Thm. DUNFORD-PETTIS $|\Omega| < \infty$.

$\mathcal{F} \subset L^1(\Omega)$ è relativamente compatto in L^1 debole
cioè in $\sigma(L^1(\Omega), L^\infty(\Omega))$

se e solo se

$\mathcal{F}$ è limitato e unif^{te} equi-integrabile

Abbiamo provato l'implicazione $\boxed{\Longrightarrow}$

Oggi proviamo $\boxed{\Longleftarrow}$

Step 1 X spazio di Banach $\mathcal{F}$

Supponiamo che $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \mathcal{F}_\varepsilon \subset X$ debolmente compatto in X

t.c. $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_\varepsilon + \varepsilon B$

Allora $\mathcal{F}$ è rel. compatto in $\sigma(X, X^*)$.

DIM Sia $J : X \to X^{**}$ l'iniezione canonica.

$$J(\mathcal{F}) \subset J(\mathcal{F}_\varepsilon + \varepsilon B) = J(\mathcal{F}_\varepsilon) + \varepsilon J(B) \subset$$

$$\underbrace{\subset J(\mathcal{F}_\varepsilon) + \varepsilon\, B^{**}}_{\text{Somma di compatti, è compatta}}$$

compatto debolmente e quindi anche $*$-debolmente $(\sigma(X^{**}, X^*))$

compatto in $\sigma(X^{**}, X^*)$

$$\Rightarrow \overline{J(\mathcal{F})}^{\sigma(X^{**},X^*)} \subset J(\mathcal{F}_\varepsilon) + \varepsilon B^{**} \subset J(X) + \varepsilon B^{**}$$

Questo è vero $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow$

$$\overline{J(\mathcal{F})}^{\sigma(X^{**},X^*)} \subset J(X)$$

$$J^{-1} : J(X) \longrightarrow X.$$

<u>oss</u> è continua da

$(J(X), \sigma(X^{**}, X^*))$ a $(X, \sigma(X, X^*))$

(basta scriversi gli intorni).

$$\Rightarrow \mathcal{G} = J^{-1}\left(\overline{J(\mathcal{F})}^{\sigma(X^{**},X^*)}\right)$$ è un compatto $\sigma(X, X^*)$

$$\mathcal{G} \supset \mathcal{F}$$

$\Rightarrow \mathcal{F}$ è contenuto in un compatto debole (quindi nel compatto).

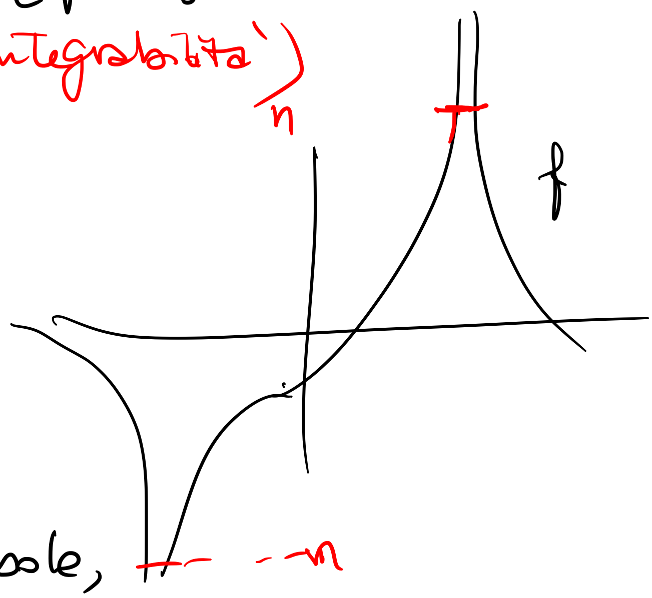
Step 2 Mostriamo che $\forall \varepsilon$

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_\varepsilon + \varepsilon B$$

↑ deb. compatto in L^1.

Fissato $\varepsilon > 0$, trovo n t.c. $\displaystyle\int_{\{|f|>n\}} |f|\,dx < \varepsilon \quad \forall f \in \mathcal{F}$

(equivale all'unif. equi-integrabilità)



$$\mathcal{F}_\varepsilon = \{T_n(f)\}_{f \in \mathcal{F}}$$

$\mathcal{F}_\varepsilon$ è limitato in L^∞ $\Longrightarrow$

$\Rightarrow$ $\mathcal{F}_\varepsilon$ è rel. compatto in L^1 debole, anzi, in L^p debole, $(p>1)$ anzi in L^∞ $*$-debole.

$\forall f \in \mathcal{F}$

$$\|f - T_n(f)\|_{L^1} = \int_{\{|f|>n\}} (|f| - n)\,dx \le \int_{\{|f|>n\}} |f|\,dx < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_\varepsilon + \varepsilon B$ e si può applicare lo step 1.

Applicazione a pb. al contorno alle derivate parziali.

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto limitato.

Sia $f(x): \Omega \to \mathbb{R}$ assegnato.

