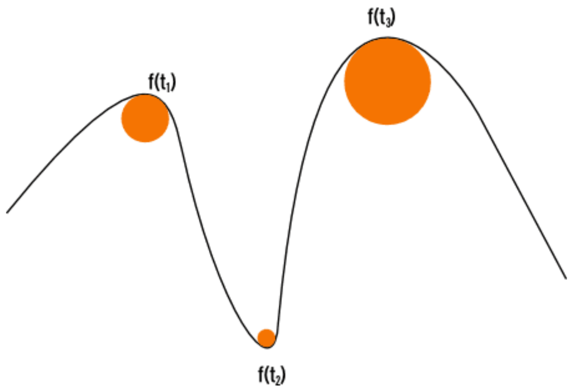
Cerchio osculatore

Giuliano Verrando

1 marzo 2020

1 Cos'e' un cerchio osculatore?

Il concetto di cerchio osculatore nasce dall'esigenza di approssimare una curva $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R})$ in un intorno di un punto x_0. La circonferenza che approssima meglio la curva si chiama appunto ***cerchio osculatore***.



2 Tecnica di dimostrazione

Il piano su cui giacera' la circonferenza sara' detto piano osculatore. Fissato un sistema di assi cartesiani, il piano osculatore e' quello su cui giacciono il vettore $\vec{f}(x_0)$ e $\left.\frac{d\vec{f}(x)}{dx}\right|_{x_0}$.
Per semplicita' quindi, essendo la scelta del sistema di riferimento arbitraria e il piano identificato solamente da informazioni inerenti al punto x_0, possiamo considerare la nostra curva una curva piana (nel caso non lo fosse consideriamo la sua proiezione sul piano osculatore).
Condizione necessaria e sufficente perche' il nostro cerchio approssimi la curva in un intorno di x_0 e' che lo sviluppo di Taylor di $f(x)$ centrato in x_0 fino al 2° ordine coincida con quello della ciconferenza. Questa condizione si verifica se e solo se: $\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0) \\ f''(x_0) = g''(x_0) \end{cases}$ dove con $g(x)$ si identifica la funzione che descrive l'arco di ciconferenza del *cerchio osculatore* in un intorno di x_0. La teoria dice che questo cerchio esistera' sempre e noi vogliamo calcolarne il raggio "r" e il centro $C(x_c, y_c)$.
L'equazione cartesiana di una circonferenza e':

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c) = r^2 \text{ con } x \in [x_c - r; x_c + r]$$

A noi interessa come si comporta la y in un intorno di x_0 quindi ci ricaviamo che:

$$y = y_c - \sqrt{r^2 - (x_0 - x_c)^2} \quad \cup \quad y = y_c + \sqrt{r^2 - (x_0 - x_c)^2}$$

a seconda di come sara' fatta $f(x)$ a noi interessera' studiare la parte superiore o la parte inferiore della circonferenza. Quindi svolgeremo il calcolo del raggio e del centro considerando tutti e due i semicerchi. Infine alcune considerazioni su $f(x)$ ci permetteranno di capire quale parte di circonferenza dobbiamo considerare.

$$\begin{cases} g(x) = y_c \pm \sqrt{r^2 - (x - x_c)^2} \\ g'(x) = \mp \frac{x - x_c}{\sqrt{r^2 - (x - x_c)^2}} \\ g''(x) = \mp \frac{r^2}{(r^2 - (x - x_c)^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$$

3 Calcolo raggio e centro del cerchio osculatore dato $f(x)$ e x_0

Nel primo passaggio ricaviamo dalla seconda equazione "$(x_0 - x_c)^2$" *(notiamo che l'ambiguita' di segno scompare al seguito di un elevamento a potenza).*

$$\begin{cases} f(x_0) = y_c \pm \sqrt{r^2 - (x_0 - x_c)^2} & * \\ f'(x_0) = \mp \dfrac{x_0 - x_c}{\sqrt{r^2 - (x_0 - x_c)^2}} & * \\ f''(x_0) = \mp \dfrac{r^2}{(r^2 - (x_0 - x_c)^2)^{\frac{3}{2}}} & * \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f(x_0) = y_c \pm \sqrt{r^2 - (x_0 - x_c)^2} \\ (x_0 - x_c)^2 = \dfrac{r^2 \left[f'(x_0)\right]^2}{1 + \left[f'(x)\right]^2} \\ f''(x_0) = \mp \dfrac{r^2}{(r^2 - (x_0 - x_c)^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$$

