1. Studiare la funzione
$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2}{(2x-3)^4}\right) \; ,$$
e in particolare: dominio, eventuali simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti; crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, eventuali punti di non derivabilità; concavità, convessità, flessi. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$.

Dominio:

$$\mathbb{R} \setminus \left\{ 0, \frac{3}{2} \right\}$$

La funzione è derivabile, quindi continua, nel suo dominio.
Non sono presenti simmetrie evidenti.

Limiti significativi e asintoti

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = (\ln 0^+) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = (\ln 0^+) = -\infty \qquad x = 0 \text{ asintoto verticale}$$

$$\lim_{x \to 3/2} f(x) = (\ln(+\infty)) = +\infty. \qquad x = \frac{3}{2} \text{ asintoto verticale}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2\ln|x| - 4\ln|2x-3|}{x} = 0$$

$\Rightarrow$ non ammette asintoti obliqui.

Derivata prima e monotonia

$$f'(x) = D\left(2\ln|x| - 4\ln|2x-3|\right) = \frac{2}{x} - \frac{8}{2x-3} =$$

$$= \frac{2\left[2x-3-4x\right]}{x(2x-3)} = -\frac{2(2x+3)}{x(2x-3)}$$

$$f'(x) = 0 \iff x = -\frac{3}{2}.$$

$f'(x) > 0 \iff x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(0, \frac{3}{2}\right)$

$f'(x) < 0 \iff x \in \left(-\frac{3}{2}, 0\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$

Quindi:

f strettamente crescente in $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right]$ e in $\left(0, \frac{3}{2}\right)$

f strettamente decrescente in $\left[-\frac{3}{2}, 0\right)$ e in $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

$x = -\frac{3}{2}$ è punto di massimo relativo.

Derivata seconda, e concavità/convessità

$$f''(x) = 2\, D\left(\frac{1}{x} - \frac{4}{2x-3}\right) = 2\left(-\frac{1}{x^2} + \frac{8}{(2x-3)^2}\right) =$$

$$= \frac{2\left(8x^2 - (2x-3)^2\right)}{x^2\,(2x-3)^2} = \frac{2\left(4x^2 + 12x - 9\right)}{x^2\,(2x-3)^2}$$

$$f''(x) = 0 \iff x = \frac{-3 \pm 3\sqrt{2}}{2}$$

$$f''(x) > 0 \iff x \in \left(-\infty, \frac{-3-3\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{-3+3\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$$

$$f''(x) < 0 \iff x \in \left(\frac{-3-3\sqrt{2}}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{-3+3\sqrt{2}}{2}\right)$$

Quindi:

