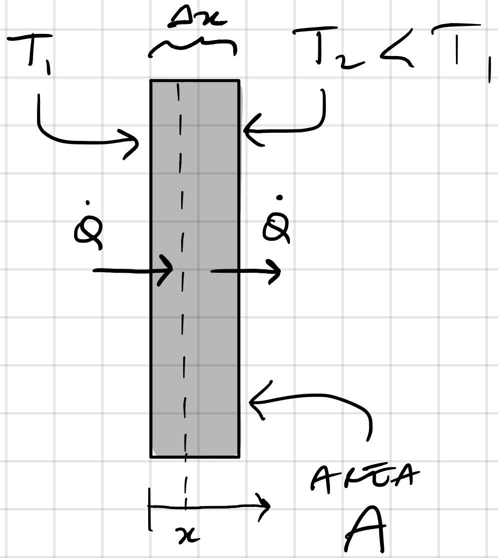
LEZIONE 6

18/10/21

CONDUZIONE DEL CALORE (REGIME STAZIONARIO)



$$T(x,t) \xrightarrow[\text{STAZIONARIO}]{\text{REGIME}} T(x)$$

$T(x,t)$: IN GENERALE

$T(x)$: NON DIPENDE DAL TEMPO $\Rightarrow$ EQUILIBRIO LOCALE

$$\dot{Q}_{IN} = \dot{Q}_{OUT} = \dot{Q}$$

$\dot{Q}$: QUANTITÀ DI CALORE CHE ATTRAVERSA LA LASTRA PER UNITÀ DI TEMPO

$$\dot{Q} \begin{cases} \propto \dfrac{\Delta T}{\Delta x} \\ \propto A \end{cases} \Rightarrow \boxed{\dot{Q} = -kA\frac{\Delta T}{\Delta x}}$$

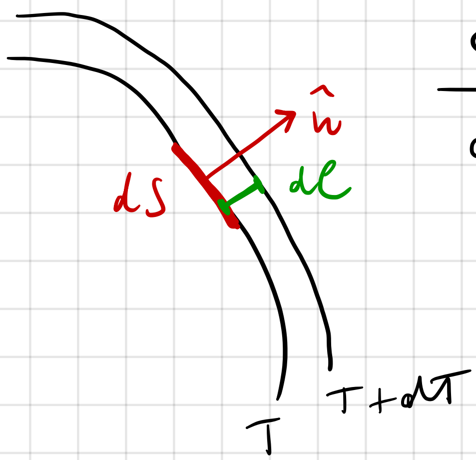
$\Delta T = T_2 - T_1$

$T_1 > T_2 \Rightarrow \dot{Q} > 0$ $\longrightarrow$

k = CONDUCIBILITÀ TERMICA $\quad [k] = \left[\dfrac{E}{t\,L^{\cancel{2}}\,T}\right] \left(\dfrac{W}{m\,K}\right)$

RAME	400	W/mK
ACQUA	0.6	W/mK
ARIA	0.02	W/mK

$$\frac{dT}{dl} = \vec{\nabla} T \cdot \hat{n}$$



$$\frac{\delta Q}{dt} = -k\,dS\,\frac{dT}{dl} = -k\vec{\nabla}T \cdot d\vec{S}$$

$d\vec{S} \rightarrow dS\,\hat{n}$

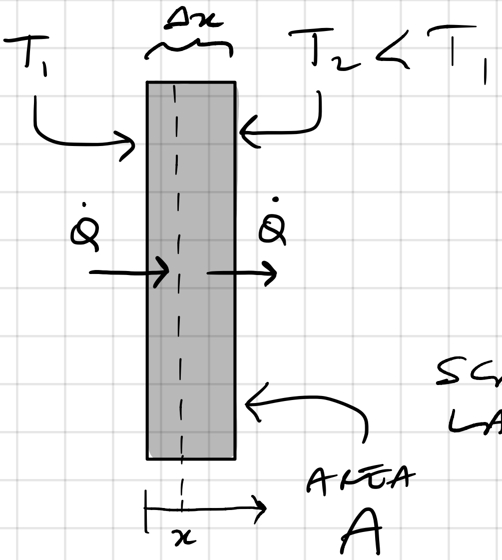
$$\boxed{\vec{J} = -k\vec{\nabla}T}$$

FLUSSO DI CALORE $\quad \left[\dfrac{E}{t\,L^2}\right]$

LEZIONE 6

18/10/21

CONDUZIONE DEL CALORE (REGIME STAZIONARIO)



