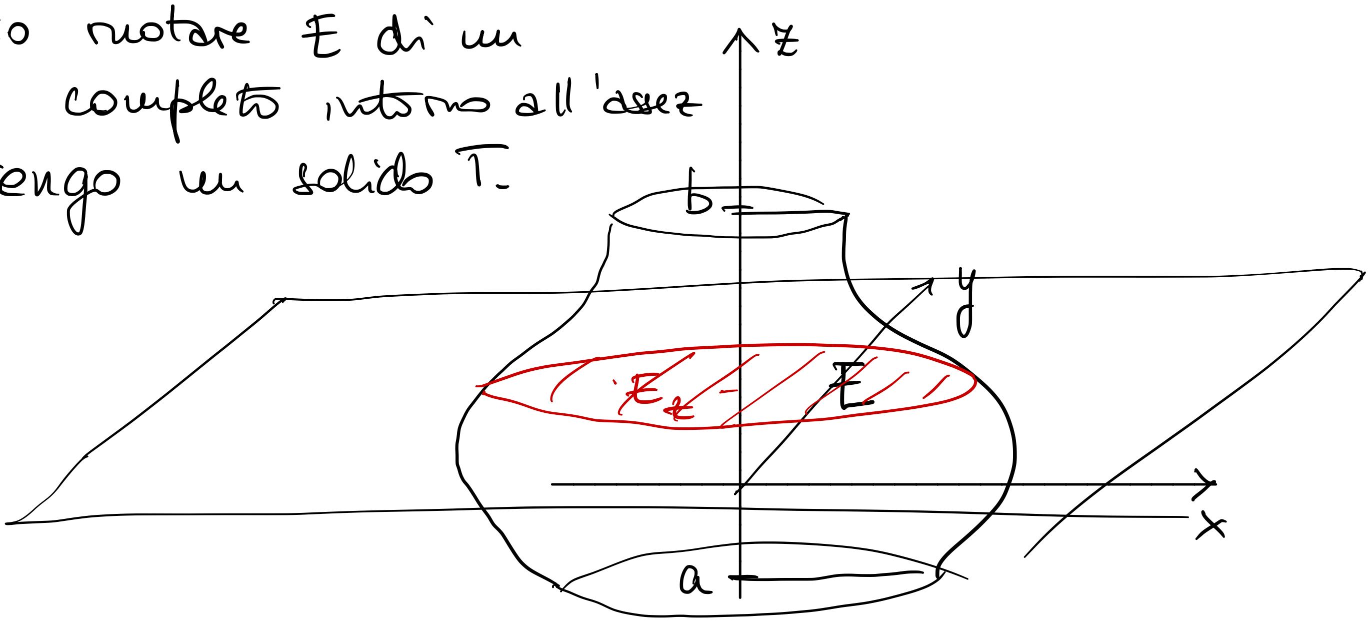
Volume di un solido di rotazione

Sia E un dominio del semipiano xz (con $x \geq 0$) della forma

$$E = \{(x,z) : a \leq z \leq b,\ 0 \leq x \leq g(z)\}$$

con $g(z)$ continua e ≥ 0

Faccio ruotare E di un giro completo intorno all'asse z e ottengo un solido T.



vol T = ?