f è strettamente convessa in $\left(-\infty, \frac{-3-3\sqrt{2}}{2}\right]$,

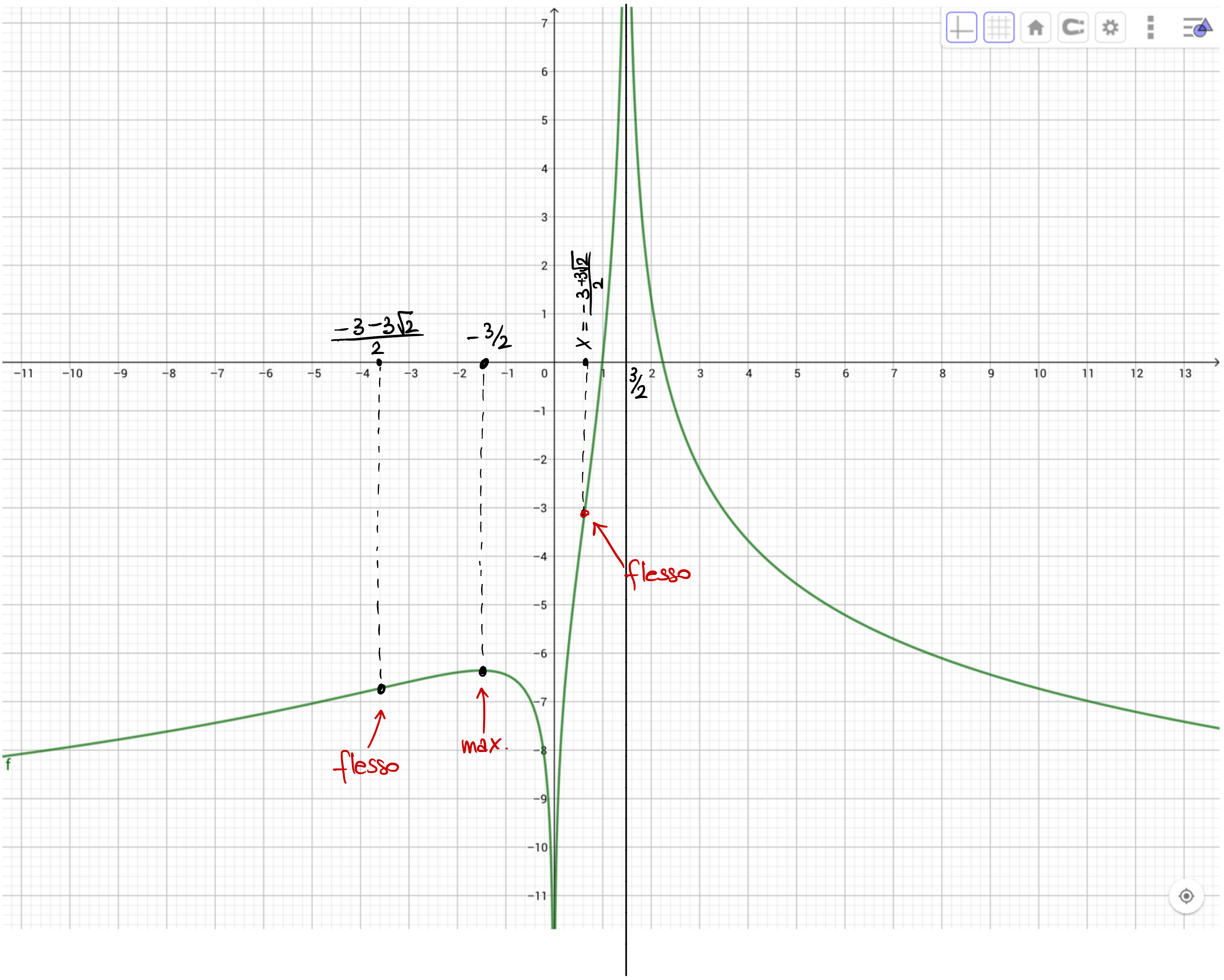
in $\left[\frac{-3+3\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{2}\right)$ e in $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

f è strettamente concava in $\left[\frac{-3-3\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ e in

$\left(0, \frac{-3+3\sqrt{2}}{2}\right]$.

I pti $x = \frac{-3 \pm 3\sqrt{2}}{2}$ sono punti di flesso.

Il grafico qualitativo è il seguente:



2. a) Calcolare $\displaystyle\int x^2\sqrt{16+x^6}\,dx$.

b) Calcolare l'area dell'insieme $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ |x|\le 1,\ |y|\le x^2\sqrt{16+x^6}\right\}$.

Sostituzione $\qquad x^3 = t \implies 3x^2dx = dt$

$$\int x^2\sqrt{16+x^6}\,dx = \frac{1}{3}\int\sqrt{16+t^2}\,dt$$

Per parti:

$$\int\sqrt{16+t^2}\,dt = t\sqrt{16+t^2} - \int\frac{t^2}{\sqrt{16+t^2}}\,dt =$$

$$= t\sqrt{16+t^2} - \int\frac{(t^2+16)-16}{\sqrt{16+t^2}}\,dt =$$

$$= t\sqrt{16+t^2} - \underbrace{\int\sqrt{16+t^2}\,dt}_{\text{porto a } 1^\circ \text{ membro,}} + \int\frac{16\,dt}{\sqrt{16+t^2}}$$

$$2\int\sqrt{16+t^2}\,dt = t\sqrt{16+t^2} + 4\int\frac{dt}{\sqrt{1+\left(\frac{t}{4}\right)^2}} =$$

