non si tratta quindi di un limite fisso, giacché può variare con la capacità dei nostri sistemi di misura di esplorare lo spazio. Non si tratta neppure di un limite alla conoscenza, giacché non si esclude che questa possa procedere oltre, dilatando ulteriormente la sfera. Si tratta, piuttosto, del limite della nostra esperienza attuale. Un limite, perciò, che è ammissibile in quelle applicazioni della geometria che guardano alle cose del mondo, come la prospettiva.
La domanda, che sorge spontaneamente, su quel che si trova o si potrebbe trovare al di là di questo limite è legittima ma mal posta. Essa scaturisce dalla natura razionale e passionale dell'uomo ed è perciò ineluttabile, ma bisogna pur capire che non attiene al mondo dei sensi. L'infinito di certo esiste, ma non si offre ai nostri occhi, bensì al nostro intelletto.
L'infinito di certo esiste, ma solo dentro di noi.

Come il modello operativo si pone nei confronti delle geometria euclidea, di quella iperbolica e di quella ellittica

Un aspetto interessante del modello operativo è la sua capacità di adattarsi a ipotesi di spazio diverso da quello euclideo. Il modello dei luoghi indeterminati mi pare, infatti, che possa rappresentare tanto lo spazio iperbolico di Lobacevskij, quanto quello ellittico di Riemann.
Nel caso della geometria iperbolica di Lobacevskij, infatti, è sufficiente osservare come l'intersezione di ogni retta con la sfera Ω, in due punti distinti, riproduca appunto il concetto di parallelismo che quella geometria postula[35]. Esplicita ed evidente appare allora la proposizione che Gino Fano dimostra: «Nello spazio, la totalità dei punti impropri costituisce, dal punto di vista proiettivo, una quadrica non rigata, detta quadrica assoluto»[36]. Come dire, appunto, una sfera o una sua trasformazione proiettiva.
Nel caso della geometria ellittica, la sfera Ω può essere pensata come l'insieme dei punti dello spazio comuni a due rette complanari distinte. Ed è curioso osservare come lo stesso



9/ Un modo per misurare il raggio della sfera della prima e della penultima figura, e per dare così validità operativa a questa concezione: è lo stesso che si può utilizzare per misurare la distanza delle stelle. L'idea di un universo finito non è una novità. Io penso che il confine, la superficie della sfera, sia il limite delle possibilità di indagine dei nostri strumenti; un limite, dunque, che la scienza non può superare ma che, comunque, può essere oltrepassato dall'uomo; come appunto sta facendo, nella prima figura, il nostro compagno di avventura.

Riemann, pur muovendo da un indirizzo differenziale molto lontano dal nostro, giunga alla concezione di uno spazio finito[37].
Questa capacità del modello di piegarsi a interpretazioni diverse, per non dire opposte, del quinto postulato non deve, comunque, stupire, dal momento che sia la geometria iperbolica che quella ellittica contemplano la geometria euclidea come caso particolare.

