# Onde stazionarie (FMUV 11.11, FMU 11.5)

Un caso molto significativo e importante di interferenza tra onde sinusoidali monocromatiche si ha quando due onde identiche si sovrappongono procedendo in direzioni opposte:

$$f_1 = A\cos(kx - \omega t); \quad f_2 = A\cos(kx + \omega t)$$

La sovrapposizione è data da

$$f_1 + f_2 = A\big(\cos(kx - \omega t) + \cos(kx + \omega t)\big) = 2A\cos kx \cos \omega t$$

La dipendenza temporale e spaziale sono ora completamente disaccoppiate, non c'è più nulla che si propaga.

Ogni elemento del mezzo oscilla nel tempo di moto armonico, con una ampiezza che dipende dalla posizione nello spazio dell'elemento.

Queste onde non si propagano, sono onde stazionarie!

Nel mezzo ci sono dunque dei punti fermi (nodi) e dei punti di massima oscillazione (ventri).

I ventri si hanno per $kx = \pm n\pi$ con $n = 0,1,2\ldots$

I nodi si hanno per $kx = \pm\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$ con $n = 0,1,2\ldots$

In quali condizioni si stabiliscono onde di questo tipo?

# Corda fissata ad entrambi gli estremi (FMUV 11.11.1, FMU 11.9)

Se una corda vibrante è fissata a due estremi, queste due posizioni $x = 0$ e $x = L$ devono costituire due nodi.

Per due nodi successivi deve essere $\Delta(kx) = \pi$ ossia $kL = \pi$, per cui si ottiene $k = 2\pi/\lambda = \pi/L \quad \Rightarrow \quad L = \lambda/2$, ossia la lunghezza della corda è pari a mezza lunghezza d'onda.

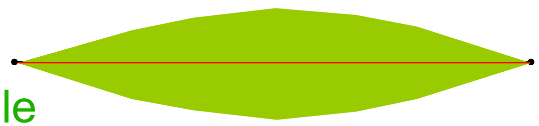
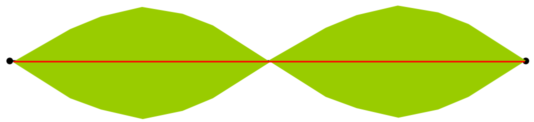
Ma la stessa condizione si realizza con $L = n\lambda/2; n = 1,2,3...$

Combinando questa espressione con la relazione tra frequenza e velocità, $V = \lambda\nu$, e con l'espressione della velocità di un'onda su una corda, vediamo che un'onda stazionaria su una corda può avere una frequenza pari a:

$$\nu = \frac{Vn}{2L} = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}, \quad \text{con} \quad n = 1,2,3...$$

Considerare come esempio le frequenze emesse dalla corda di uno strumento

Fissata la tensione e la densità lineare di massa della corda, sono possibili tutte le frequenze multiple della frequenza con $n = 1$, detta frequenza fondamentale, mentre le altre sono dette armoniche.

fondamentale   prima armonica

# Ancia vibrante (FMUV 11.11.2, FMU 11.13)

Nel caso di un'ancia vibrante (analogo al caso di una canna nella quale si propagano onde longitudinali di pressione), solo uno dei due estremi è fisso, mentre l'altro è libero di vibrare alla massima ampiezza.

Il primo estremo deve corrispondere ad un nodo, mentre l'estremo libero corrisponde ad un ventre.

La lunghezza dell'ancia (o della canna) deve corrispondere quindi ad un quarto di lunghezza d'onda, o ad un multiplo dispari di essa:

$$L = (2n+1)\frac{\lambda}{4} = \frac{1}{4}\lambda,\ \frac{3}{4}\lambda,\ \frac{5}{4}\lambda, \ldots$$

In uno strumento musicale di questo tipo sono quindi presenti solo le armoniche dispari della fondamentale $\nu_0 = \dfrac{V}{\lambda} = \dfrac{V}{4L}$:

$$\nu = \nu_0,\ 3\nu_0,\ 5\nu_0,\ \ldots$$

Questo spiega la differenza di timbro che hanno strumenti nei quali si realizzano l'una o l'altra delle due condizioni.

# Riflessioni (FMUV 11.10.1, FMU 11.14)

La generazione di un'onda stazionaria come sovrapposizione di due onde identiche, ma dirette in senso opposto, si può spiegare in termini semplici con considerazioni energetiche che possono poi essere generalizzate.

Cosa succede quando un'onda che si propaga raggiunge un estremo del sistema vibrante?

Se l'onda raggiunge un punto fermo, l'energia trasportata non può procedere oltre e, se non c'è dissipazione, dovrà tornare indietro (onda retrograda)

E' immediato vedere che se l'onda progressiva e l'onda retrograda sono uguali ma di segno opposto, la loro sovrapposizione nell'estremo dà sempre un valore nullo, come richiesto dal vincolo. L'onda quindi si riflette invertendosi.

In generale, se l'onda si propaga da un mezzo ad un altro, con caratteristiche diverse, per esempio con velocità di propagazione diverse, possiamo aspettarci che l'energia incidente sarà in parte trasmessa nel secondo mezzo, in parte riflessa nel primo.