Esercizio: $T: \ell^2 \longrightarrow \ell^2$

se $\underline{x} = \{x_n\}_n \in \ell^2$

$$T\underline{x} = \left\{ \frac{n}{n^2+9n+16} x_n \right\}_n$$

- T lineare e continuo?
- trovare $\|T\|$

oss T manda ℓ^2 in ℓ^2 perché $\frac{n}{n^2+9n+16} \leq M$

T lineare ovviamente.

$$\|Tx\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n^2+9n+16}\right)^2 x_n^2 \leq M^2 \sum_n x_n^2 =$$

$$= M^2 \|\underline{x}\|_2^2$$

$$\Rightarrow \|Tx\|_2 \leq M \|\underline{x}\|_2 \Rightarrow$$

Cerco l'M ottimale

$$\varphi(t) = \frac{t}{t^2+9t+16} \Rightarrow \varphi'(t) = \frac{t^2+\cancel{9t}+16-t(2t+\cancel{9})}{(t^2+9t+16)^2} =$$

$$= \frac{-t^2+16}{(\_)^2}$$

$$\max \varphi(t) = \varphi(4) = \frac{4}{16+36+16} =$$

$$= \frac{4}{68} = \frac{1}{17}$$

$$\|T\| \leq \frac{1}{17}$$

Per vedere che effettivamente $\|T\|_{\mathcal{L}} = \frac{1}{17}$,

prendo $\underline{x} = \underline{e}_4 = \{0, 0, 0, 1, 0, 0, \ldots\}$

$\|\underline{e}_4\|_2 = 1$

$T\underline{e}_4 = \{0, 0, 0, \frac{1}{17}, 0, 0, \ldots\}$

$\|T\underline{e}_4\| = \frac{1}{17}$

ESERCIZIO: Sia $c_0 = \{\text{successioni infinitesime}\}$

con la norma ℓ^∞

se $\underline{x} = \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in c_0$

$$\|\underline{x}\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i|.$$

$c_0 \subset \ell^\infty$ sottosp. chiuso.

Mostrare che $c_0^* = \ell^1$.

Sia $\underline{y} = \{y_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \ell^1$

Definiamo, se $\underline{x} = \{x_i\}_i \in c_0$

$$F_{\underline{y}}(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i x_i$$ la somma converge.

$F_y : c_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ lineare.

è continua?

$$|F_y(\underline{x})| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} y_i x_i\right| \leq \sup_i |x_i| \sum_i |y_i| =$$

$$= \|\underline{x}\|_\infty \cdot \|\underline{y}\|_1$$

$$\|F_y\|_{\mathcal{L}} \leq \|\underline{y}\|_1.$$

Devo trovare una succ^{ne} $\{\underline{x}^{(n)}\} \subset c_0$ t.c.

$$\|\underline{x}^{(n)}\|_\infty \leq 1 \quad e \quad \sum_i y_i x_i^{(n)} = |F_y(x^n)| \longrightarrow \|\underline{y}\|_1$$

Prendiamo $\underline{x}^{(n)} = \{\text{sign } y_1, \text{sign } y_2, \dots \text{sign } y_n, 0, 0, 0, \dots\}$

$$\text{sign } t = \begin{cases} 1 & t>0 \\ 0 & t=0 \\ -1 & t<0 \end{cases}$$

$$\|\underline{x}^{(n)}\|_\infty \leq 1$$

$$F_{\underline{y}}(\underline{x}^{(n)}) = \sum_{i=1}^{n} |y_i| \xrightarrow[n]{} \|\underline{y}\|_1$$

$$\Rightarrow \|F_y\| = \|y\|_1.$$

Resta da provare che, preso $F \in c_0^*$ funzionale lineare e continuo su c_0, allora $\exists\, \underline{y} \in \ell^1$ t.c. $F = F_{\underline{y}}$

Definiamo $F(\underline{e}_i) = y_i$ e sia $\underline{y} = \{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.