Critica della soluzione operativa

Vediamo allora se, e fino a qual punto, questo modello può essere applicato nell'ambito prospettico (e della proiezione centrale).
Occorre, innanzitutto, definire la questione del verso, ovvero del punto che scompare in un verso per ricomparire dal verso opposto dopo aver «attraversato l'infinito»! Se adottiamo la soluzione operativa il paradosso naturalmente cade perché manca l'ente comune alle rette parallele sostituito dall'area di indeterminatezza; quest'ultima si trova tanto avanti, quanto dietro l'osservatore, oppure tanto a destra quanto a sinistra, in due zone dello spazio che sono entrambe inaccessibili ma distinte. E così è nella realtà del nostro mondo, infatti, se punto un telescopio in una zona vuota del cielo, cioè in una zona dalla quale non giunge (in questo momento) la luce di alcuna stella, posso immaginare di osservare quella cupa caligine nella quale si perde la mia percezione dello spazio; se ora capovolgo il telescopio (ammesso che ciò sia possibile, per esempio su una stazione orbitante) posso incontrare ancora il vuoto dell'inaccessibile, ma anche la luce di una stella, che giunge a me da una direzione opposta e da una distanza determinabile. Il modello operativo sembra dunque addattarsi alla realtà dello spazio, come noi lo percepiamo, meglio di quanto non faccia l'ipotesi assiomatica, che allude alla possibilità di un passaggio repentino da un capo all'altro dell'universo, attraverso l'ignoto[38].
C'è poi la questione del punto di fuga e cioè del suo significato a prescindere dalla direzione. Sembra, a riguardo, che la semplice osservazione della convergenza delle immagini di rette parallele sia già una giustificazione sufficiente. Punti mobili su due rette parallele distinte, mentre si allontanano dall'osservatore, si dirigono entrambi verso il limite dello spazio accessibile, limite che è comune all'una e all'altra retta, e perciò sembrano avvicinarsi, fin tanto che sono visibili, mentre scompaiono entrambi nella nebbia dell'indeterminatezza quando sono prossimi al punto di fuga. Ciò trova riscontro nella osservazione della realtà, dove ognuno può vedere la convergenza apparente delle rette parallele, ma nessuno ha mai visto l'immagine del loro incontro; e neppure potrebbe, se osservando, per esempio, i binari di un ipotetico rettilineo ferroviario, si servisse di cannocchiali via via più potenti, ed anche a prescindere dalla curvatura della superficie terrestre, perché questa operazione, cioè questo ingrandimento per mezzo di lenti, può essere compiuta forse più volte, ma non infinite volte, come appunto nel paradosso di Achille e la tartaruga, sopra menzionato. In questo quadro la definizione di Guidoubaldo del Monte, *Punctum Concursus*, è solo apparentemente riduttiva, in realtà è già sufficiente, vuoi dal punto di vista operativo, vuoi dal punto di vista logico, ed è anche questo che intendeva Orseolo Fasolo.

Conclusioni

Occorre, a questo punto, verificare l'applicabilità del modello operativo dello spazio alla prospettiva e, se possibile, alla rappresentazione più in generale. Credo che non abbia senso, a riguardo, un rigetto delle convenzioni sin qui adottate dalla matematica perché si tratterebbe di una pericolosa involuzione. Piuttosto verificheremo la possibilità di evolvere il pensiero, rendendo compatibile la concezione di Kaufmann, riportata anche nella epigrafe di questo lavoro, con quella che a me sembra la massima elaborazione degli enti all'infinito oggi disponibile, quella, già citata, di Federigo Enriquez.
Cominciamo con l'affermare che sulla retta sono presenti due luoghi di indeterminazione, distinti e opposti, conformemente ai due versi nei quali la retta può essere percorsa, che chiameremo punti *I*. È chiaro che, dato un solo punto della coppia, resta individuato l'opposto. I due punti *I* di una medesima retta, come due punti distinti qualsiasi, ne individuano la direzione *D*, che è qualità comune alle rette a quella parallele. Dunque, mentre i punti *I* appartengono alla famiglia degli enti già definiti da Euclide, la direzione è semplicemente una qualità della retta, come tale, non ha luogo, non si trova, cioè, né vicina né lontana nello spazio fisico come in quello mentale.
I punti *I* di un medesimo piano costituiscono un insieme. Questo insieme descrive la giacitura *g* del piano. Due coppie di punti *I* individuano una giacitura, così come due rette incidenti individuano un piano. La giacitura è la qualità comune a più piani paralleli e dunque, come la direzione, non ha luogo, non si trova, cioè, né vicina né lontana nello spazio fisico come in quello mentale.
I punti *I*, in generale, costituiscono un insieme, l'insieme dei luoghi indeterminati dello spazio. Questo insieme è assimilabile ad una sfera Ω il cui raggio è finito ma non può essere misurato con gli strumenti logici e meccanici dei quali l'uomo oggi dispone. È questa una traduzione empirica del concetto di soglia superiore non fissa di Kaufmann. Proviamo a quantificare questa soglia. Supponiamo di assumere, come fanno gli astronomi, i due estremi opposti dell'asse maggiore dell'orbita della Terra, come stazioni per una intersezione in avanti, cioè per una misura destinata a valutare una grande distanza, come quella di un corpo celeste (fig. 9). Ci serviremo, a questo scopo, di uno strumento capace di misurare gli angoli con elevatissima precisione. Tuttavia, per quanto sia perfezionato, lo strumento commetterà pur sempre un errore, e la misura sarà affetta da una incertezza che può essere, essa stessa, valutata. Supponiamo che questa incertezza sia pari φ frazioni di grado, allora potremo dire che l'angolo formato da due rette parallele con una trasversale ad esse ortogonale varia da $(\pi/2 - \varphi)$ a $(\pi/2 + \varphi)$ e misurare la distanza entro la quale si è certi del loro comportamento, perché si è certi della misura, al di là della quale il problema è in-