$$\text{vol}\, T = \int_a^b dz \ \text{area}(E_z) =$$

dove $E_z = \{(x,y) : (x,y,z) \in T\}$

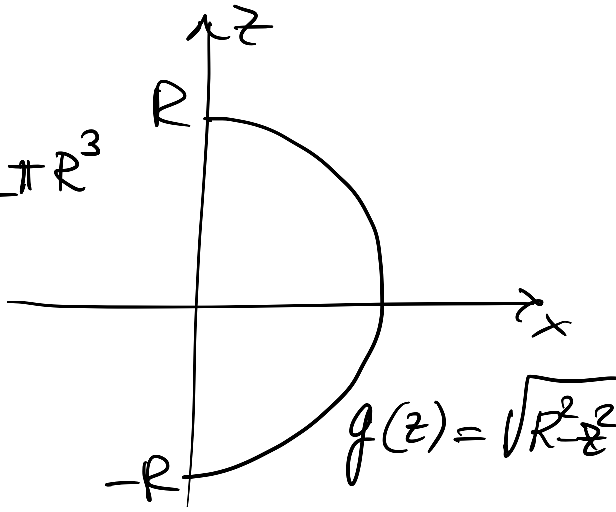
$= \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq g(z)^2\}$

cerchio di centro $(0,0)$ e raggio $g(z)$

$$= \int_a^b dz \ \pi \, g(z)^2 = \pi \int_a^b g(z)^2 \, dz$$

Esempio volume della sfera

$$\mathrm{vol}\, T = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - z^2)\, dz = \dots = \frac{4}{3}\pi R^3$$



$$\mathrm{vol}\, T = \pi \int_a^b g(z)^2\, dz = 2\pi \int_a^b \underbrace{\frac{g(z)^2}{2}}_{= \int_0^{g(z)} x\, dx} dz =$$

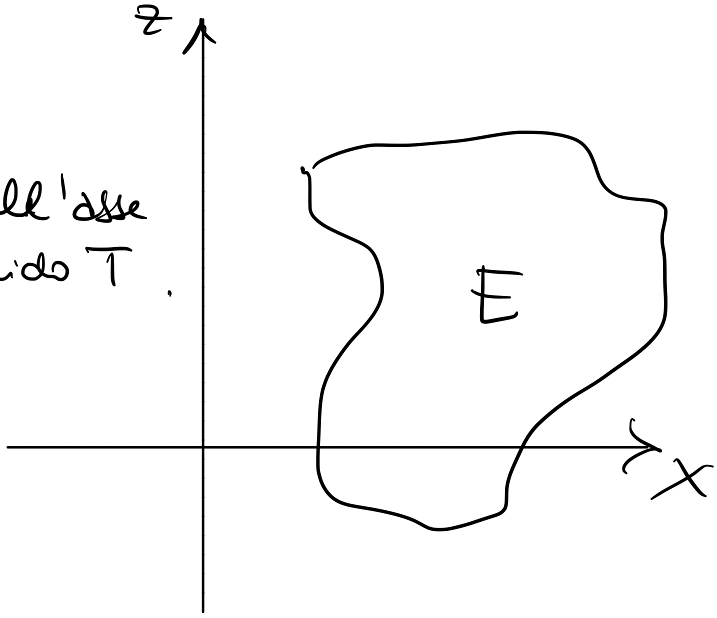
$$= 2\pi \int_a^b dz \int_0^{g(z)} x\, dx =$$

