trasformazione delle velocità (FMUV 3.24)

Deriviamo rispetto al tempo la relazione $\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$ nel riferimento S.

I primi due vettori sono rappresentati in S e le loro derivate $\vec{v}$ e $\vec{V}$ rappresentano le velocità in S del punto materiale e dell'origine di S'.

Al terzo vettore dovremo applicare la formula ricavata in precedenza:

$$\left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_{S'} + \vec{\omega} \times \vec{r}' = \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

e in definitiva avremo: $\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$

la velocità del punto in S è uguale alla somma della velocità del punto nel secondo riferimento e della velocità di trascinamento $\vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$ che è la velocità che avrebbe un punto fermo nel secondo riferimento in posizione $\vec{r}'$, trascinato dal moto di S'.

trasformazione delle accelerazioni (FMUV 3.24)

Per derivare la velocità $\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$

applichiamo di nuovo la formula $\left(\frac{d\vec{w}\,'}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\vec{w}\,'}{dt}\right)_{S'} + \vec{\omega} \times \vec{w}\,'$

ai vettori $\vec{v}\,'$ ed $\vec{r}\,'$, per cui otteniamo:

$$\vec{a} = \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\vec{v}\,'}{dt}\right)_S + \left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_S + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_S \times \vec{r}\,' + \vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right)_S =$$

$$= \left(\frac{d\vec{v}\,'}{dt}\right)_{S'} + \vec{\omega} \times \vec{v}\,' + A + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_S \times \vec{r}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}\,') =$$

$$= \vec{a}\,' + \vec{A} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') + 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,' = \vec{a}\,' + \vec{a}_\tau + \vec{a}_C$$

dove il secondo termine $\vec{a}_\tau = \vec{A} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')$

è l'accelerazione di trascinamento del secondo riferimento

ed il terzo $\vec{a}_C = 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,'$ è l'accelerazione complementare o di Coriolis

moto di pura rotazione

Nel caso di un riferimento che ruoti con velocità angolare costante senza traslare (piattaforma rotante) la formula generale per le accelerazioni si riduce a:

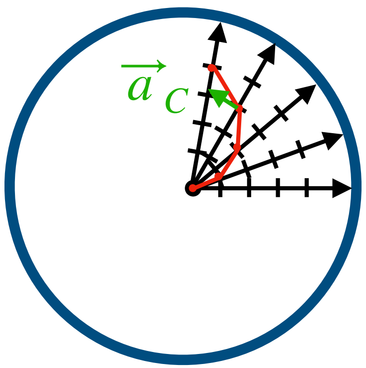
$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2\vec{\omega} \times v' = \vec{a}' + \vec{a}_\tau + \vec{a}_C$$

Per interpretare l'accelerazione di trascinamento, notiamo che il moto di un punto fermo in S' è un moto circolare uniforme in S, per cui

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}' \quad \text{e} \quad \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = \vec{\omega} \times \vec{v} = -\omega^2 \vec{r}$$

L'accelerazione di trascinamento corrisponde quindi all'accelerazione centripeta del moto circolare uniforme.

Il significato dell'accelerazione complementare o di Coriolis $\vec{a}_C = 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$ si può ricavare dalla seguente costruzione geometrica, per un punto che si muove con velocità uniforme lungo il raggio della piattaforma:



traslazione uniforme: trasformazioni di Galileo
(FMUV 3.21)

Trasformazione di Galileo: S' in moto rettilineo uniforme con velocità V, senza rotazioni rispetto a S, per cui $A = 0$, $\omega = 0$:

$$\vec{R} = \vec{V}t \quad \Rightarrow \quad \vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \vec{V}t$$

e la formula generale si riduce a

$$\vec{v}(t) = \vec{v}'(t) + \vec{V}; \qquad \vec{a}(t) = \vec{a}'(t)$$

- la prima equazione esprime la legge di composizione delle velocità per trasformazioni di Galileo
- la seconda dimostra che l'accelerazione è invariante per trasformazioni di Galileo

Notiamo che si è assunto implicitamente che il tempo e la lunghezza non dipendano dal sistema di riferimento, ossia siano assoluti.