determinato. Quella distanza, non fissa, perché la misura potrà essere sempre migliorata, è la soglia che assumiamo come limite dei luoghi determinati dello spazio, limite che, se varcato, conduce nello spazio indeterminato dei punti *I*.

Tutto ciò premesso si può far uso dei termini direzione e giacitura nei modi esplicitati da Enriquez[39]. Si verifica, infatti, che, alla luce di quanto abbiamo stabilito, gli enunciati relativi alle direzioni e alle giaciture dello spazio conservano il loro valore.

Così, ad esempio: *un punto e una direzione individuano una retta* è ancora valido se alla direzione si sostituiscono mentalmente i corrispondenti punti *I* che la individuano, e cioè se alla direzione si sostituisce una retta o un segmento finito, come appunto si fa nelle costruzioni grafiche.

E, ancora: *due direzioni determinano una giacitura, cui appartengono*, è ancora valido se alle due direzioni, distinte, si sostituiscono due segmenti finiti, perché preso un punto qualsiasi sopra uno dei due segmenti, e costruito per questo punto un segmento parallelo all'altro, resta individuato un piano, la cui giacitura è quella individuata dalle due distinte direzioni; ed è ciò che, operativamente, si compie quando si costruisce, in generale, una giacitura per mezzo di un piano che le appartiene e la rappresenta.

Osservando come, nella pratica del disegno e della costruzione geometrica, si procede, di fatto, per aggirare l'impossibilità di operare sull'infinito, verrebbe da dire che la soluzione qui proposta non rappresenta nulla di nuovo, poiché è già implicitamente contenuta nelle procedure della geometria descrittiva.

Possiamo tornare, in conclusione, alla domanda che avevamo posta in principio: chi o che cosa rappresenta il punto *I'r*?

Io credo che alla luce delle considerazioni suesposte si possa rispondere semplicemente così:

1) in primo luogo, *I'r* non è un punto, ma una regione del piano di quadro, piccola quanto si vuole ma, ove sia necessario, misurabile (le si potrebbe assegnare, ad esempio, un diametro pari allo spessore del pennino usato per disegnare);
2) *I'r* rappresenta allora, nella prospettiva, una zona dello spazio *I indeterminata* in ampiezza, nella quale la retta oggettiva e la retta proiettante hanno un comportamento non più controllabile, possono cioè, incontrarsi o meno; questo modo di concepire la zona indeterminata non esclude che si possa calcolare dove essa ha inizio (ciò dipende dalla qualità dei nostri strumenti), ma soltanto esclude che si possa misurarne l'estensione;
3) *I'r* rappresenta, al tempo stesso, la zona *I* indeterminata posta da una parte e dall'altra della retta;
4) ricordando quanto abbiamo detto della direzione individuata da due punti *I*, si può dire, in breve, che *I'r* è l'immagine della direzione della retta.

Analoghe considerazioni possono, evidentemente, essere svolte per la fuga di un piano intesa come immagine della giacitura di una retta.

Il punto di fuga è dunque, a buon diritto, un *vanishing point*, né proiezione di punto all'infinito, né di punto improprio, ma più semplicemente immagine di un luogo inaccessibile e perciò indeterminato.

Gli sviluppi successivi di questa concezione attengono alla possibilità effettiva di operare, in generale e cioè anche al di là della prospettiva, senza usare i punti all'infinito, bensì utilizzando esclusivamente enti geometrici finiti. Non escludo affatto questa possibilità, ma debbo riservarmi di discuterla in altra sede, ammesso e non concesso che ne valga la pena, e cioè che lo sviluppo dell'idea possa portare ad un modo più semplice e più generale di porre questi problemi. Spero, per il momento, che questa mia fatica sia valsa almeno a stimolare una riflessione sull'argomento, troppo spesso liquidato con le forti ma apodittiche definizioni della geometria proiettiva classica.

