1. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{2\ln^2|x| - \ln|x| + 4}{\ln|x|},$$

e in particolare: dominio, eventuali simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti; crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, eventuali punti di non derivabilità; concavità, convessità, flessi. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$.

Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1\}$. f è derivabile, quindi continua, nel suo dominio

Simmetria: f è pari. Basta studiarla per $x > 0$.

Limiti significativi:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \Big(\underbrace{2\ln x}_{\to -\infty} - 1 + \frac{4}{\underbrace{\ln x}_{\to 0}} \Big) = -\infty$$

$x = 0$ asintoto verticale.

$$\lim_{x \to 1^\pm} f(x) = \lim_{x \to 1^\pm} \Big(\underbrace{2\ln x}_{\to 0} - 1 + \underbrace{\frac{4}{\ln x}}_{\to \pm\infty} \Big) = \pm\infty$$

$x = 1$ asintoto verticale

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \Big(\underbrace{2\ln x}_{\to +\infty} - 1 + \underbrace{\frac{4}{\ln x}}_{\to 0} \Big) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \Big(\underbrace{\frac{2\ln x}{x}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{4}{x\ln x}}_{\to 0} \Big) = 0$$

f non ammette asintoti orizzontali/obliqui.

Studio di f':

$$f'(x) = D\left(2\ln x - 1 + \frac{4}{\ln x}\right) = \frac{2}{x} - \frac{4}{x\ln^2 x} = \frac{2(\ln^2 x - 2)}{x\ln^2 x}$$

$$f'(x) = 0 \iff \ln x = \pm\sqrt{2} \iff x = e^{\pm\sqrt{2}}$$

$$f'(x) > 0 \iff x \in (0, e^{-\sqrt{2}}) \cup (e^{\sqrt{2}}, +\infty)$$

$$f'(x) < 0 \iff x \in (e^{-\sqrt{2}}, 1) \cup (1, e^{\sqrt{2}}).$$

f strettamente crescente in $(0, e^{-\sqrt{2}}]$ e in $[e^{\sqrt{2}}, +\infty)$.

f strettamenti decrescente in $[e^{-\sqrt{2}}, 1)$ e in $(1, e^{\sqrt{2}}]$

$x = e^{-\sqrt{2}}$ punto di massimo relativo. $f(e^{-\sqrt{2}}) = -(4\sqrt{2}+1)$

$x = e^{\sqrt{2}}$ " " minimo " . $f e^{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} - 1$

Studio di f'':

$$f''(x) = 2D\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x\ln^2 x}\right) = 2\left(-\frac{1}{x^2} + \frac{2(\ln x + 2)}{x^2\ln^3 x}\right)$$

$$= 2\,\frac{(-\ln^3 x + 2\ln x + 4)}{x^2\ln^3 x}$$

Osservato che il polinomio $-t^3 + 2t + 4$ si annulla per $t = 2$, si può fattorizzare il numeratore, ottenendo:

