Il problema dello spago

Giulia Scolamiero

Ciò che è affermato senza prova può essere negato senza prova.
Euclide

Nella lezione dell'11 marzo utilizzando un spago annodato ogni studente ha esplorato le possibili forme che ad esso possiamo far assumere. Abbiamo poi riflettuto su come varia l'area di una figura piana a parità di perimetro. In particolare abbiamo esaminato il caso del rettangolo. Da un punto di vista didattico è molto efficace prendere in considerazione un laccio chiuso non estensibile e modificare la forma dei diversi rettangoli che con esso si possono formare. Alla domanda se il perimetro rimane costante a seguito di deformazioni la risposta appare ovvia, la lunghezza del laccio non varia. Maggiori perplessità determina la stessa richiesta riferita all'area. A lezione abbiamo visto, con diversi esempi, che effettivamente l'area varia, diventando massima quando la base ha la stessa lunghezza dell'altezza, ossia nel caso del quadrato.

In termini matematici la questione può essere affrontata in modo rigoroso con diversi metodi. Uno fra questi, a mio avviso proponibile negli ultimi anni della scuola superiore, è quello di impostare un semplice sistema di due equazioni:
$2b + 2h = p$ dove b è la base del rettangolo, h l'altezza e p il perimetro che si assume costante;
$b \times h = a$ dove a è l'area di cui si vuole studiare l'andamento.
Il sistema può essere espresso ponendo $b = (p - 2h)/2$ e quindi
$a = (p - 2h)/2 \times h$. In conclusione $a = p \times h/2 - h^2$.

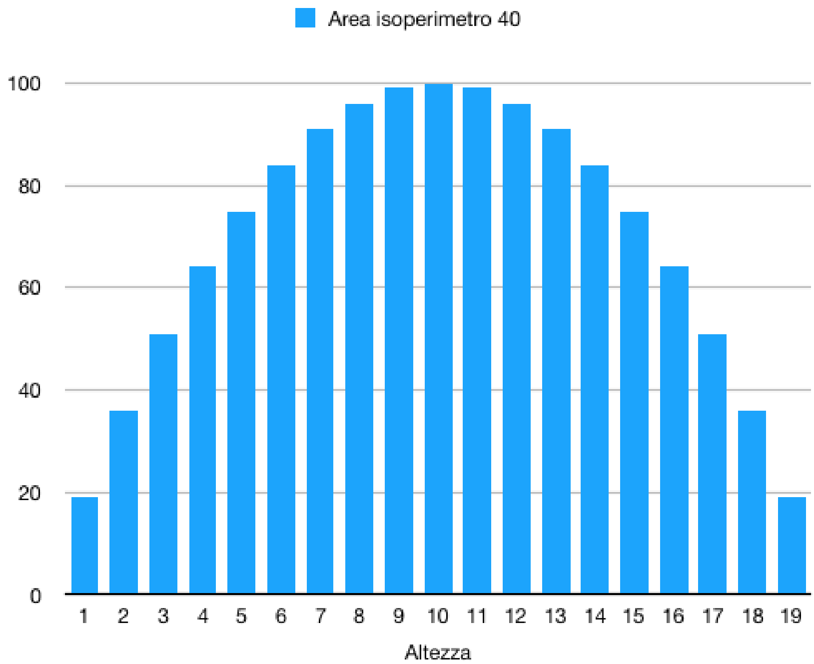
Cioè la formula che esprime l'area è un'equazione di secondo grado, in questo caso nella variabile h, che viene rappresentata analiticamente da una parabola per l'origine.

Il massimo si trova quindi uguagliando a zero la derivata della funzione che esprime l'area e si ottiene così $p/2 - 2h = 0$ ossia l'altezza è uguale a un quarto del perimetro $h = p/4$, che corrisponde al caso del quadrato.

Ho voluto rappresentare questo fatto con un istogramma, immaginando come la cosa potesse essere spiegata, ad esempio, in una scuola media. Si potrebbe chiedere agli studenti di calcolare tutte le aree dei rettangoli che si possono costruire aventi perimetro fissato uguale a 40. Ossia di fare tutti i prodotti assumendo un lato con valori via via crescenti da 1 a 19 e l'altro lato decrescente da 19 a 1, come nella tabella seguente.

base	altezza	area	semiperimetro
1	19	19	20
2	18	36	20
3	17	51	20
4	16	64	20
5	15	75	20
6	14	84	20
7	13	91	20
8	12	96	20
9	11	99	20
10	10	100	20
11	9	99	20
12	8	96	20
13	7	91	20
14	6	84	20
15	5	75	20
16	4	64	20
17	3	51	20
18	2	36	20
19	1	19	20

Di seguito l'istogramma creato a partire dalla tabella che mostra bene l'andamento parabolico dell'area. Il valore massimo viene raggiunto al centro, quando i due lati sono uguali.



Abbiamo poi osservato che in effetti l'area massima di una figura piana di perimetro fissato è quella del cerchio. Ciò corrisponde a un principio anche abbastanza intuitivo, detto principio di riflessione di Steiner: l'area massima è quella racchiusa da una figura che sia simmetrica in tutte le direzioni. Infatti se prendiamo una qualsiasi figura piana e una corda che ne divide il perimetro in due parti uguali, la figura con area massima avrà queste due parti simmetriche. Se così non fosse basterebbe "ribaltare" la parte maggiore sulla minore per avere una nuova figura con lo stesso perimetro ma con area maggiore della precedente. Questo ragionamento porta a individuare il cerchio, unica figura simmetrica in tutte le direzioni, come figura isoperimetrica con area massima.