□ *Riccardo Migliari – Dipartimento di Rappresentazione e Rilievo, Università degli Studi di Roma «la Sapienza»*

Desidero ringraziare Mario Docci e Achille Pascucci, per avermi incoraggiato a pubblicare questo studio, Roberto de Rubertis per avermi aiutato, col suo dissenso, a rinforzare le mie prime deduzioni e soprattutto Anna Sgrosso, per la meticolosa revisione del testo e per i suoi numerosi e illuminanti suggerimenti.

1. Cfr. F. Kaufmann, *L'infinito in matematica*, Gardolo di Trento, 1990, IV, p. 191, edizione italiana a cura di Liliana Albertazzi del testo originale *Das Unendliche in der Mathemattik und seine Ausschaltung. Eine Untersuchung über die Grundlagen der Mathematic* (L'infinito nella matematica e la sua esclusione. Una ricerca sui fondamenti della matematica), Leipzig und Wien, 1930.

2. Cfr. O. Fasolo, *Intervista immaginaria di un giovane appassionato d'architettura con dieci insigni geometri sulla natura, sul metodo, sull'importanza della Geometria Descrittiva, negli studi di architettura*, in «Quaderni di applicazioni della Geometria Descrittiva», n. 1, Roma, 1982.

3. Mi sia consentito di abbandonare il linguaggio rigorosamente geometrico a favore della metafora, almeno quando ciò si può fare senza danno, riportando in nota i termini corretti, e ciò a favore di una comunicazione più facile e immediata.

4. In termini squisitamente geometrici proiettiamo la retta *r* da *O'* su π': ciò significa costruire il piano *a* individuato da *r* e *O'* e la retta *r'* che detto piano ha in comune con π'. Per costruire *r'*, conduciamo per *O'* la retta r^0, parallela a *r*; orbene, la retta *r* incontra il quadro π' nel punto *T'r*, la retta r^0 lo incontra nel punto *I'r*, dunque *r'* è individuata, perché, in quanto retta intersezione di α con π', deve appartenere ai punti in cui due rette del piano α incontrano π'. La retta *r'* è dunque la proiezione o immagine della retta *r*, così come la vede *O'* e, infatti, per l'osservatore *O'*, che si trova, per costruzione, nel piano cui appartengono tanto *r* quanto *r'*, le due rette si confondono in una, e noi potremo togliere dalla scena l'una o l'altra senza che egli possa avvedersene. La retta *r'*, corredata dei due punti *I'r* e *T'r* è inoltre la rappresentazione della retta oggettiva *r*, nel senso che, noto che sia il centro di proiezione *O'* è possibile attraverso *r'(T'-rI'r)* ricostruire la retta oggettiva *r* nella esatta posizione che occupava nello spazio all'atto della proiezione; per far ciò basta osservare che la retta oggettiva *r* appartiene al punto *T'r* ed è, per costruzione, parallela alla retta (*O'I'r*).

5. Riportiamo, per brevità, l'assioma delle parallele di Lobacevskij, così come è enunciato da Gino Fano: cfr. G. Fano, *Geometria non euclidea, introduzione geometrica alla teoria della relatività*, Bologna, 1935, cap. II, § 15.

6. In tal modo l'assioma delle parallele è enunciato in E. Agazzi – D. Palladino, *Le geometrie non euclidee e i fondamenti della geometria*, Milano, 1978, cap. 5, § 5.1.

7. Cfr. G. del Monte, *Guidiubaldi è Marchionibus Montis Perspectivae Libri Sex*, Pesaro, 1600, nonché la traduzione e il commento di R. Sinisgalli, *I sei libri della prospettiva di Guidoubaldo dei Marchesi del Monte dal latino tradotti interpretati e commentati da Rocco Sinisgalli*, Roma, 1984.

8. Cfr. M. Docci – R. Migliari – C. Bianchini, *Le «vite parallele» di Girard Desargues e Guarino Guarini, fondatori della moderna scienza della rappresentazione*, in «Disegnare, idee immagini», a. III, n. 4, Roma, 1992.