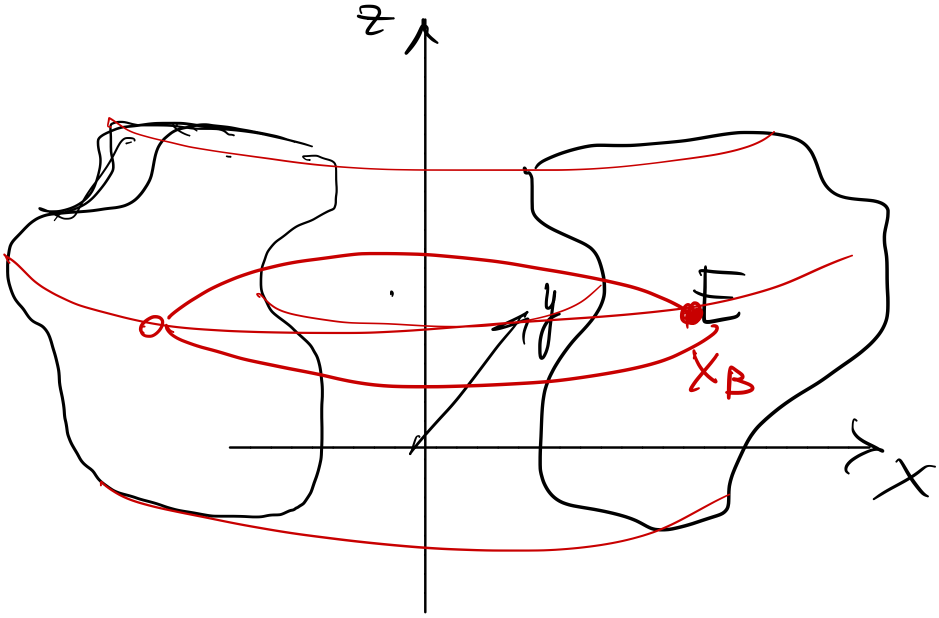
$$= 2\pi \iint_E x\, dx\, dz.$$

Questa formula si generalizza a E "più complicati"

Sia E un dominio (normale o unione finita di domini normali) del semipiano xz, $x \geq 0$.

Come prima, faccio ruotare E intorno all'asse z, e ottengo un solido T.

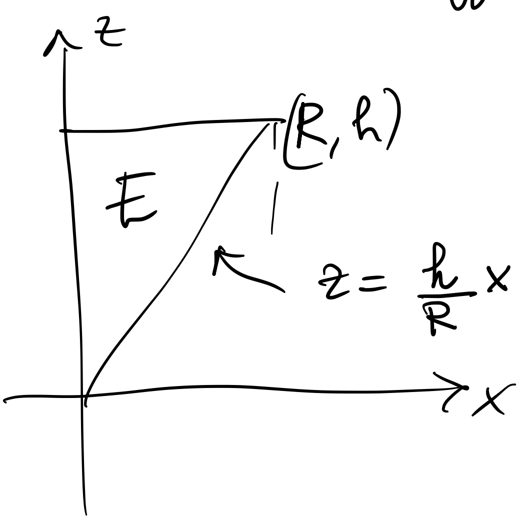


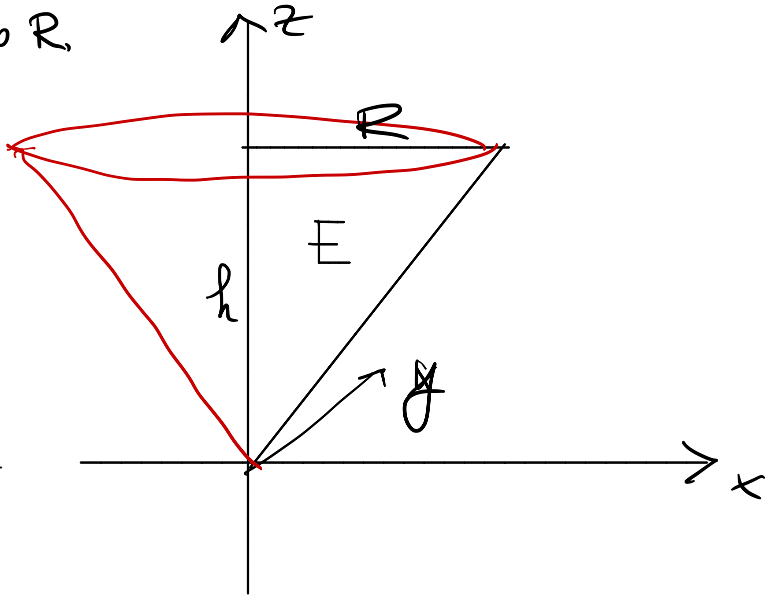


Teorema (Guldino)

$$\text{vol } T = 2\pi \iint_E x \, dx\, dz.$$

Applicazione: volume del cono circolare retto di altezza h e raggio R.