$T(x,t) \xrightarrow[\text{STAZIONARIO}]{\text{REGIME}} T(x)$

IN GENERALE

NON DIPENDE DAL TEMPO $\Rightarrow$ EQUILIBRIO LOCALE

SCRIVIAMO IL I PRINCIPIO PER LA LASTRA IN UN INTERVALLO DI TEMPO dt

$$dW = \delta Q - \delta L \Rightarrow \delta Q = 0 \Rightarrow \dot{Q}_{IN} = \dot{Q}_{OUT} = \dot{Q}$$

$dW = 0$ (STAZIONARIETÀ), $\delta L = PdV = 0$ (STAZIONARIETÀ)

$\dot{Q}_{IN}$: CALORE CHE ENTRA PER UNITÀ DI TEMPO

$\dot{Q}_{OUT}$: CALORE CHE ESCE PER UNITÀ DI TEMPO

$$\dot{Q} \begin{cases} \propto \dfrac{\Delta T}{\Delta x} \\ \propto A \end{cases} \Rightarrow \boxed{\dot{Q} = -kA\frac{\Delta T}{\Delta x}}$$

$\dot{Q}$: QUANTITÀ DI CALORE CHE ATTRAVERSA LA LASTRA PER UNITÀ DI TEMPO

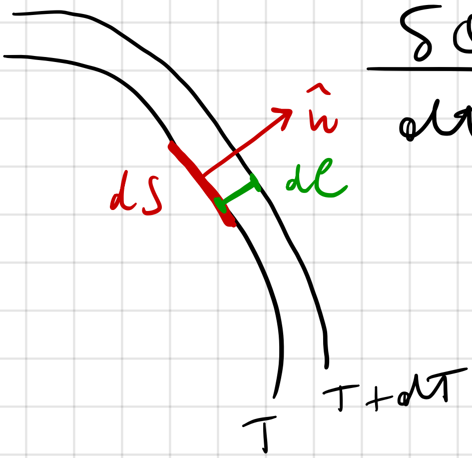
$\Delta T = T_2 - T_1$

$T_1 > T_2 \Rightarrow \dot{Q} > 0 \quad \longrightarrow$

k = CONDUCIBILITÀ TERMICA $\quad [k] = \left[\dfrac{E\,L}{t\,L^{\cancel{2}}\,T}\right] \left(\dfrac{W}{m\,K}\right)$

	k (W/mK)
RAME	400
ACQUA	0.6
ARIA	0.02

$$\frac{dT}{dl} = \vec{\nabla} T \cdot \hat{n}$$



$$\frac{\delta Q}{dt} = -K\, dS\, \frac{dT}{dl} = -K \vec{\nabla} T \cdot d\vec{S} = \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

$d\vec{S} \rightarrow dS\,\hat{n}$

$$\boxed{\vec{J} = -K \vec{\nabla} T}$$

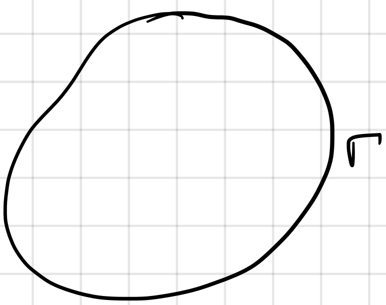
$$\left[\frac{E}{t\, L^2}\right]$$

$\vec{J}$ = FLUSSO DI CALORE

$\vec{J} \cdot \hat{n}$ = CALORE CHE NELL'UNITÀ DI TEMPO ATTRAVERSA UNA SUPERFICIE CON NORMALE $\hat{n}$ E AREA UNITARIA

ANALOGIE:

- $\vec{J} = -\underbrace{\sigma}_{\text{CONDUC. ELETTR.}} \vec{\nabla} \underbrace{V}_{\text{POTENZIALE ELETTRICO}}$ FLUSSO DI CARICA
- $\vec{J} = -\underbrace{D}_{\text{COEFFICIENTE DI DIFFUSIONE}} \vec{\nabla} \underbrace{c}_{\text{CONCENTRAZIONE}}$ FLUSSO DI MASSA



$$\frac{\delta Q}{dt} = \int_{\Gamma} \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int \vec{\nabla} \cdot \vec{J}\, dV$$

CONDIZIONE DI STAZIONARIETÀ

$$\frac{\delta U}{dt} = \frac{\delta L}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{\delta Q}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0}$$