9. Cfr. Euclide, *L'optique et la catoptrique*, a cura di P. Ver Eecke, Paris, 1938, Prop. IV, p. 3.

10. Cfr. il breve ma fondamentale contributo di U. Cassina, *La prospettiva e lo sviluppo dell'idea dei punti all'infinito*, nel «Periodico di Matematiche, Storia – Didattica – Filosofia», Organo della Società Italiana di Matematiche «Mathesis» diretta da F. Enriquez e G. Lazzeri, sez. IV, v. I, Bologna, 1921, pp. 326-337.

11. Cfr. R. Taton, *L'œuvre mathématique de Girard Desargues, textes publiés et commentés avec une introduction biographique et historique*, Parigi, 1951, e, in particolare, *Brouillon proiect d'une atteinte aux evenements des rencontres du Cone avec un Plan, par L, S, G, D, L*, pp. 100 e sgg.

12. «N.B. When the Original Line it self passes throught its Vanishing Point, the whole Projection of it will be that Point; so that in that case the line may be said to vanish. This is one Reason for my useing that Term. Another Reason is that the further any Object is off, upon any Line, the smaller in its Projection, and at the same time, the nearer to this Point; and when it comes into this Point, its Magnitude vanishes because the Original Object is at an infinite Distance. This is easily conceived by imagining a Man to be going from you in a long Walk, who appears to be smaller and smaller, the further he goes.»

13. Cfr. J.V. Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures, ouvrage utile a ceux qui s'occupent des applications de la géométrie descriptive et d'opération géométriques sur le terrain*, Paris, 1865, sez. I, cap. II, § 96, (prima edizione 1822).

14. «Tous les points à l'infini de l'espace peuvent être censés appartenir à un seul et même plan, nécessairement indéterminé de situation» (Cfr. J.V. Poncelet, *op. cit.*, Supplément, § 580, p. 361).

15. Le deduzioni di Poncelet derivano dalla applicazione del principio di continuità, che egli enuncia nella introduzione della sua opera, avvertendo, tuttavia che: «l'ammissione ampia del principio di continuità, nelle ricerche geometriche, condurrà necessariamente a nozioni singolari e a veri e propri paradossi» (*op. cit.*, cap. XV). Peraltro Poncelet è esplicito nel definire «metafisica nozione» (*op. cit.*, sez. I, cap. III, § 107, p. 52) e non certo postulato, l'idea della retta all'infinito.

16. Il termine è dello stesso Reye, che lo introduce per assimilare il punto all'infinito ai punti dello spazio accessibile e determinato; cfr. T. Reye, *Geometria di posizione*, Venezia, 1884, pp. 17 e sgg., edizione italiana, a cura di Aureliano Faifofer, dall'originale *Die Geometrie der Lage*, Hannover, 1866-1868. Il medesimo termine si trova più tardi pienamente e compiutamente accettato, cfr. ad esempio A. Comessatti, *Lezioni di Geometria Analitica e Proiettiva*, Padova, 1947.

17. Anche questo termine è accennato da Reye, insieme al termine *posizione*, per indicare la giacitura dei piani, ma si trova accettato e, anzi, preferito agli altri soltanto in tempi recenti: cfr. O. Chisini, *Lezioni di Geometria Analitica e Proiettiva*, Bologna, 1967. Chisini non si sofferma a lungo sulla questione, che giudica comunque critica, limitandosi ad osservare come i termini *direzione* e *giacitura* si possano sostituire rispettivamente alle parole *punto* e *retta*, «nelle espressioni che danno proprietà grafiche (di congiungimento o intersezione relative a punti, rette e piani) della geometria, ottenendo enunciati ancora veri».

