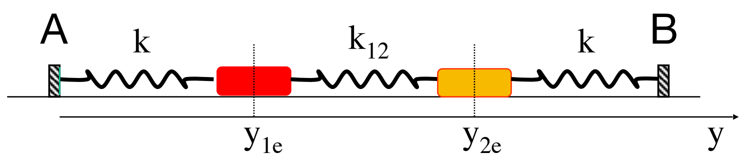
Oscillatori accoppiati

Appunti per il corso di Meccanica

Egidio Longo

a.a. 2018-2019

Studiamo il comportamento di due oscillatori accoppiati, costituiti da due corpi 1 e 2, schematizzabili come punti materiali, entrambi di massa pari ad m, che si muovono senza attrito lungo una retta orizzontale su cui sono fissati due supporti A e B. Il corpo 1 è connesso al supporto A da una molla di costante elastica k. Il corpo 2 è connesso al supporto B da una molla della stessa costante elastica della prima. I due corpi sono inoltre connessi tra di loro da una molla di costante elastica k_{12}. Indicando con y una coordinata lungo la retta, orientata da A a B, chiamiamo y_{1e} e y_{2e} le due posizioni di equilibrio.



Se i due corpi si trovano in due generiche posizioni y_1 e y_2, indichiamo le loro distanze dalle posizioni di equilibrio con $x_1 = y_1 - y_{1e}$ e $x_2 = y_2 - y_{2e}$. La molla di sinistra eserciterà sul corpo 1 una forza pari a $-kx_1$; la molla di destra eserciterà sul corpo 2 una forza pari a $-kx_2$. Considerando che

$$x_2 - x_1 = y_2 - y_{2e} - (y_1 - y_{1e}) = y_2 - y_1 - (y_{2e} - y_{1e})$$

si vede che la lunghezza $x_2 - x_1$, a seconda che sia positiva o negativa, rappresenta l'allungamento o la compressione della molla centrale rispetto alla sua lunghezza all'equilibrio. Quando la molla centrale ha una lunghezza diversa da quella all'equilibrio, eserciterà quindi una forza su 1 pari a $k_{12}(x_2 - x_1)$ e una forza su 2 pari a $-k_{12}(x_2 - x_1)$. Possiamo scrivere quindi le leggi del moto dei due corpi considerando le quattro forze così determinate:

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x_2}{dt^2} = -kx_2 - k_{12}(x_2 - x_1) \\[2ex] m\dfrac{d^2x_1}{dt^2} = -kx_1 + k_{12}(x_2 - x_1) \end{cases}$$

Si tratta di un sistema di due equazioni differenziali in due variabili tra loro accoppiate. Per separarle possiamo sommare e sottrarre le due equazioni precedenti:

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2(x_2+x_1)}{dt^2} = -k(x_2+x_1) \\ \\ m\dfrac{d^2(x_2-x_1)}{dt^2} = -k(x_2-x_1) - 2k_{12}(x_2-x_1) = -(k+2k_{12})(x_2-x_1) \end{cases}$$

Come si vede, abbiamo ora due equazioni differenziali disaccoppiate nelle nuove variabili x_2+x_1 e x_2-x_1. Entrambe hanno come soluzione un moto armonico, ma le pulsazioni sono diverse: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ e $\bar{\omega} = \sqrt{\frac{k+2k_{12}}{m}}$. Le soluzioni sono dunque

$$\begin{cases} x_2 + x_1 = x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \\ \\ x_2 - x_1 = \bar{x} \sin(\bar{\omega} t + \bar{\varphi}) \end{cases}$$

dove $x_0, \bar{x}, \varphi_0$ e $\bar{\varphi}$ possono essere determinati imponendo i valori iniziali delle posizioni e delle velocità dei due punti. Possiamo riottenere le leggi orarie di ciascuno dei due corpi sommando e sottraendo a loro volta le due soluzioni:

$$\begin{cases} x_2(t) = \frac{1}{2}\big(x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) + \bar{x} \sin(\bar{\omega} t + \bar{\varphi})\big) \\ \\ x_1(t) = \frac{1}{2}\big(x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) - \bar{x} \sin(\bar{\omega} t + \bar{\varphi})\big) \end{cases}$$

Poiché x_0 e $\bar{x}$ possono essere fissati indipendentemente uno dall'altro, possiamo chiederci cosa rappresentano i casi in cui uno dei due sia nullo.