$$\text{Vol } T = 2\pi \iint_E x \, dx\, dz. \qquad \text{dove}$$

$$E = \left\{(x,z) : \quad 0 \le z \le h, \quad 0 \le x \le \frac{R}{h} z \right\}$$

$$\mathrm{Vol}\ T = 2\pi \iint_E x \, dx\, dz \qquad \text{dove}$$

$$E = \left\{ (x,z) : \quad 0 \le z \le h, \quad 0 \le x \le \frac{R}{h} z \right\}$$

$$\mathrm{vol}\, T = 2\pi \int_0^h dz \int_0^{R/h\, z} x \, dx = \pi \int_0^h \frac{R^2}{h^2} z^2 \, dz =$$

$$= \frac{\pi R^2}{h^2} \frac{h^3}{3} = \pi R^2 \cdot \frac{h}{3} = \text{area di base} \cdot \frac{h}{3}$$

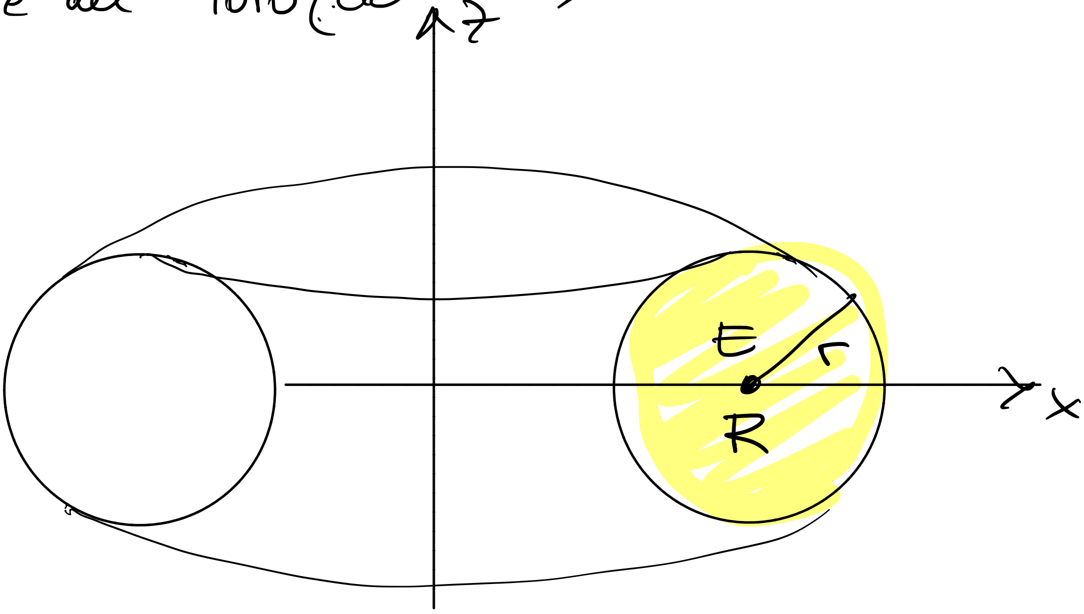
OSS

$$\mathrm{vol}\, T = 2\pi \iint_E x \, dx\, dz =$$

$$= 2\pi \ \text{area}\ E \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{\text{area}\ E} \iint_E x \, dx\, dz \right)}_{\text{ascissa del baricentro di } E} =$$

$$= \underbrace{(2\pi\, x_B)}_{\text{lungh. della circ.}^{za} \text{ percorsa dal baricentro di } E \text{ nella sua rotazione}} \text{area } E$$

Volume del toro (ciambella)



$$\text{vol } T = 2\pi \underbrace{\text{area } E}_{\pi r^2} \cdot \underset{\underset{R}{\shortparallel}}{x_B} = 2\pi^2 r^2 R$$

Cambiamenti di coordinate negli integrali

In dim 1.

$$\int_a^b f(g(t))\, g'(t)\, dt \underset{\substack{\uparrow \\ g(t)=x \\ g'(t)\,dt = dx}}{=} \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\, dx$$