$$= t\sqrt{16+t^2} + 16\ \operatorname{settsh}\left(\frac{t}{4}\right)$$

Quindi il nostro integrale vale:

$$\frac{1}{6}t\sqrt{16+t^2} + \frac{8}{3}\ln\left(\frac{t}{4}+\sqrt{1+\frac{t^2}{16}}\right) + c$$

$$= \frac{1}{6}t\sqrt{16+t^2} + \frac{8}{3}\ln\left(t+\sqrt{16+t^2}\right) + c_1$$

$$= \frac{1}{6}x^3\sqrt{16+x^6} + \frac{8}{3}\ln\left(x^3+\sqrt{16+x^6}\right) + c_1 .$$

In alternativa:

$$\int \sqrt{16+t^2}\, dt = \left[\begin{array}{ll} \text{sost} & t = 4\,\mathrm{sh}\, s \\ & dt = 4\,\mathrm{ch}\, s\, ds \\ & s = \mathrm{settsh}\,\frac{t}{4} \end{array}\right]$$

$$= \int \sqrt{16+16\,\mathrm{sh}^2 s}\cdot 4\,\mathrm{ch}\, s\, ds = 16 \int \mathrm{ch}^2 s\, ds$$

$$\int \mathrm{ch}^2 s\, ds = [\text{per parti}] = \mathrm{sh}\, s\ \mathrm{ch}\, s - \int \mathrm{sh}^2 s\, ds =$$

$$= \mathrm{sh}\, s\ \mathrm{ch}\, s - \int (\mathrm{ch}^2 s - 1)\, ds$$

e quindi $\displaystyle\int \mathrm{ch}^2 s\, ds = \frac{1}{2}\left(\mathrm{sh}\, s\ \mathrm{ch}\, s + s\right) + c$

Quindi

$$\int \sqrt{16+t^2}\, dt = 8\left(\mathrm{sh}\, s\ \mathrm{ch}\, s + s\right)\Big|_{s=\mathrm{settsh}\frac{t}{4}} =$$

$$\left[\Longrightarrow \mathrm{sh}\, s = \frac{t}{4},\quad \mathrm{ch}\, s = \sqrt{1+\mathrm{sh}^2 s} = \sqrt{1+\frac{t^2}{16}}\right]$$

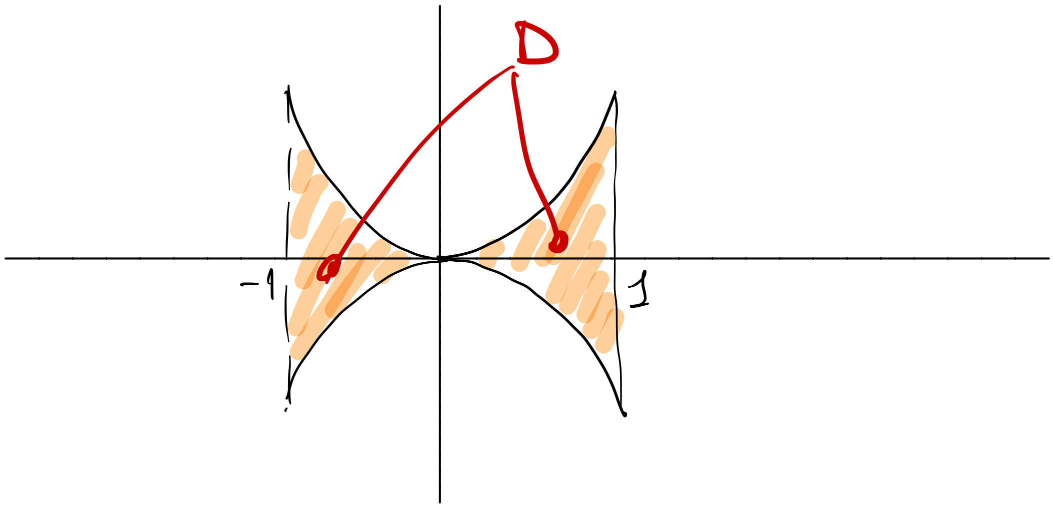
$$= 8\left(\frac{t}{4}\sqrt{1+\frac{t^2}{16}} + \mathrm{settsh}\,\frac{t}{4}\right) + c$$

$$= \frac{1}{2}\, t\sqrt{16+t^2} + 8\,\mathrm{settsh}\,\frac{t}{4} + c.$$

(in accordo con quanto trovato prima).

b) la funzione $f(x) = x^2\sqrt{16+x^6}$ è pari e crescente per $x \geq 0$.