Se $\bar{x} = 0$, vuol dire che per tutta la durata del moto $x_2(t) = x_1(t)$. In questo caso, la distanza tra i due oscillatori rimane costante durante tutto il moto: i due oscillatori si spostano quindi in fase tra di loro. Inoltre, la molla centrale si trova sempre alla lunghezza dell'equilibrio. In conseguenza non esercita nessuna forza sui due oscillatori: potrebbe essere sostituita da una bacchetta rigida e il moto non cambierebbe. Questo è il motivo per cui la sua costante elastica non interviene nel moto degli oscillatori e la pulsazione risultante è conseguentemente minore. E' come se un oscillatore di massa pari alla somma delle due masse fosse soggetto a due molle uguali in parallelo: la pulsazione rimane $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Viceversa, se $x_0 = 0$, vuol dire che per tutta la durata del moto $x_2(t) = -x_1(t)$ e gli spostamenti dei due oscillatori sono sempre uguali ed opposti: i due oscillatori sono quindi in opposizione di fase. Ora anche la molla centrale, contraendosi e dilatandosi, esercita la sua forza, in maniera simmetrica, sui due scintillatori. La pulsazione è di conseguenza maggiore: $\bar{\omega} > \omega_0$.

In entrambi i casi tutti e due gli oscillatori si muovono di moto armonico. Questi due possibili modi di oscillazione sono detti "modi normali"; sono gli unici nei quali il moto di ciascuno dei due oscillatori è un normale moto armonico. Per costringere il sistema a oscillare in uno dei due modi normali, è sufficiente che nell'istante iniziale i due punti siano lasciati liberi, con velocità nulla, in posizioni corrispondenti a due spostamenti dalla posizione di equilibrio della stessa distanza: nella stessa direzione per avere $\bar{x} = 0$ (modo in fase) o nella direzione opposta per avere $x_0 = 0$ (modo in opposizione di fase). Tutte le altre possibilità sono combinazioni lineari di questi due modi normali e le leggi orarie saranno sovrapposizioni di due funzioni sinusoidali con frequenze diverse, che non possono mai combinarsi in un moto armonico.

Per analizzare ora le leggi orarie dei due oscillatori quando il sistema è in una sovrapposizione dei due modi normali, consideriamo per semplicità il caso nel quale $x_0 = \bar{x}$ e $\varphi_0 = \bar{\varphi} = 0$. Ricordando le formule di prostaferesi:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

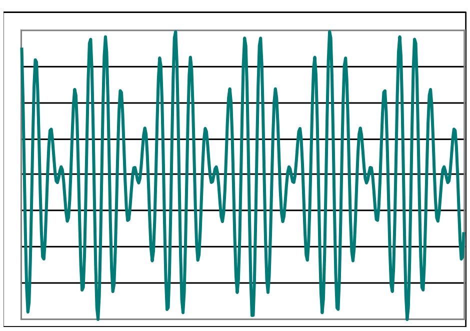
e definendo pulsazione portante e modulante rispettivamente la semisomma e la semidifferenza di $\bar{\omega}$ e ω_0:

$$\omega_p = \frac{\bar{\omega}+\omega_0}{2}, \quad \omega_m = \frac{\bar{\omega}-\omega_0}{2}, \quad \text{per cui} \quad \omega_\mathrm{p} > \omega_\mathrm{m},$$