Nel secondo passaggio sostituiamo "$(x_0 - x_c)^2$" nella terza equazione per trovarci r^2 in funzione di $f(x)$ e x_0 *(anche qui l'ambiguita' di segno scompare al seguito di un elevamento a potenza).*

$$\Longrightarrow \begin{cases} f(x_0) = y_c \pm \sqrt{r^2 - (x_0 - x_c)^2} \\ (x_0 - x_c)^2 = \dfrac{r^2 \left[f'(x_0)\right]^2}{1 + \left[f'(x)\right]^2} \\ r^2 = \dfrac{\left(1 + \left[f'(x_0)\right]^2\right)^3}{\left[f''(x_0)\right]^2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f(x_0) = y_c \pm \sqrt{r^2 - (x_0 - x_c)^2} \\ (x_0 - x_c)^2 = \left(1 + \left[f'(x_0)\right]^2\right)^2 \cdot \dfrac{\left[f'(x_0)\right]^2}{\left[f''(x)\right]^2} \\ r^2 = \dfrac{\left(1 + \left[f'(x_0)\right]^2\right)^3}{\left[f''(x_0)\right]^2} \end{cases}$$

Infine ricaviamo anche y_c in funzione di $f(x)$ e x_0.

$$\Longrightarrow \begin{cases} y_c & = f(x_0) \mp \dfrac{1 + \left[f'(x_0)\right]^2}{|f''(x_0)|} \\ (x_0 - x_c)^2 & = \left(1 + \left[f'(x_0)\right]^2\right)^2 \cdot \dfrac{\left[f'(x_0)\right]^2}{\left[f''(x)\right]^2} \\ r^2 & = \dfrac{\left(1 + \left[f'(x_0)\right]^2\right)^3}{\left[f''(x_0)\right]^2} \end{cases} \Longrightarrow$$

Ora e' il momento di fare alcune considerazioni; La terza equazione non presenta ambiguita' quindi ci identifica quanto vale "r". Se vogliamo invece ricavarci x_c dalla seconda

equazione, saremmo costretti a mettere un "$\pm$", ma guardando la seconda equazione del primo sistema mi da un informazione impostantissima: infatti se $f(x_0)$ e' positiva la funzione sara' crescente e quindi sara' approssimata da un quadrante del cerchio dove il suo arco e' crescente. Il quarto in alto a sinistra del cerchio o quello in basso a destra sono quelli in cui $g'(x) > 0$. Nel primo caso $x_c - x_0 > 0$ e $f''(x_0) = g''(x_0) < 0$, nel secondo $x_c - x_0 < 0$ e $f''(x_0) = g''(x_0) > 0$. Per $f'(x_0) < 0$ si puo' ragionare allo stesso modo. Se $f'(x_0) = 0$ dovra' essere per forza $x_0 = x_c$.
Nella prima equazione invece dovendo essere $f''(x_0) = g''(x_0)$ se $f''(x_0) > 0$ la parte bassa del cerchio approssimera' la funzione, quindi il centro sara' piu' in alto di $f(x_0)$. Nel caso contrario il ragionamento e' analogo. Se invece $f'(x_0) = 0 \Rightarrow f''(x_0) = \frac{1}{r}$.

$$
\begin{cases}
y_c = \begin{matrix} f(x_0) - \dfrac{1 + [f'(x_0)]^2}{|f''(x_0)|} & * \text{ se } f''(x_0) < 0 \\ f(x_0) + \dfrac{1 + [f'(x_0)]^2}{|f''(x_0)|} & * \text{ se } f''(x_0) \geq 0 \end{matrix} \\[2em]
x_c = \begin{matrix} x_0 - \left(1 + \left[f'(x_0)\right]^2\right) \cdot \dfrac{|f'(x_0)|}{|f''(x)|} & * \left[\begin{matrix} \text{se } (f'(x_0) > 0 \wedge \ f''(x_0) < 0) \text{ oppure} \\ \text{se } (f'(x_0) < 0 \wedge \ f''(x_0) > 0) \end{matrix}\right. \\ x_0 & * \text{ se } f'(x_0) = 0 \\ x_0 + \left(1 + \left[f'(x_0)\right]^2\right) \cdot \dfrac{|f'(x_0)|}{|f''(x)|} & * \left[\begin{matrix} \text{se } (f'(x_0) > 0 \wedge \ f''(x_0) > 0) \text{ oppure} \\ \text{se } (f'(x_0) < 0 \wedge \ f''(x_0) < 0) \end{matrix}\right. \end{matrix} \\[2em]
r = \dfrac{\left(1 + [f'(x_0)]^2\right)^{\frac{3}{2}}}{|f''(x_0)|}
\end{cases}
$$