Siamo interessati al seguente pb differenziale

$$(P) \quad \begin{cases} \underbrace{-\Delta u}_{= -\sum_{i=1}^N u_{x_i x_i} = -\operatorname{div}(\nabla u)} + u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Sia Ω regolare, f continua e limitata in Ω

Stiamo cercando una $u \in C^2(\overline{\Omega})$ verificante (P) in senso classico. Chiameremo u sol. classica di P.

STEP 1 PASSAGGIO A UNA SOL. DEBOLE.

Se u è una sol^{ne} classica di P, posso moltiplicare l'eq^{ne} per $\varphi \in C_0^1(\Omega)$ e integro per parti

$$\underbrace{-\int_\Omega \Delta u \, \varphi}_{= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi} + \int_\Omega u \varphi = \int f \varphi$$

$$\Rightarrow \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi + \int_\Omega u \varphi = \int_\Omega f \varphi \quad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega)$$

$\Rightarrow$ Per densità

$$(*) \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega u v \, dx = \int_\Omega f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Questo suggerisce la nozione di sol^{ne} debole di (P)

DEF Sia $f \in L^2(\Omega)$ Una sol^{ne} debole di (P) è una funzione $u \in H_0^1(\Omega)$ t.c. valga $(*)$ $\forall v \in H_0^1(\Omega)$.

Abbiamo provato che una sol^{ne} classica è una sol^{ne} debole.

Step 2 Esistenza e unicità di una sol^{ne} debole.

Sia Ω aperto limitato di $\mathbb{R}^N$. Sia $f \in L^2(\Omega)$
Allora $\exists!\, u$ sol^{ne} debole di (P)

1° modo Usiamo il teorema di Riesz-Frechet

TEOREMA H spazio di Hilbert
Dato un funzionale $\varphi \in H^*$ $\exists!\, u \in H$ t.c. $\langle \varphi, v \rangle = (u, v)$ e $\|\varphi\|_{H^*} = \|u\|_H$

In pratica è un'identificazione di H^* con H.

La def. di sol^{ne} debole si legge come:

$$(u,v)_{H^1_0(\Omega)} = \underbrace{\int_\Omega f\, v\, dx}_{\varphi(v)} \qquad \forall v \in H^1_0$$

$$\varphi(v) := \int_\Omega \underset{L^2}{\underset{\cap}{f}}\, \underset{L^2}{\underset{\cap}{v}}\, dx \qquad \forall v \in H^1_0 .$$

φ è lineare

φ è continuo in H^1_0

$$|\varphi(v)| = \left|\int_\Omega f\, v\, dx\right| \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq$$

$$\leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{H^1_0}$$

$$\Rightarrow \varphi \in H^* = (H^1_0(\Omega))^*$$

Il teorema di Riesz-Frechet fornisce proprio l'esistenza e l'unicità della sol^{ne} debole.

Inoltre $\qquad \|u\|_{H^1_0} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}$

Altro approccio possibile:

tramite il metodo diretto del Calcolo delle Variazioni e il principio di Dirichlet.

TEOREMA u è sol^{ne} debole di (P) se e solo se $u \in H^1_0(\Omega)$ è pto di minimo del funzionale

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega v^2 dx - \int_\Omega f v \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \|v\|^2_{H^1_0} - \int_\Omega f v \, dx \quad \text{in } H^1_0(\Omega)$$

Supponiamo di averlo provato.

Mostriamo che $J(v)$ ammette minimo in $H^1_0(\Omega)$

Prendo $\{v_n\} \subset H^1_0(\Omega)$ succ^{ne} minimizzante di J.

$v_n \in H^1_0(\Omega) \qquad J(v_n) \longrightarrow \inf_{v \in H^1_0(\Omega)} J(v)$

Allora $\{v_n\}$ limitata in $H^1_0(\Omega)$.

Infatti:

$$J(v) = \frac{1}{2}\|v\|^2_{H^1_0} - \int_\Omega f v \, dx.$$

<u>oss</u> $\int_\Omega f v \, dx \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq$

$$\leq \|f\|_{L^2} \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}} \|v\|_{H^1_0} \leq \frac{1}{2\varepsilon}\|f\|^2_{L^2} + \frac{\varepsilon}{2}\|v\|^2_{H^1_0}$$

$$J(v) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right)\|v\|^2_{H^1_0} - \frac{1}{2\varepsilon}\|f\|^2_{L^2}$$

Scelgo $\varepsilon = \frac{1}{2}$

$$J(v) \geq \frac{1}{4}\|v\|^2_{H^1_0} - \|f\|^2_{L^2}$$

$$J(v_n) \leq c$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\|v_n\|^2_{H^1_0} \leq c + \|f\|^2_{L^2} \leq c'$$

$\{v_n\}$ sono limitate $\Rightarrow$ posso estrarre una sottosucc^{ne} $\{v_n\}$ t.c. $v_n \rightharpoonup u$ $H^1_0(\Omega)$

