Cerchio osculatore di una data traiettoria in un dato punto

Emilio Taggi

March 1, 2020

Data una curva nello spazio, in ogni suo punto è possibile definire un versore tangente ed uno normale alla curva in questione. Considerando due distinti punti appartenenti alla curva, P e P', mediante i vettori tangenziali ad essi associati è possibile individuare un piano π contenente la curva, nel caso in cui questa sia piana, in caso così non fosse facciamo tendere P' a P, in modo tale che π tenda al piano osculatore in P. Sul piano osculatore così definito è possibile identificare una circonferenza in grado di approssimare la curva fino al secondo ordine in un intorno sufficentemente piccolo di P.

Restringendoci per semplicità al caso di una curva piana che possiamo identificare con una funzione $y = f(x)$, per determinare l'equazione della circonferenza $y = g(x)$ è sufficiente imporre le seguenti condizioni nel punto P:

$$f(x) = g(x)$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{dg(x)}{dx}$$

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{d^2g(x)}{dx^2}$$

che garantiscono la coincidenza fra la curva e la circonferenza del cerchio osculatore fino al secondo ordine. Consideriamo dunque una circonferenza di raggio R e centro in $C(\alpha, \beta)$ con equazione

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$$

dalla quale otteniamo la funzione $g(x)$ cercata:

$$g(x) = \beta \pm \sqrt{R^2 - (x-\alpha)^2} \tag{1}$$

in cui il segno $\pm$ dipende dalla curvatura di $f(x)$ e dunque da $f''(x)$. Procediamo come segue per determinare α, β e R; imponiamo le condizioni di coincidenza con $f(x)$ fino al secondo ordine e otteniamo:

$$f = \beta \pm \sqrt{R^2 - (x-\alpha)^2} \tag{2}$$

$$f' = \mp \frac{x-\alpha}{\sqrt{R^2 - (x-\alpha)^2}} \tag{3}$$

$$f'' = \mp \frac{R^2}{(R^2 - (x-\alpha)^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{4}$$

elevando al quadrato l'equazione (3) si ha:

$$f'^2 = \frac{(x-\alpha)^2}{R^2-(x-\alpha)^2}$$

e successivamente aggiungendo 1 otteniamo:

$$1+f'^2 = \frac{R^2}{R^2-(x-\alpha)^2} \Rightarrow R^2-(x-\alpha)^2 = \frac{R^2}{1+f'^2}$$

sostituendo opportunamente in (2) si ha:

$$\beta = f \mp \frac{1}{\sqrt{1+f'^2}}R \tag{5}$$

che lega l'ordinata del centro al raggio, mediante l'equazione della circonferenza otteniamo anche

$$\alpha = x \pm \frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}}R \tag{6}$$

Inoltre, per quanto ottenuto risulta anche

$$(1+f'^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{R^3}{(R^2-(x-\alpha)^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{7}$$

facendo ora il rapporto membro a membro fra (7) e (4) risulta:

$$\frac{(1+f'^2)^{\frac{3}{2}}}{|f''|} = R \tag{8}$$

siamo ora finalmente in grado di esprimere le coordinate del centro del cerchio osculatore relativo ad una funzione f

$$\alpha = x \pm \frac{f'(1+f'^2)}{|f''|} \qquad \beta = f \mp \frac{1+f'^2}{|f''|}$$

e possiamo discriminare fra le due possibili soluzioni a seconda che risulti $f'' > 0$ e dunque $\beta > f$ oppure il viceversa.

Al medesimo risultato si poteva giungere mediante considerazioni di altro genere. Data infatti una nota funzione $y = f(x)$ attraverso la formula della curvatura K:

$$K = \frac{|f''|}{[1+(f')^2]^{\frac{3}{2}}} \tag{9}$$

è possibile ricavare il raggio di curvatura della funzione mediante la relazione

$$R = \frac{1}{K} = \frac{[1+(f')^2]^{\frac{3}{2}}}{|f''|} \tag{10}$$

Per determinare invece le coordinate del centro $C(\alpha, \beta)$ del cerchio osculatore nel punto $P(x_p, y_p)$ è sufficiente imporre che queste appartengano alla normale ad f in P, si ha dunqe che:

$$\beta - y_p = -\frac{1}{f'}(\alpha - x_p) \tag{11}$$

combinando l'equazione (11) con l'equazione della circonferenza del cerchio osculatore si ottengono nuovamente le equazioni (5) e (6), il che dimostra l'uguaglianza dei due metodi risolutivi.