L'insieme D è così fatto:



Quindi, per simmetria, la sua area vale

$$\text{Area } D = 4\int_0^1 x^2\sqrt{16+x^6}\,dx =$$

$$= \frac{1}{6}\sqrt{17} + \frac{8}{3}\ln\left(1+\sqrt{17}\right)$$

3. Risolvere ciascuna delle seguenti equazioni e disegnarne le soluzioni nel piano complesso

$$z^2 - 2iz - |z|^2 = 3\,\mathrm{Re}(z)\ , \qquad \left(\frac{w-i}{w}\right)^4 + 4 = 0\ .$$

$z^2 - 2iz - |z|^2 = 3\,\mathrm{Re}(z)$. Poniamo $z = x + iy$, $(x, y \in \mathbb{R})$

$(x+iy)^2 - 2i(x+iy) - x^2 - y^2 = 3x$

$\cancel{x^2} - y^2 + 2ixy - 2ix + 2y - \cancel{x^2} - y^2 = 3x$

Considerando separatamente la parte reale e la parte immaginaria si ottiene un sistema

$$\begin{cases} 2y - 2y^2 = 3x \\ xy - x = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1 \end{array}$$

$$1)\ \begin{cases} x = 0 \\ y^2 - y = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} y = 0 \\ y = 1 \end{array}$$

Sol^{ni} $\boxed{z_1 = 0\ ,\ z_2 = i}$

2) $y = 1 \Longrightarrow x = 0$ già considerata.

$\left(\frac{w-i}{w}\right)^4 + 4 = 0$ Poniamo $z = \frac{w-i}{w}$

$\Rightarrow z^4 = -4$ cerco le radici quarte di -4

$-4 = 4e^{i\pi}$

$z_k = \sqrt[4]{4}\, e^{i\theta_k} = \sqrt{2}\, e^{i\theta_k}$

dove $\theta_k = \dfrac{\pi + 2k\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$ $\qquad k = 0, 1, 2, 3$

$$z_0 = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4} = 1 + i$$

$$z_1 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}} = -1 + i$$

$$z_2 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{5\pi}{4}} = -1 - i$$

$$z_3 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{7\pi}{4}} = 1 - i$$

Ora devo trovare i corrispondenti w

$$\frac{w - i}{w} = z \implies w - i = zw \implies w(1 - z) = i$$

$$\implies w = \frac{i}{1 - z}$$

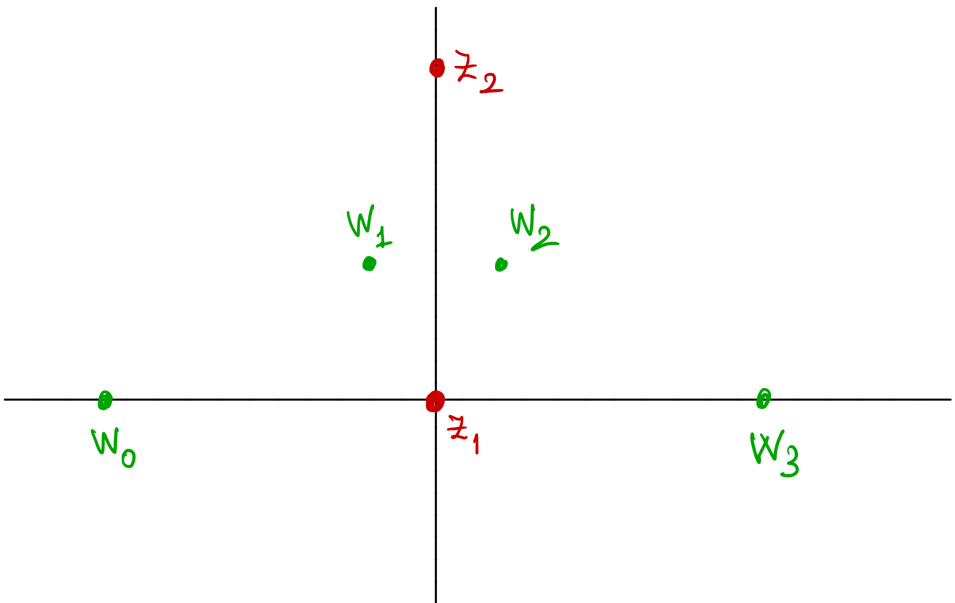
$$w_0 = \frac{i}{1 - z_0} = \frac{i}{-i} = -1$$