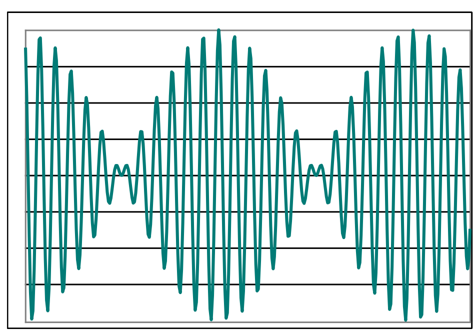
le due leggi orarie si possono scrivere:

$$\begin{cases} x_1(t) = x_0\cos(\omega_p t)\sin(\omega_m t) \\ \\ x_2(t) = x_0\sin(\omega_p t)\cos(\omega_m t) \end{cases}$$

e rappresentano entrambe una funzione sinusoidale con pulsazione portante ω_p, modulata da una seconda funzione sinusoidale con pulsazione ω_m. Rappresentiamo in grafico due esempi, nei quali è riportata la posizione di uno dei due oscillatori in funzione del tempo: a sinistra un caso in cui la pulsazione (e quindi la frequenza) portante sia 10 volte la modulante, a destra un caso in cui la portante sia 25 volte la modulante.



$\omega_p = 10\,\omega_m$



$\omega_p = 25\,\omega_m$

Tanto più la frequenza della portante è grande rispetto a quella della modulante, tanto più lungo è il periodo con cui la portante è modulata, rispetto al periodo della portante.

Questo fenomeno di modulazione prende il nome di battimento, ed è il fenomeno che si può ascoltare quando si sovrappongono due suoni di frequenza vicina. Il suono che ne risulta ha una altezza intermedia tra le due (la frequenza portante è la semisomma delle due frequenze), ma la sua ampiezza è modulata nel tempo con un periodo tanto più lungo quanto più vicine sono le due frequenze di partenza.

Tornando agli oscillatori accoppiati, la relazione tra portante e modulante dipende da quella tra la costante elastica della molla centrale, che determina l'accoppiamento tra i due oscillatori k_{12}, e la costante elastica delle molle esterne, k. Se $k \gg k_{12}$, ("accoppiamento debole"), la modulante è la semidifferenza di due valori prossimi tra loro ed è quindi molto più piccola della semisomma, che corrisponde alla media dei due valori.

Dal punto di vista dell'energia, ricordiamo che l'energia totale di un oscillatore è la somma dell'energia cinetica $\frac{1}{2}mv^2$ e dell'energia potenziale $\frac{1}{2}kx^2$. Per visualizzarne l'andamento nel tempo nei casi rappresentati in figura, possiamo considerare che nei massimi delle oscillazioni la velocità si annulla e quindi il quadrato della massima ampiezza dell'oscillazione è proporzionale all'energia totale. Se congiungiamo con una linea tutti i massimi, abbiamo una visualizzazione dell'andamento (della radice quadrata) dell'energia totale di uno dei due oscillatori in funzione del tempo. L'andamento dell'energia totale in funzione del tempo corrisponde esattamente a quello del quadrato dell'ampiezza della modulante. Vediamo inoltre che il singolo oscillatore non conserva l'energia totale, nonostante non abbiamo ipotizzato la presenza di fenomeni dissipativi. Se consideriamo le leggi orarie dei due oscillatori focalizzandoci sulle dipendenze dalla modulante, vediamo che i due oscillatori sono modulati rispettivamente da un seno e da un coseno e sono sfasati quindi di 90 gradi. Questo sfasamento lo ritroviamo nel contenuto energetico dei due oscillatori: quando uno dei due oscilla intorno alla massima ampiezza, l'altro ha un'ampiezza praticamente nulla e viceversa. I due oscillatori si scambiano continuamente energia con un periodo pari a metà del periodo della modulante (poiché il quadrato di una funzione sinusoidale ha un periodo pari alla metà di quello della funzione di partenza).