(NB: questa assunzione non è valida nella relatività ristretta)

Relatività galileiana e dinamica newtoniana
(FMUV 4.17)

Principio di relatività, principio sperimentale dovuto a Galileo (1632):

"Rinserratevi con qualche amico nella maggiore stanza che sia sotto coverta di alcun gran navilio, e quivi fate d'aver mosche, farfalle e simili animaletti volanti … sospendasi anco in alto qualche secchiello, che a goccia a goccia vada versando dell'acqua in un altro vaso di angusta bocca che sia posto a basso; e stando ferma la nave, osservate diligentemente come … le stille cadenti entreranno tutte nel vaso sottoposto. … Osservate che avrete diligentemente tutte queste cose, benché niun dubbio ci sia mentre il vascello sta fermo non debbano succedere così, fate muovere la nave con quanta si voglia velocità; ché (pur che il moto sia uniforme e non fluttuante in qua e in là) voi non riconoscerete una minima mutazione in tutti li nominati effetti; né da alcuno di quelli potrete comprendere se la nave cammina, o pure sta ferma."

- dati due riferimenti legati da una trasformazione di Galileo (ossia in moto rettilineo uniforme uno rispetto all'altro), non esiste alcun esperimento fisico che permetta di distinguere quale sia in quiete e quale sia in moto.
- le leggi fisiche sono covarianti per trasformazioni di Galileo
- non esiste un sistema di riferimento privilegiato ("assoluto")

NB: il principio di relatività (sperimentale) rimane valido anche nella relatività ristretta di Einstein, dove le trasformazioni galileiane della velocità (che abbiamo derivato analiticamente) non valgono più.

Fondamenti della dinamica newtoniana (FMUV 4.1-.3)

L'interazione del corpo (modellizzato come un punto materiale) con l'ambiente è rappresentata attraverso una grandezza fisica detta forza

Principi ("classici") della dinamica newtoniana (1687)

1. Principio di inerzia: esistono dei riferimenti, detti "inerziali", nei quali i corpi non soggetti a forze si muovono di moto rettilineo uniforme
2. Nei riferimenti inerziali la presenza di una forza o più forze modifica la velocità del corpo, genera quindi un'accelerazione: $\vec{F} = m\vec{a}$
3. Principio di azione e reazione: se un corpo subisce l'azione di un secondo corpo, quest'ultimo è sempre soggetto ad una forza uguale e contraria a quella esercitata sul primo: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ e diretta secondo la stessa retta di azione

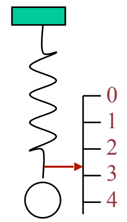
- rivoluzione rispetto alla concezione aristotelica che connetteva le forze alle velocità
- circolarità delle affermazioni: se non si introduce il concetto di forza in maniera indipendente dall'accelerazione (cioè indipendentemente dal principio di inerzia), $\vec{F} = m\vec{a}$ è solo una definizione della forza
- fondamenti sperimentali poco trasparenti (discuteremo questo problema più avanti nel corso)

Definizione statica di forza (FMUV 4.4)

Come si esce dalla circolarità: definizione statica / corpo isolato

- Concetto di forza nel senso comune: spingere, sollevare, piegare, comprimere, dilatare, rompere, …
- Definizione operativa statica delle forze:

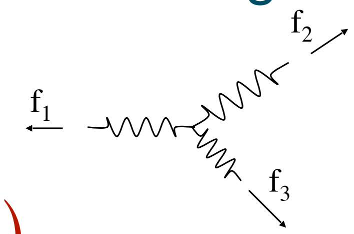
  si basa sulla osservazione che, oltre che con gli spostamenti, le forze sono connesse anche con le deformazioni dei corpi



- molla elastica: deformazione proporzionale alla forza
- dinamometro: molla tarata

  (campione: forza peso, corrispondente alla accelerazione di gravità)

- carattere vettoriale delle forze
- principio di sovrapposizione



equilibrio $\Rightarrow$ $\vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3 = 0 \quad \vec{f}_1 = -\left(\vec{f}_2 + \vec{f}_3\right)$

Reazioni vincolari

caso limite della deformazione elastica di una superficie: qualunque sia la forza applicata, la deformazione è trascurabile