$g \in C^1([a,b])$

f continua in $\mathrm{Im}(g)$

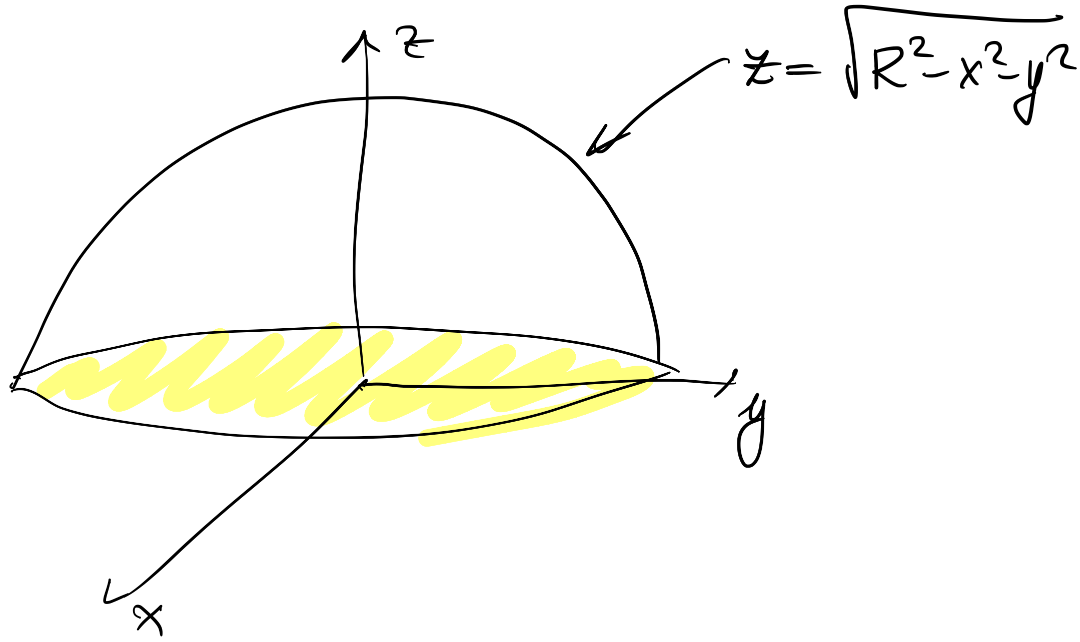
Come generalizzare a due variabili?

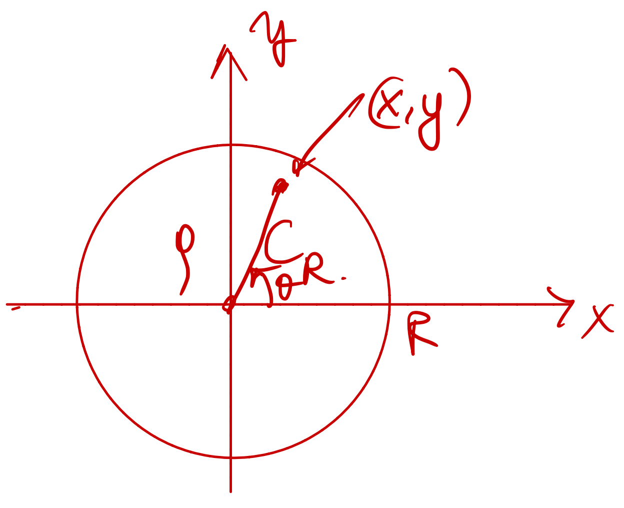
Esempio concreto:

Volume della palla $B_R = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le R^2\}$

$$\text{vol } B_R = 2 \iint_{C_R} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\, dx\, dy$$