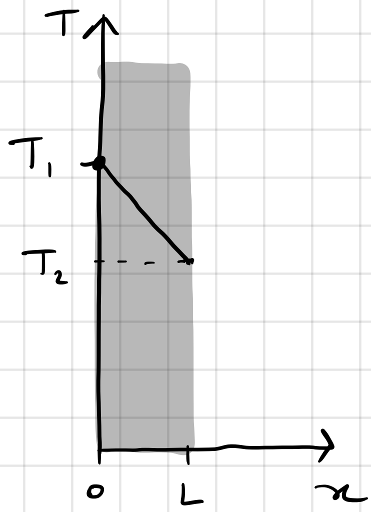
PROBLEMA UNIDIMENSIONALE

1) LASTRE

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J}=0$$
$$\Downarrow$$

$$J(x) = -k\frac{dT(x)}{dx} \qquad \frac{dJ}{dx}=0 \Rightarrow \frac{d^2T}{dx^2}=0$$

$$T(x) = ax+b$$



$$T(0) = b = T_1$$
$$T(L) = aL + T_1 = T_2$$
$$\Downarrow$$
$$a = \frac{T_2 - T_1}{L}$$

$$T(x) = \frac{T_2-T_1}{L}x + T_1$$

2) SIMMETRIA SFERICA

$$T(\vec{r}) = T(r) \qquad \vec{\nabla} \longrightarrow \hat{r}\frac{\partial}{\partial r}$$

$$4\pi r J_r = \alpha$$
$$J_r = \frac{\alpha}{4\pi r}$$

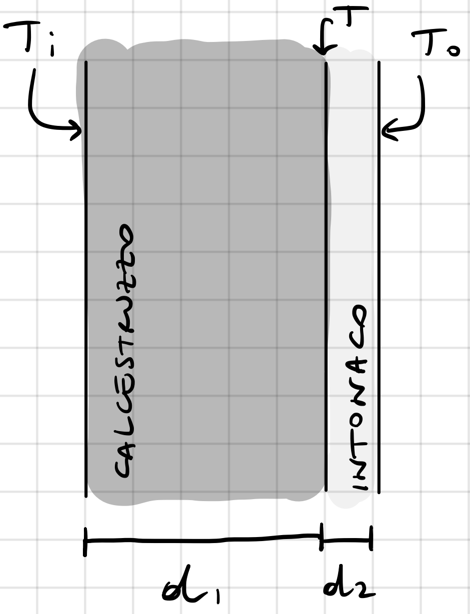
$$\vec{J} = \underbrace{-k\frac{dT}{dr}}_{J_r}\hat{r}$$

COSTANTE DI INTEGRAZIONE

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2 J_r = -\frac{k}{r^2}\frac{d}{dr}r^2\frac{dT}{dr} = 0 \Rightarrow r^2\frac{dT}{dr} = a$$

$$\frac{dT}{dr} = \frac{a}{r^2} \qquad T = -\frac{a}{r} + b$$

ESERCIZIO (ESEMPIO III.1 MENCUCCINI)



$S = 12\ m^2$

$d_1 = 15\ cm$ $\qquad k_1 = 1.3\ W/mK$

$d_2 = 3\ cm$ $\qquad k_2 = 0.8\ W/mK$

$T_i = 18°C$

$T_o = 2°C$

$\dot{Q} = ?$

CONDUTTANZA

$$J_1 = k_1 \frac{T_i - T}{d_1} = h_1 (T_i - T) \qquad h_1 = \frac{k_1}{d_1}$$

$$J_2 = k_2 \frac{T - T_o}{d_2} = h_2 (T - T_o) \qquad h_2 = \frac{k_2}{d_2}$$

$$\frac{J_1}{h_1} + \frac{J_2}{h_2} = T_i \cancel{- T} \cancel{+ T} - T_o = T_i - T_o$$

$$J_1 = J_2 = J \qquad J\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}\right) = T_i - T_o$$

$$J = h' (T_i - T_o) \qquad \frac{1}{h'} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}$$

GLI INVERSI DELLE CONDUTTANZE DI LASTRE IN SERIE SI SOMMANO (COME RESISTENZE ELETTRICHE IN SERIE)

$$h' < \min(h_1, h_2)$$

$$h_1 = \frac{1.3}{0.15} \frac{W}{m^2 K} = 8.7 \frac{W}{m^2 K} \qquad h_2 = \frac{0.8}{0.03} \frac{W}{m^2 K} = 26.7 \frac{W}{m^2 K}$$

$$h' = \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}\right)^{-1} = 6.5 \frac{W}{m^2 K}$$

$$\dot{Q} = J S = h'(T_i - T_o) S = 6.5 \frac{W}{\cancel{m^2 K}} 16 \cancel{K} \, 12 \cancel{m^2} = 1.2 \, kW$$

AGGIUNGENDO $d_3 = 5$ cm DI POLIURETANO ESPANSO $k_3 = 0.026 \frac{W}{mK}$

$$h_3 = \frac{0.026}{0.05} \frac{W}{m^2 K} = 0.52 \frac{W}{m^2 K}$$

$$h' = \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}\right)^{-1} = 0.48 \frac{W}{m^2 K}$$

$\dot{Q} = 92$ W CONSUMO ABBATTUTO DI $\sim$ 10 VOLTE