Campi di forze conservativi (FMUV 6.4)

Dalle precedenti considerazioni si può vedere che una forza conservativa si può ricavare dal suo potenziale attraverso l'operatore gradiente:

$$\vec{f} \equiv -\left(\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial x}, \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial y}, \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial z}\right) = -\,\mathrm{grad}\ V(x,y,z) = -\,\vec{\nabla}\,V(x,y,z)$$

Ricapitolando, una forza è conservativa se si verifica una delle seguenti condizioni, tutte tra loro equivalenti:

a) il lavoro non dipende dal percorso

b) il lavoro lungo qualunque curva chiusa è nullo

c) esiste una funzione scalare il cui gradiente cambiato di segno uguaglia la forza

Il fatto che una forza si possa derivare da una funzione scalare delle coordinate spaziali (per cui l'energia potenziale dovrebbe più significativamente essere chiamata "energia posizionale") fa sì che tale forza possa essere associata ad un campo, ossia ad una proprietà dello spazio indipendente dalla presenza di una massa da accelerare.

Si parla in questo caso di campi di forze conservativi.

Risulta anche evidente che affinché il campo sia conservativo, l'energia potenziale (e quindi la forza) non deve dipendere dal tempo.

Potenziale della forza elastica (FMUV 6.5.2, 6.8)

Per una forza elastica unidimensionale $\vec{f}_e \equiv (-kx,0,0);\ \ d\vec{r} \equiv (dx, dy, dz)$

$$L_{AB} = -k\int_A^B x dx = \frac{1}{2}k(x_A^2 - x_B^2)$$

La forza elastica è quindi conservativa con potenziale $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$

L'energia totate è data da $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$

e deve essere costante, come si può verificare usando la legge oraria e la sua derivata:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\dot{x} = v(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0) = -A\sqrt{\frac{k}{m}}\sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\frac{k}{m}A^2\sin^2(\omega t + \varphi_0) + \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{1}{2}kA^2$$

Come si vede, infatti, l'energia totale non dipende dal tempo.

Potenziale di una forza centrale isotropa (FMUV 6.5.3)

Definizione di forza centrale isotropa: $\vec{f} = f(r)\hat{r}$

Tenendo conto che il prodotto scalare di due vettori è il modulo della proiezione di un vettore sull'altro, $\hat{r} \cdot d\vec{s} = dr$

si ha $\vec{f} \cdot d\vec{s} = f(r)dr$

Se la $f(r)$ è integrabile e l'integrale è $V(r)$ possiamo scrivere

$$L_{AB} = \int_A^B f(r)dr = V_A - V_B$$

Per l'attrazione gravitazionale $f(r) = -G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}; \quad V(r) = -G\dfrac{m_1 m_2}{r}$

Per la forza centrifuga $f(r) = m\omega^2 r; \quad V(r) = -\dfrac{1}{2}m\omega^2 r^2$

Forze non conservative (FMUV 6.6)

Attrito:

$$\vec{R}_\tau = -\mu_d R_N \hat{u}_v; \quad d\vec{s} = \vec{v}\,dt; \quad \vec{R}_\tau \cdot d\vec{s} = -\mu_d R_N ds$$

$$L_{AB} = \int_{A,\gamma}^{B} -\mu_d R_N \cdot ds = -\mu_d R_N \int_{A,\gamma}^{B} ds = -\mu_d R_N (s_B - s_A) = -\mu_d R_N l_{AB}^{(\gamma)} < 0$$

dove $l_{AB}^{(\gamma)}$ è la lunghezza della traiettoria che evidentemente dipende dal percorso: la forza d'attrito non è conservativa

Anche la resistenza del mezzo non è conservativa:

$$L_{AB} = \int_{A,\gamma}^{B} -\beta\vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_{A,\gamma}^{B} -\beta\vec{v} \cdot \vec{v}\,dt = -\beta \int_{A,\gamma}^{B} v^2 dt < 0$$

poiché l'integrale di una grandezza definita positiva è sicuramente positivo.