$\Rightarrow v_n \to u$ $L^2(\Omega)$ (anzi converge forte $L^2(\Omega)$)

$$\|u\|^2_{H^1_0} \leq \liminf_n \|v_n\|^2_{H^1_0}$$

$$\int_\Omega f v_n \longrightarrow \int f u$$

$$J(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2_{H^1_0} - \int_\Omega f u \leq$$

$$\leq \liminf_n J(v_n) = \inf_{v \in H^1_0} J(v)$$

$$\Rightarrow J(u) = \min_{v \in H^1_0(\Omega)} J(v)$$

Unicità

Mostriamo l'equivalenza tra sol^{ne} debole e pb. di minimo.

u sol^{ne} debole di (P) $\Rightarrow$ u minimo di J

$\Downarrow$

$$(u,w)_{H^1_0} = \int_\Omega f\, w\, dx \qquad \forall w \in H^1_0(\Omega)$$

Prendo $w = u - v \qquad v \in H^1_0$

$$(u, u-v)_{H^1_0} = \int_\Omega f(u-v)$$

$$\|u\|^2_{H^1_0} - (u,v)_{H^1_0} = \int_\Omega f u - \int_\Omega f v.$$

$$\|u\|^2_{H^1_0} - \int_\Omega f u = (u,v)_{H^1_0} - \int_\Omega f v \qquad \forall v \in H^1_0$$

$$(u,v)_{H^1_0} \leq \|u\|_{H^1_0} \|v\|_{H^1_0} \leq \frac{1}{2}\|u\|^2_{H^1_0} + \frac{1}{2}\|v\|^2_{H^1_0}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\|u\|^2_{H^1_0} - \int_\Omega f u \leq \frac{1}{2}\|v\|^2_{H^1_0} - \int_\Omega f v \qquad \forall v \in H^1_0$$

$$J(u) \leq J(v) \qquad \forall v \in H^1_0(\Omega)$$

2^a se u minimizza J su H^1_0, allora è sol^{ne} debole di (P).

$$J(u) \le J(v) \qquad \forall v \in H^1_0(\Omega)$$

$$J(u) \le J(u+tv) \qquad \forall v \in H^1_0(\Omega) \quad \forall t > 0$$

$$\cancel{\frac{1}{2}\|u\|^2_{H^1_0}} - \cancel{\int_\Omega f u} \le \frac{1}{2} \underbrace{\|u+tv\|^2_{H^1_0}}_{\cancel{\|u\|^2_{H^1_0}} + t^2\|v\|^2_{H^1_0} + 2t(u,v)} - \int f(\cancel{u}+tv)$$

Divido per t

$$0 \le \frac{t}{2}\|v\|^2_{H^1_0} + (u,v)_{H^1_0} - \int f v \, dx$$

faccio $t \to 0$

$$(u,v)_{H^1_0} \ge \int_\Omega f v \, dx \qquad \forall v \in H^1_0.$$

cambio $v \to -v$

$$(u,v) \le \int_\Omega f v \, dx$$

$$\Rightarrow \quad (u,v)_{H^1_0} = \int_\Omega f v \, dx \qquad \text{def}^{ne} \text{ di sol}^{ne} \text{ debole}$$

STEP 3 Regolarità. (parte più delicata)

Sia u una sol^{ne} debole di (P).

Supponiamo che "tutto sia regolare"

($\partial\Omega$ regolare e f regolare), allora la sol^{ne} deb. u non è soltanto $H^1_0(\Omega)$ ` ù regolare.

ESEMPIO DI TEOREMA DI REGOLARITÀ.

Sia Ω un aperto limitato di classe C^2.
Sia $f \in L^2(\Omega)$ e sia $u \in H^1_0(\Omega)$ sol^{ne} debole di (P). Allora $u \in W^{2,2}(\Omega) = H^2(\Omega)$.

(cioè ammette derivate parziali deboli del 2° ordine in $L^2(\Omega)$).

e si ha $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c(\Omega)\, \|f\|_{L^2}$.

Se Ω e f sono ancora più regolari, per es.

Ω di classe C^{m+2}, $f \in H^m(\Omega)$

Allora $u \in H^{m+2}(\Omega)$ (+ stima).

$W^{2,p}(\Omega) = \{ u \in L^p(\Omega)$ che ammette derivate deboli fino al 2° ordine tutte in $L^p(\Omega)\}$

$v_{ij} \in L^p(\Omega)$ si dice derivata seconda debole di u rispetto a x_i e x_j se

$$\int_\Omega u \, \varphi_{x_i x_j} = \int_\Omega v_{ij} \, \varphi \qquad \forall \varphi \in C_0^2(\Omega)$$

Valgono immersioni di tipo Morrey. (Ω regolare)

$W^{m,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ se $p > \frac{N}{m}$

$W^{m+2,p}(\Omega) \subset C^2(\overline{\Omega})$ se $p > \frac{N}{m}$

Per avere $C^2(\overline{\Omega})$ $(p=2)$

deve essere $2 > \frac{N}{m}$ cioè $m > \frac{N}{2}$.

Se $m > \frac{N}{2}$, Ω è di classe C^{m+2}

$f \in H^m(\Omega) \Longrightarrow u \in W^{m+2,2} \subset C^2(\overline{\Omega})$

Step 4

Se u è una sol^{ne} debole, e $C^2(\overline{\Omega})$

$\Rightarrow$ è una sol^{ne} classica