18. A questo proposito val la pena di registrare qui la chiarissima posizione di Teodoro Reye «Noi perveniamo al punto all'infinito di una retta immaginando un punto che si muove sulla retta sempre nello stesso senso, sia poi in una direzione sia nella direzione opposta. Il punto all'infinito si trova adunque ad un tempo e da una parte e dall'altra della retta; e la retta ci apparisce come una linea chiusa, i cui due rami si congiungono nel punto all'infinito. A questa conchiusione siamo forzatamente condotti dal momento che accettiamo l'idea, superiormente giustificata, che ogni retta ha un punto all'infinito e uno soltanto. Vedremo più innanzi che nel modo stesso i due rami di una iperbole si devono riguardare come congiunti all'infinito. L'analisi conduce a risultamenti affatto consimili, dacché in numerosi esempî mostra che si può passare dal positivo al negativo non soltanto per lo zero ma anche per l'infinito» Cfr. T. Reye, *op. cit.*, alla nota 16.

19. Cfr. G. Fano, *Lezioni di Geometria Descrittiva*, date nel R. Politecnico di Torino, Torino, 1925.

20. Cfr. A. Comessatti, *Lezioni di Geometria Descrittiva con applicazioni*, Padova, 1939.

21. Cfr. O. Chisini – G. Masotti Bigioggero, *Lezioni di Geometria Descrittiva*, Milano, 1972.

22. Cfr. G. Fiedler, *Trattato di Geometria Descrittiva*, Firenze, 1874, edizione italiana a cura di A. Sayno ed E. Padova dell'originale *Die Darstellende Geometrie*, 1871.

23. Un modo affatto diverso di porre la questione consiste nel porre gli enti all'infinito tra i postulati (sebbene con qualche riserva) e nel dedurre gli enunciati che sono validi, senza necessariamente dare al principio della sostituibilità degli enti propri con quelli impropri corrispondenti una validità generale. Si evitano, così, contraddizioni e paradossi. È questa la via seguita da Federigo Enriquez, che è anche, mi sembra, tra i manualisti, l'autore che ha dedicato al problema l'analisi più approfondita e convincente. Cfr. F. Enriquez, *Lezioni di Geometria Proiettiva*, Bologna, 1926, cap. I, § 2.

24. Vedi la nota precedente.

25. F. Kaufmann, *op.cit.*

26. Cfr. P. Zellini, *Breve storia dell'infinito*, Milano, 1980, cap. 13.

27. Cfr. R. Thom, *Stabilità strutturale e morfogenesi*, cap. I, § 1.3.

28. Cfr. L. Campedelli, *Fantasia e logica nella matematica*, Milano, 1966, cap. V, § 5: «Gli scienziati sono pervenuti a ritenere che la geometria iperbolica possa trovare una realizzazione nella fenomenologia dell'universo. È ciò accaduto perché cento e più anni prima i matematici avevano avuto l'idea di costruire razionalmente quelle geometrie? o non piuttosto è avvenuto il contrario, cioè, cento e più anni fa i matematici sono giunti a concepire le geometrie non euclidee perché queste, anche se la cosa non era loro nota, trovavano una realizzazione nel mondo che ci circonda?».

29. Cfr., ad esempio, L. Campedelli, *Lezioni di Geometria*, Padova, 1970, v. I, parte III, cap. I, § 1, p. 134.

30. La giacitura, vale a dire la retta impropria del piano, intesa come cerchio di raggio infinito.

31. Il riferimento alla critica operazionale della scienza vuole essere qui soltanto marginale.

32. Cfr. P.W. Bridgman, *La critica operazionale della scienza*, Torino, 1969.

33. La tartaruga sfida Achille a una gara di corsa, ottenendo un certo vantaggio iniziale. Achille accetta la sfida e la perde. Infatti non riuscirà mai a raggiungere la tartaruga, perché prima dovrà superare la metà della distanza che lo separa dalla rivale, poi la metà della metà, e così via, all'infinito.

34. E che consente di ricostruire la retta data nello spazio attraverso la sua rappresentazione, così come è precisato nella nota 4.

35. Cfr. N. I. Lobacevskij, *Nuovi principi della geometria*, Torino, 1974 (prima edizione 1835-1838), cap. VII, § 93. Data una retta e un punto, distinti, Lobacevskij postula, com'è noto, l'esistenza di due rette parallele alla data, che formano, con questa, un dato angolo di parallelismo. Le rette comprese tra queste due parallele si dicono divergenti.

36. Cfr. G. Fano, *Geometria non euclidea, introduzione geometrica alla teoria della relatività*, Bologna, 1935, cap. II, § 22.