$C_R = \{(x,y) : x^2+y^2 \le R^2\}$





Per integrare su C_R, mi piacerebbe passare a coordinate polari

$$x = \rho \cos\theta$$
$$y = \rho \,\text{sen}\,\theta.$$

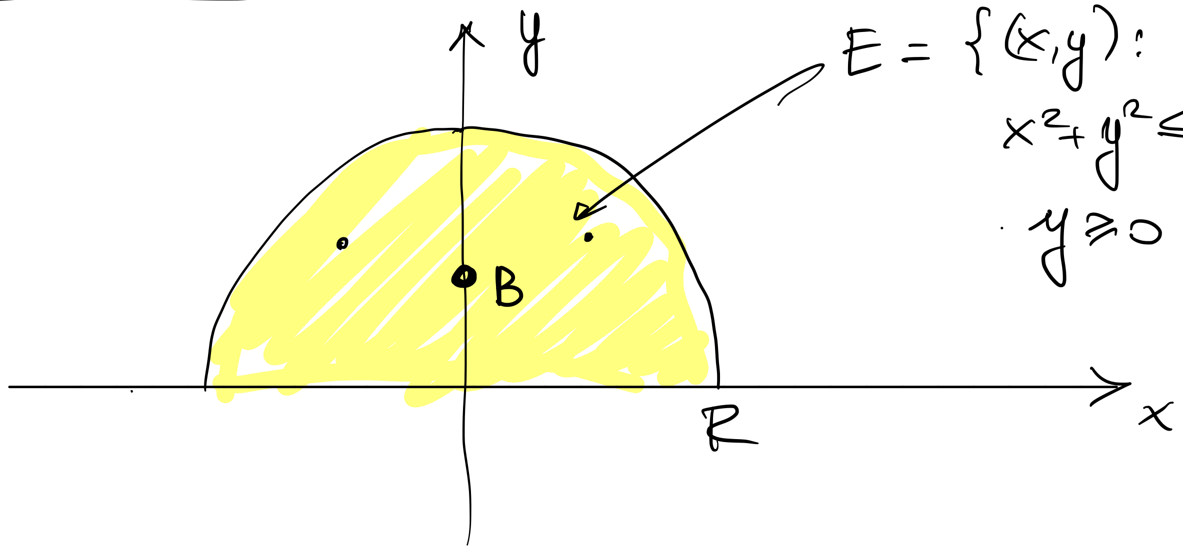
L'insieme C_R, con questa trasformazione, diventa

$$\tilde{C}_R = \{(\rho,\theta) : 0 \le \rho \le R, \quad 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

è un rettangolo!

Esempio 2

Baricentro di un semicerchio



$$E = \{(x,y): x^2+y^2 \leq R^2, \; y \geq 0\}$$

Il baricentro è il punto (x_B, y_B) t.c.

$$x_B = \frac{1}{\text{area } E} \iint_E x \, dx\,dy = 0$$

$$y_B = \frac{1}{\text{area } E} \iint_E y \, dx\,dy = ?$$

$$\mathrm{vol}\, B_R = 2 \iint_{C_R} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy \;=$$

$$C_R = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

$x = \rho \cos\theta$
$y = \rho \operatorname{sen}\theta$

$$= 2 \iint_{\tilde{C}_R} \sqrt{R^2 - \rho^2} \;\; \rho \;\; d\rho\, d\theta =$$

$$\tilde{C}_R = [0,R] \times [0, 2\pi]$$

rende conto della deformazione "di area" che ho introdotto con il cambio di area

$$= 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R d\rho \sqrt{R^2 - \rho^2}\; \rho \;=\; \frac{4\pi}{-2} \int_0^R d\rho \sqrt{R^2 - \rho^2}\,(-2\rho) =$$

$$= -2\pi \int_{R^2}^0 dv \sqrt{v} = 2\pi \cdot \frac{2}{3} v^{3/2} \Big|_0^{R^2} = \frac{4\pi}{3} R^3$$

$R^2 - \rho^2 = v$
$-2\rho\, d\rho = dv$