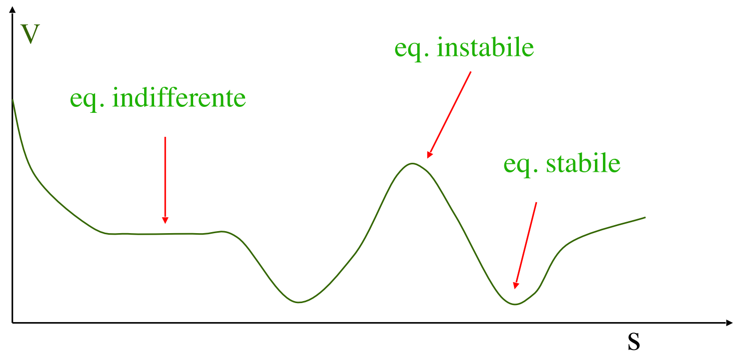
In entrambi i casi il lavoro lungo una curva chiusa è negativo.

In presenza di forze non conservative, l'energia totale non si conserva e dal teorema dell'energia cinetica la sua variazione risulta uguale al lavoro delle forze non conservative:

$$dK = \delta L = \delta L_c + \delta L_{nc} = -dV + \delta L_{nc} \quad \Rightarrow dE = d(K+V) = \delta L_{nc}$$

Equilibrio e forze di richiamo **(FMUV 6.14)**

Consideriamo una energia potenziale $V(s)$



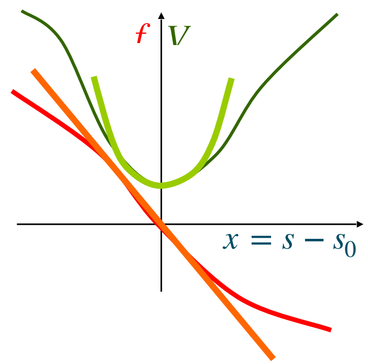
Nei punti in cui $\dfrac{dV}{ds} = 0$

deve essere $f = -\dfrac{dV}{ds} = 0$

Un corpo fermo in uno di questi punti rimane fermo. Questi punti sono detti punti di equilibrio. Tuttavia l'equilibrio può essere stabile, instabile o indifferente (con significato intuitivo) a seconda che

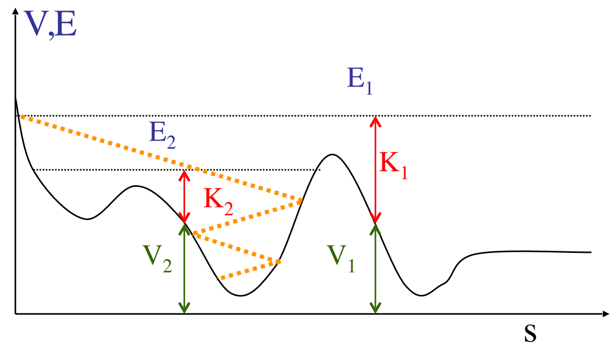
$$\frac{d^2V}{ds^2} > 0, \quad \frac{d^2V}{ds^2} < 0, \quad \frac{d^2V}{ds^2} = 0$$

Nell'intorno di una posizione di equilibrio stabile è infatti sempre presente una forza di richiamo, che al primo ordine si comporta come una forza elastica, con potenziale parabolico: $V(x) \simeq V_0 + 1/2kx^2; \quad f(x) \simeq -kx$



Tutti i moti intorno ad un punto di equilibrio stabile sono, per piccoli spostamenti, moti armonici.

Dal potenziale alla dinamica del moto **(FMUV 6.7.1,6.13)**



Per una forza conservativa, la conoscenza di V in funzione di un parametro s qualunque permette di ricavare immediatamente l'andamento di K per lo stesso parametro.

P. es. vincolo liscio (guida o altro) + forza peso:

$$V(s) = mgh(s); \quad \frac{1}{2}mv^2 = K(s) = E - V(s); \quad |v(s)| = \sqrt{\frac{2}{m}\big(E - V(s)\big)}$$

Se il parametro è l'ascissa curvilinea, l'equazione precedente permette anche di ricavare la legge oraria per separazione di variabili:

$$v(s) = \frac{ds}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\big(E - V(s)\big)} \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{\pm ds}{\sqrt{\frac{2}{m}\big(E - V(s)\big)}} \Rightarrow \quad t - t_0 = \pm\int_{s_0}^{s} \frac{ds}{\sqrt{\frac{2}{m}\big(E - V(s)\big)}}$$

notiamo che in questo modo otteniamo la legge oraria con una sola integrazione.

La velocità iniziale è già contenuta in E che è detto un integrale primo del moto.

Come si può tener conto dell'attrito?

Spesso la sola visualizzazione grafica di un potenziale $V(x)$ permette di ricavare moltissime informazioni sulla dinamica del moto: $f = -dV(x)/dx$