37. Cfr. G. Fano, *op. cit.*, cap. IV, § 52.

38. Inutile dire che l'idea di collegare a quest'ipotesi i cosiddetti buchi neri è del tutto fantasiosa e per di più illogica, perché cerca di spiegare ciò che si conosce poco con ciò che si conosce ancor meno e deve essere lasciata, per il momento, ai romanzi di fantascienza.

39. Cfr. F. Enriquez, *op. cit.*, pp. 10 e sgg.

La perspective et l'infini

La perspective est peut-être l'unique instrument mathématique qui permet de traiter l'infini en termes finis. Le point de fuite est, apparemment, l'image d'un point infiniment lointain; en réalité, un examen attentif de l'histoire de ce concept géométrique, de Guidobaldo del Monte à Poncelet, en passant par les intuitions de Desargues et de Taylor, conduit à tirer des conclusions fort différentes.

En premier lieu, le point de fuite n'est pas un point mais une région du tableau, pour aussi petit qu'il soit mais, le cas échéant, mesurable.

Le point de fuite représente alors, dans la perspective, une zone de l'espace I indéterminée *en ampleur, dans laquelle la droite objective et la droite projetante ont un comportement qui n'est plus contrôlable: elles peuvent en d'autres termes se rencontrer ou pas; cette façon de concevoir la zone indéterminée n'exclut pas que l'on puisse calculer son point de départ (en fonction de la qualité de nos instruments), mais exclut uniquement que l'on puisse en mesurer l'étendue.*

Le point de fuite, en outre, représente, en même temps, la zone indéterminée située de part et d'autre de la droite. Compte tenu enfin de ce que l'on sait sur la direction identifiée par deux points, on peut dire, en bref, que le point de fuite est l'image de la direction de la droite. Il doit cependant être clair que, tandis que les points I appartiennent à la famille des entités géométriques déjà définies par Euclide, la direction est simplement une qualité de la droite et, en tant que telle, n'a pas de lieu, ne se trouve autrement dit ni près ni loin, aussi bien dans l'espace physique que dans l'espace mental.

Le point de fuite est donc, à juste titre, un vanishing point, *non pas projection d'un point à l'infini, mais plus simplement image d'un lieu inaccessible et donc indéterminé.*

On peut naturellement se livrer à des considérations analogues pour la fuite d'un plan entendue comme image de la position.

Les développements ultérieurs de cette conception relèvent de la possibilité effective d'opérer en général, et donc au-delà même de la perspective, sans utiliser les points à l'infini, mais au contraire en ayant recours exclusivement à des entités géométriques finies.

Perspective and infinity

Perspective is perhaps the only mathematical tool that enables us to deal with infinity in finite terms. The vanishing point is, apparently, the image of a point at located at an infinite distance; in reality, a close study of the history of this geometric concept, from Guidoubaldo del Monte to Poncelet, and including the intuitions of Desargues and Taylor, leads us to draw very different conclusions.

In the first place, the vanishing point is not a point, but a region of the picture plane, as tiny as can be but, where necessary, measurable.

In a drawing in perspective, the vanishing point therefore represents an area of space I undetermined *in extension, in which the objective line and the projecting line behave in a way that is no longer controllable: they may or may not converge; this way of conceiving the undetermined area does not mean that we cannot determine its starting point (depending on the quality of our instruments), it only excludes that we can measure its extension.*

At the same time, the vanishing point also represents the undetermined area located on either side of the line.

Bearing in mind what we know about the direction determined by two points, we can say that the vanishing point is the image of the direction of the line. It must be clear, however, that, whereas the points I belong to the family of geometric concepts defined by Euclid, the direction is simply a quality of the line and, as such, it has no locus, because it is neither near nor distant, either in physical space or in mental space.

The vanishing point is, by definition, neither the projection of a point to infinity nor an improper point, but simply the image of an inaccessible and therefore undetermined position.

Similar considerations, of course, can apply to the vanishing of a plane understood as the image of the position.

Subsequent developments of this concept are related to the effective possibility of operating in general, that is, beyond the perspective, without using points at infinity but, on the contrary, exclusively using finite geometric concepts.