Vogliamo provare che
1) $\underline{y} \in \ell^1$
2) $F(\underline{x}) = F_{\underline{y}}(\underline{x}) \;\forall x \in c_0$

Sia $\underline{x}^{(n)} = \{\text{sign } y_1, \text{sign } y_2, \dots \text{sign } y_n, 0, 0\}$

$$= \sum_{i=1}^{n} \text{sign } y_i \, \underline{e}_i$$

$\|\underline{x}^{(n)}\|_\infty \leq 1.$ $\quad |F(x^{(n)})| \leq \|F\|_{c_0^*}$

$$\|F\| \geq F(\underline{x}^{(n)}) = F \sum_{i=1}^{n} \text{sign } y_i \, \underline{e}_i$$

$$\|F\| \geq F(\underline{x}^{(n)}) = F\left(\sum_{i=1}^{n} \operatorname{sign} y_i \, \underline{e}_i\right) \overset{\text{linearità}}{=}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sign} y_i \, F(\underline{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} (\operatorname{sign} y_i) \, y_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |y_i| \implies \sum_{i=1}^{\infty} |y_i| \leq \|F\|$$

$$\implies \|\underline{y}\|_1 \leq \|F\|. \implies \underline{y} \in \ell^1.$$

Sia ora $\underline{x} \in c_0$. Approssimo con

$$\underline{x}^{(n)} = \{ x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots \}$$

$$\underline{x}^{(n)} \longrightarrow \underline{x} \quad \text{in } c_0$$

$$F(\underline{x}^{(n)}) = F\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \underline{e}_i\right) \overset{\text{linearità}}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i \underbrace{\cancel{F(\underline{e}_i)}}_{y_i}$$

continuità $\downarrow$ $\qquad\qquad$ $\downarrow$ $n \to +\infty$

$$F(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i = F_{\underline{y}}(x)$$

$$\implies F = F_y$$

Chi è $(\ell^\infty)^*$?

ovviamente contiene ℓ^1

se $y \in \ell^1$ $\qquad F_y(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i x_i \qquad \forall \underline{x} \in \ell^\infty$

Questo è un funz. lineare e continuo e la sua norma è proprio la norma ℓ^1 di $\underline{y}$

Ma ce ne sono altri di funzionali.

Prendiamo $\quad c = \{$successioni convergenti$\}$
sottosp. di ℓ^∞.

$$T: \quad c \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\underline{x} \longmapsto \lim_{i \to +\infty} x_i$$

T lineare!

T continua

$$|T\underline{x}| = \left|\lim_{i \to +\infty} x_i\right| \leq \sup_i |x_i| = \|\underline{x}\|_\infty$$

$\|T\| \leq 1$

Applicando Hahn-Banach (vers. analitica) si estende T a tutto ℓ^∞ mantenendo la norma.

Questo funzionale non "viene" da una funzione ℓ^1.

se fosse

$$T(x) = T_y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i x_i$$

$$\underset{\displaystyle 0}{\overset{\shortparallel}{T(\underline{e}_i)}} = y_i \quad \forall i$$

<u>assurdo</u>.

Le versioni geometriche del teor. di Hahn-Banach
(separazione di insiemi con iperpiani chiusi)
richiedono

X sp. normato.

$A, B \subset X$ convessi disgiunti
+ ipotesi topologiche

$\Rightarrow$ posso separare A e B.

In generale questo fallisce se mancano le ipotesi topologiche.

<u>Esempio</u> (banale).

X sp. normato, G sottospazio denso di X

<u>Esempio:</u> $X = L^2(0,1)$, $G = C([0,1])$

Se $x_0 \in X \setminus G$

G e $\{x_0\}$ sono convessi disgiunti
$\{x_0\}$ compatto.

Supponiamo che si possano separare con un iperpiano chiuso. $[f = \alpha]$, con $f \in X^*$

$$f(x) \leq \alpha \leq f(x_0)$$

f limitato superiorm. su G sottosp

$\Downarrow$

$f \equiv 0$ su G

$\Rightarrow$ per densità e continuità $\Rightarrow$ $f \equiv 0$ su X

Più delicato: Esempio dal Brezis.

A, B convessi disgiunti e chiusi, ma non si possono separare con un iperpiano chiuso.

$X = \ell^1$

$G = \{ \underline{x} = \{x_n\} \in \ell^1 : \quad x_{2n} = 0 \quad \forall n \}$

- G sottosp. chiuso di ℓ^1. $\Rightarrow$ convesso. da fare
- $B = \{ \underline{x} = \{x_n\} \in \ell^1 : \quad x_{2n} = \dfrac{x_{2n-1}}{2^n} \}$
- B è un sottosp. chiuso da fare.
- Ovviamente $B \cap G \supset \{0\} \Rightarrow$ tocca G.