$$f''(x) = -\frac{2(\ln x - 2)(\ln^2 x + 2\ln x + 2)}{x^2\ln^3 x}$$

$f''(x) = 0 \iff x = e^2$

$f''(x) > 0 \iff x \in (1, e^2)$

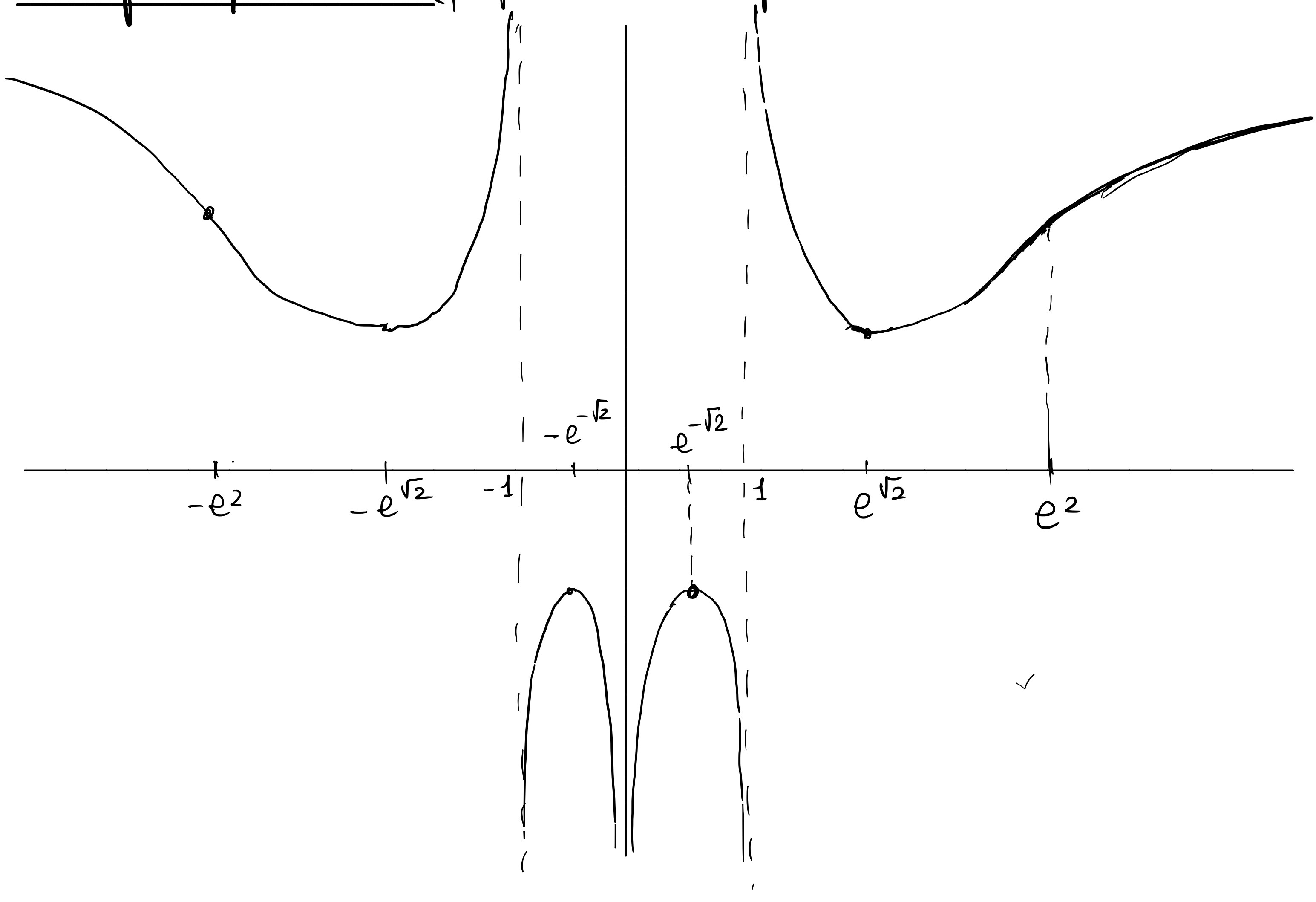
$f''(x) < 0 \iff x \in (0,1) \cup (e^2, +\infty)$.

f è strettamente convessa in $(1, e^2]$

f è strettamente concava in $(0,1)$ e in $[e^2, +\infty)$

$x = e^2$ è un punto di flesso.

Grafico qualitativo (proporzioni non rispettate.