$$w_1 = \frac{i}{1 - z_1} = \frac{i}{2 - i} = \frac{i(2+i)}{5} = \frac{-1 + 2i}{5}$$

$$w_2 = \frac{i}{1 - z_2} = \frac{i}{2 + i} = \frac{i(2-i)}{5} = \frac{1 + 2i}{5}$$

$$w_3 = \frac{i}{1 - z_3} = \frac{i}{i} = 1.$$

Disegno tutti i numeri trovati:



4. Calcolare l'ordine di infinito/infinitesimo delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x^3 + 5\sin^2 x} \quad (\text{per } x \to 0^+ \text{ e } x \to +\infty), \qquad g(x) = x^2 - 3x^4 \ln x \quad (\text{per } x \to 0^+),$$

$$h(x) = \frac{3}{x^2} + \sin\frac{\alpha}{x^2} + \frac{\beta}{x^6} \quad (\text{per } x \to +\infty, \text{ al variare di } \alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

Per $x \to 0^+$ si ha: $\operatorname{arctg} x \sim x$

$$x^3 + 5\operatorname{sen}^2 x = x^2 \underbrace{\left(x + 5\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\right)}_{\to 5} \sim 5x^2$$

Quindi $f(x) = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x^3 + 5\operatorname{sen}^2 x} \sim \dfrac{x}{5x^2} = \dfrac{1}{5x}$

Infinito di ordine 1

per $x \to +\infty$ $\operatorname{arctg} x \to \dfrac{\pi}{2}$.

$$x^3 + 5\operatorname{sen}^2 x = x^3\left(1 + \underbrace{\frac{5\operatorname{sen}^2 x}{x^3}}_{\to 0}\right) \sim x^3$$

Quindi $f(x) \sim \dfrac{\pi}{2x^3}$: **infinitesimo di ordine 3.**

Per $x \to 0^+$ si ha:

$$g(x) = x^2 - 3x^4 \ln x = x^2\left(1 - \underbrace{3x^2 \ln x}_{\to 0}\right) \sim x^2$$

Infinitesimo di ordine 2

Infine, per $x \to +\infty$,

$$h(x) = \frac{3}{x^2} + \sin\frac{\alpha}{x^2} + \frac{\beta}{x^6} = [\text{Taylor}]$$

$$= \frac{3}{x^2} + \left(\frac{\alpha}{x^2} - \frac{\alpha^3}{6x^6} + \frac{\alpha^5}{120x^{10}} + o\left(\frac{1}{x^{10}}\right)\right) + \frac{\beta}{x^6} =$$

$$= \frac{3+\alpha}{x^2} + \frac{\beta - \frac{\alpha^3}{6}}{x^6} + \frac{\alpha^5}{120\, x^{10}} + o\left(\frac{1}{x^{10}}\right)$$

Quindi:

se $\begin{pmatrix} \alpha \neq -3 \\ \beta \text{ qualsiasi} \end{pmatrix}$, $h(x) \sim \frac{3+\alpha}{x^2}$ infinitesimo di ordine 2

se $\begin{pmatrix} \alpha = -3 \\ \beta \neq \frac{9}{2} \end{pmatrix}$ $h(x) \sim \frac{\beta - 9/2}{x^6}$ infinitesimo di ordine 6

se $\begin{pmatrix} \alpha = -3 \\ \beta = \frac{9}{2} \end{pmatrix}$ $h(x) \sim -\frac{81}{40\, x^{10}}$ infinitesimo di ordine 10

5. Data la funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2+a} + bx - \operatorname{arctg}(x^2)\,,$$

trovare tutte le coppie $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ (se esistono) che rendano vera (separatamente) ciascuna delle seguenti condizioni:

i) f è derivabile in $\mathbb{R}$;

ii) esistono due punti distinti in cui f non è derivabile;

iii) f è definitivamente crescente per $x \to +\infty$;

iv) f ammette minimo relativo in $x_0 = 0$.

i e ii) Gli unici problemi di derivabilità sono per $x^2 + a = 0$.