$A = G + \underline{c}$ convesso e chiuso.

dove $\underline{c} = \{ 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{8}, 0, \frac{1}{16}, \dots \}$.

- A, B convessi chiusi
- $A \cap B = \emptyset$ da fare.

Se A e B si potessero separare con un iperpiano chiuso, $[f = \alpha]$ allora avremmo

$$f(a) \le \alpha \le f(b) \qquad \begin{array}{l} \forall a \in A \\ \forall b \in B \end{array}$$

B sottosp $\Longrightarrow$ $f \equiv 0$ su B

G sottosp $\Longrightarrow$ $f \equiv 0$ su G

$B+G$ sottospazio di ℓ^1

$f \equiv 0$ su $B+G$.

- $B+G$ denso in X da fare

$\Longrightarrow$ $f \equiv 0$ su X $\square$

TEOREMA DI BAIRE

Sia (X,d) uno sp. metrico completo.
Sia $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di aperti densi di X.
Allora $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$ è ancora denso in X.

DIM. Sia A un aperto di X.
Devo provare che A contiene un elemento di $\bigcap_n V_n$.

- Considero $A \cap V_1$ aperto (inters. di 2 aperti) non vuoto (perché V_1 è denso)

Sia $x_1 \in A\cap V_1 \Rightarrow \exists\ B(x_1,r_1) \subset A\cap V_1$.
anzi, eventualmente restringendo r_1, posso supporre che 1) $\overline{B(x_1,r_1)} \subset A\cap V_1$.

OSS $\overline{B(x_1,r)} \subset \{x\in X : d(x,x_1)\le r\} \subset B(x_1,s)$

2) $r_1 < 1$

Ora considero $V_2 \cap B(x_1,r_1)$ aperto non vuoto.

$\Rightarrow$ Trovo una palla $B(x_2,r_2)$ t.c.
$\overline{B(x_2,r_2)} \subset V_2 \cap B(x_1,r_1)$
$r_2 < 1/2$

Proseguo così. All'n-esimo passo trovo

$$\overline{B(x_n, r_n)} \subset V_n \cap B(x_{n-1}, r_{n-1})$$

$$\Downarrow \qquad r_n < \frac{1}{n}$$

$$\overline{B(x_n, r_n)} \subset V_h \cap A \qquad \forall h = 1 \dots n$$

$$\overline{B(x_n, r_n)} \subset B(x_h, r_h) \quad \forall h = 1 \dots n-1.$$

- $\{x_n\}$ è di Cauchy.

Infatti se $m > n \geq N$ si ha

$$x_m \in B(x_n, r_n) \Longrightarrow d(x_n, x_m) < r_n < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N}$$

X è completo $\Rightarrow$ $x_n \longrightarrow x$

Se $n \geq N$ $\Rightarrow$ $x_n \in \overline{B(x_N, r_N)} \subset V_N \cap A$

$$\Downarrow n \to +\infty$$

$$x \in \overline{B(x_N, r_N)} \subset V_N \cap A \quad \forall N$$

$$\Longrightarrow x \in \bigcap_{N=1}^{\infty} (V_n \cap A) = \left(\bigcap_{N=1}^{\infty} V_n\right) \cap A$$

OSS Spesso di questo teorema si usa una conseguenza più debole, e cioè che

$$\bigcap_n V_n \text{ è non vuoto}$$

OSS Passando a $C_n = V_n^c$, il teorema si trova spesso in questa forma (in cui lo useremo)

TEOREMA (X, d) spazio metrico completo

Se $\{C_n\}$ è una successione di chiusi di X con interno vuoto, anche la loro unione $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ ha interno vuoto

Altre formulazioni:

- Uno spazio metrico completo non è unione numerabile di $\underbrace{\text{insiemi ovunque non densi}}_{\text{insiemi la cui chiusura ha interno vuoto.}}$

Poiché uno spazio topologico che è unione numerabile di insiemi ovunque non densi si dice "di prima categoria (di Baire)", e uno che non lo è si dice "di seconda categoria", il teorema si legge anche come

"Uno sp. metrico completo è di seconda categoria"

(teorema della categoria di Baire)