2. a) Calcolare l'integrale $\int x^3 \sin(x^2+5)\, dx$.

b) Trovare una formula ricorsiva per l'integrale $I_n(x) = \int x^{2n+1} \sin(x^2+5)\, dx$.

a) $$\int x^3 \sin(x^2+5)\, dx = \frac{1}{2}\int t \sin(t+5)\, dt =$$

sost $x^2 = t$
$2x\,dx = dt$

[per parti: $f(t) = t$, $f'(t) = 1$
$g'(t) = \sin(t+5)$, $g(t) = -\cos(t+5)$]

$$= -\frac{t}{2}\cos(t+5) + \frac{1}{2}\int \cos(t+5)\, dt =$$

$$= -\frac{t}{2}\cos(t+5) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(t+5) + c =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin(x^2+5) - x^2\cos(x^2+5)\right) + c$$

b) Osservare che $I_n(x) = \frac{1}{2}\int t^n \sin(t+5)\, dt$

sost $x^2 = t$
$2x\,dx = dt$

Quindi, si può procedere per parti

$$I_n(x) = \frac{1}{2}\int t^n \sin(t+5)\, dt =$$

[$f(t) = t^n$, $f'(t) = n t^{n-1}$
$g'(t) = \sin(t+5)$, $g(t) = -\cos(t+5)$]

$$= -\frac{t^n}{2}\cos(t+5) + \frac{n}{2}\int t^{n-1}\cos(t+5)\, dt =$$

[per parti: $f(t) = t^{n-1}$, $f'(t) = (n-1)\, t^{n-2}$
$g'(t) = \cos(t+5)$, $g(t) = \sin(t+5)$]

$$= -\frac{t^n}{2}\cos(t+5) + \frac{n}{2}t^{n-1}\sin(t+5) - \frac{n(n-1)}{2}\int t^{n-2}\sin(t+5)\,dt$$

$$= -\frac{x^{2n}}{2}\cos(x^2+5) + \frac{n}{2}x^{2n-2}\sin(x^2+5) - n(n-1)\,I_{n-2}(x)$$

Questa è la formula cercata.

3. Dato il numero complesso
$$z = \frac{3i(i-3a)}{2i+1},$$
trovare $a \in \mathbb{R}$ tale che z sia un numero reale. Per tale valore di a, trovare le radici seste di z.

$$z = \frac{3i(i-3a)}{2i+1} = \frac{-3-9ai}{1+2i} \cdot \frac{1-2i}{1-2i} = \frac{-3+6i-9ai-18a}{5} =$$

$$= \frac{-3-18a}{5} + \frac{6-9a}{5}\, i.$$

Questo numero è reale se e solo se $\boxed{a = \frac{2}{3}}$. In tal caso

$\boxed{z = -3 = 3e^{i\pi}}$, Ne calcolo le radici seste.

$$W_k = \sqrt[6]{3}\, e^{i\theta_k}, \quad \text{con} \quad \theta_k = \frac{\pi + 2k\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3},$$
$$k = 0,1,2,3,4,5.$$

Quindi

$$W_0 = \sqrt[6]{3}\, e^{i\pi/6} = \frac{\sqrt[6]{3}}{2}\left(\sqrt{3}+i\right)$$

$$W_1 = \sqrt[6]{3}\, e^{i\pi/2} = \sqrt[6]{3}\, i$$

$$W_2 = \sqrt[6]{3}\, e^{i\frac{5\pi}{6}} = \frac{\sqrt[6]{3}}{2}\left(-\sqrt{3}+i\right)$$

$$W_3 = \sqrt[6]{3}\, e^{\frac{7}{6}\pi} = \frac{\sqrt[6]{3}}{2}\left(-\sqrt{3}-i\right) = \overline{W_2}$$

$$W_4 = \sqrt[6]{3}\, e^{\frac{3}{2}\pi} = -\sqrt[6]{3}\, i = \overline{W_1}$$

$$W_5 = \sqrt[6]{3}\, e^{\frac{11}{6}\pi} = \frac{\sqrt[6]{3}}{2}\left(\sqrt{3}-i\right) = \overline{W_0}.$$

4. Studiare, al variare dei parametri reali a, x, la convergenza delle seguenti serie:

$$i)\ \sum_{n=0}^{+\infty} \ln\left(\frac{an^2+3}{5n^2+1}\right), \quad ii)\ \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(\frac{an^2+3}{5n^2+1}\right), \quad iii)\ \sum_{n=0}^{+\infty} \ln\left(\frac{an^2+3}{5n^2+1}\right)(x+7)^n.$$

Osserviamo che le serie sono definite solo per $a \geq 0$, altrimenti l'argomento del logaritmo è definitivamente negativo.

i) Per $a \geq 0$, $a \neq 5$, il termine della serie non è infinitesimo. Quindi la serie non converge. Più precisamente, la serie diverge a $+\infty$ se $a > 5$ (serie a termini positivi), mentre diverge a $-\infty$ se $0 \leq a < 5$ (serie definitivamente a termini negativi).