Quindi: se $a > 0$ f è derivabile in tutto $\mathbb{R}$.

se $a = 0$, $f(x) = x^{2/3} + bx - \operatorname{arctg}(x^2)$.

Studio la derivabilità in $x = 0$.

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^{2/3} - bh - \operatorname{arctg} h^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{h^{2/3}}{h} = +\infty.$$

Quindi f non è derivabile in $x = 0$.

Se $a < 0$, allora ci sono problemi di derivabilità in $x = \pm\sqrt{-a}$. In tal caso per calcolare la derivata può essere conveniente (visto che f è continua), calcolare

$$f'_+(\sqrt{-a}) = \lim_{x\to(\sqrt{-a})^+} f'(x) =$$

$$= \lim_{x\to(\sqrt{-a})^+} \left(\underbrace{\frac{2x}{3(x^2-a)^{2/3}}}_{\to +\infty} - b - \underbrace{\frac{2x}{1+x^4}}_{\to \frac{2\sqrt{a}}{1+a^2}} \right) = +\infty$$

e quindi f non è derivabile in $x = \sqrt{-a}$

Similmente in $x = -\sqrt{-a}$

Quindi: risposta a i): $a>0$, $b\in\mathbb{R}$

risposta a ii): $a<0$, $b\in\mathbb{R}$.

iii). Vediamo la derivata: per $x\to+\infty$ si ha def^{te}

$$f'(x)=\underbrace{\frac{2x}{3(x^2+a)^{2/3}}}_{\to 0}+b-\underbrace{\frac{2x}{1+x^4}}_{\to 0}\xrightarrow[x\to+\infty]{} b.$$

Quindi se $b>0$ si ha def^{te} $f'(x)>0$ (permanenza del segno)

se $b<0$ " " " $f'(x)<0$

Per $b=0$ si ha

$$f'(x)=\frac{2x}{3(x^2+a)^{2/3}}-\frac{2x}{1+x^4}=$$

$$=\frac{1}{x^{1/3}}\underbrace{\left[\underbrace{\frac{2x^{4/3}}{3(x^2+a)^{2/3}}}_{\to 2/3}-\underbrace{\frac{2x^{4/3}}{1+x^4}}_{\to 0}\right]}_{\to 2/3 \text{ (quindi def}^{te}>0)}$$

Quindi la risposta a iii) è: $b\geq 0$, $a\in\mathbb{R}$.

Infine iv). Se $a\neq 0$, deve essere $f'(0)=0$.

$$f'(0)=b \implies b=0.$$

Controllo il segno di $f''(0)$

$$f''(0)=\frac{2}{3a^{2/3}}-2>0 \iff |a|<1$$

Restano da studiare i casi $a = \pm 1$, $a = 0$

Se $a = 1$, $f(x) = (x^2+1)^{1/3} - \operatorname{arctg}(x^2)$

Pongo $x^2 = t \in [0, +\infty)$, ottengo

$g(t) = (t+1)^{1/3} - \operatorname{arctg} t$

$g'(0) = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$

quindi per t piccolo t è decrescente. $\Rightarrow$ per x piccolo $f(x) < f(0)$ $\Rightarrow$ max. rel. stretto.

Similmente per $a = -1$, in tal caso $g'(0) = -\frac{4}{3} < 0$.

Per $a = 0$, $f(x) = x^{2/3} - \operatorname{arctg} x^2 \sim x^{2/3}$ per $x \to 0$

Quindi per x piccolo si ha $f(x) > 0 = f(x)$.

$\Rightarrow$ min. relativo.

Risposta a iv): $-1 < a < 1$, $b = 0$