Per $a = 5$, la serie è a termini positivi, e si ha:

$$\ln \frac{5n^2+3}{5n^2+1} = \ln\left(1 + \frac{2}{5n^2+1}\right) \sim \frac{2}{5n^2+1} \sim \frac{2}{5n^2}$$

e quindi la serie ha lo stesso carattere di $\sum_n \frac{1}{n^2}$, che converge.

ii) Come nel caso precedente, la serie non converge se $a \neq 5$.
Se $a = 5$, la serie converge perché, in base al punto precedente, converge assolutamente.

iii) Si tratta di una serie di potenze centrata in $x_0 = -7$, con coefficienti

$$a_n = \ln\left(\frac{an^2+3}{5n^2+1}\right)$$

Se $a > 0$, $a \neq 5$, si ha

$$\lim_{n \to +\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\ln a/5}{\ln a/5}\right| = 1$$

Nel caso particolare $a=0$, si ha:

$$a_n = \ln \frac{3}{5n^2+1} = \ln 3 - 2\ln n - \ln\left(5+\frac{1}{n^2}\right) \sim -2\ln n$$

pertanto anche in questo caso $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$.

Nel caso $a=5$, abbiamo visto che $a_n \sim \frac{2}{5n^2}$, quindi anche in questo caso

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1.$$

Quindi in ogni caso il raggio di convergenza vale 1.

La serie converge (assolutamente) se $|x+7|<1$, cioè se $-8<x<-6$

La serie non converge se $|x+7|>1$, cioè se $x<-8$ opp. $x>-6$

Per $x=-8$ e $x=-6$, la serie è stata studiata nei punti precedenti

CONCLUSIONI:

La terza serie converge se e solo se:

$$(x\in(-8,-6) \wedge a\geq 0) \vee (x\in\{-8,-6\} \wedge a=5).$$

5. Trovare estremo superiore ed estremo inferiore delle seguenti successioni:

$$a_n = \sqrt{2n^2 - 15n + 30}\,, \qquad b_n = \sqrt{n^2 + 6n + 10} - n\,.$$

La successione $\{a_n\}$ ha la stessa monotonia di $2n^2 - 15n + 30$. Dallo studio della parabola $y = 2x^2 - 15x + 30$, questa ammette un minimo assoluto in $x = \frac{15}{4}$, quindi a_n decresce fino ad a_3, cresce da a_4 in poi.

Tenuto conto che $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, si ha:

$$\sup_n a_n = +\infty,$$

$$\inf_n a_n = \min_n a_n = \min\{a_3, a_4\} = \min\{\sqrt{3}, \sqrt{2}\} = \sqrt{2}$$

Per studiare $\{b_n\}$, consideriamo la funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 10} - x$$

La derivata $f'(x) = \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+6x+10}} - 1$ è negativa $\forall x \geq 0$.

Quindi la successione $b_n = f(n)$ è decrescente. Ne segue che $\sup_n b_n = \max_n b_n = b_0 = \sqrt{10}$

(non era precisato se n partiva da 0 oppure da 1: entrambe le scelte sono accettabili).

$$\inf_n b_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2+6n+10} - n\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n \underbrace{\left(\sqrt{1 + \frac{6}{n} + \frac{10}{n^2}} - 1\right)}_{\sim \frac{1}{2}\left(\frac{6}{n} + \frac{10}{n^2}\right)} = 3.$$