Domani mercoledì 6 giugno, e mercoledì 13 giugno:

- Lezione ore 9:00 → 10:00
- Esercitazione facoltativa ore 10:00 → 11:00

Aula II (qui!)

$\underline{F}(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y)) : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

campo vettoriale C^1.

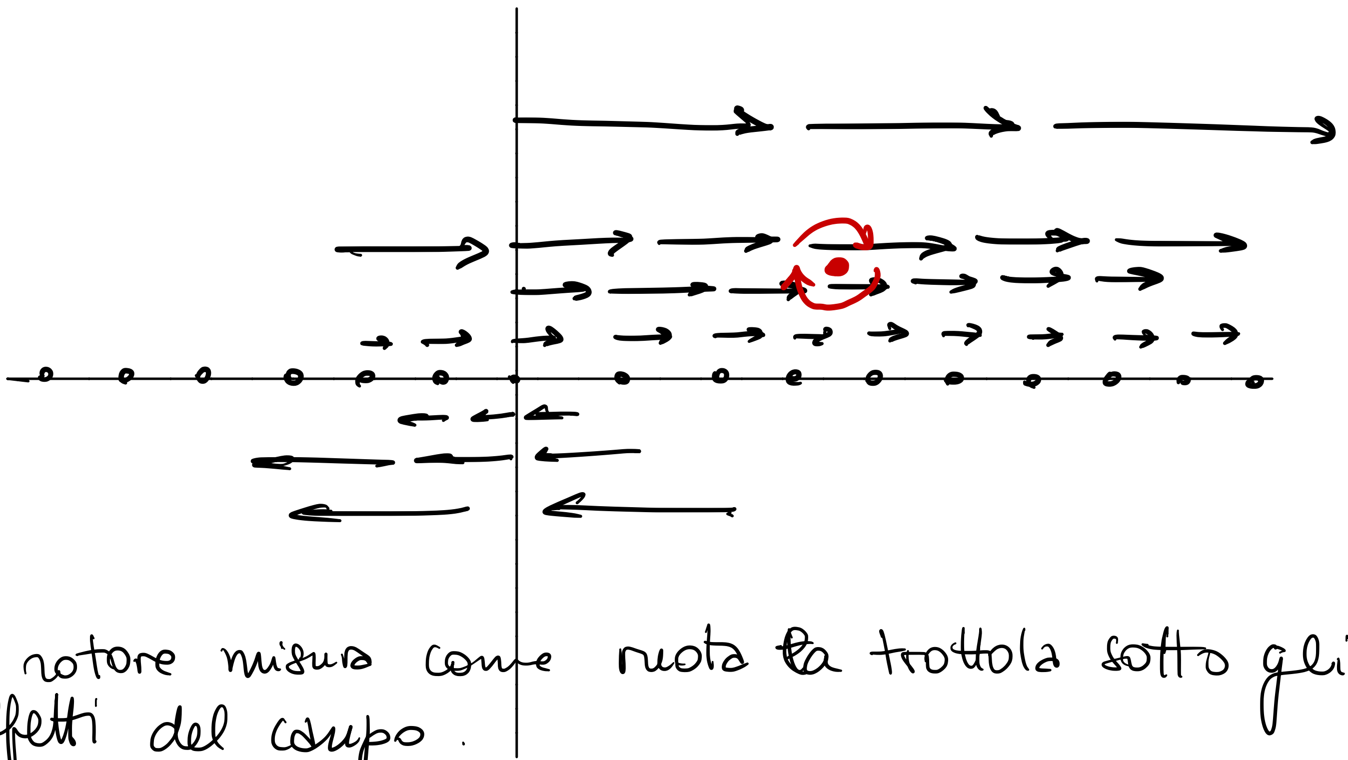
$$\operatorname{rot} \underline{F} = (F_2)_x - (F_1)_y : A \to \mathbb{R}$$

Il campo $\underline{F}$ è irrotazionale se $\operatorname{rot} F \equiv 0$ in A

Come si interpreta?

Immagino che $\underline{F}$ descriva le velocità di un fluido nel piano. Il rotore di $\underline{F}$ in un punto descrive come ruota una piccola trottola tenuta ferma in (x,y) sotto gli effetti del campo.

<u>Esempio</u> $A = \mathbb{R}^2$ $\quad \underline{F}(x,y) = (y, 0)$



Il rotore misura come ruota la trottola sotto gli effetti del campo.

$$\operatorname{rot} \underline{F} = -1 \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

In $\mathbb{R}^3$ è un po' diverso

$$\underline{F}(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z)) : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

versori degli assi

$$\operatorname{rot} \underline{F} = \nabla \wedge \underline{F} = \det \begin{bmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{bmatrix} =$$

prodotto vettoriale

$$= \left((F_3)_y - (F_2)_z , (F_1)_z - (F_3)_x , (F_2)_x - (F_1)_y \right).$$

Il campo è irrotazionale se $\operatorname{rot} \underline{F} \equiv 0$ in A,

cioè
$$\begin{cases} (F_3)_y \equiv (F_2)_z \\ (F_1)_z \equiv (F_3)_x \\ (F_2)_x \equiv (F_1)_y \end{cases}$$

In $\mathbb{R}^3$ il rotore descrive l'asse di rotazione di una pallina che ruota sotto l'effetto del campo.

La def. in $\mathbb{R}^2$ "segue" da quella di $\mathbb{R}^3$:

se $\underline{F}(x,y,z) = (F_1(x,y), F_2(x,y), 0)$

$$\operatorname{rot} \underline{F} = (0, 0, (F_2)_x - (F_1)_y)$$

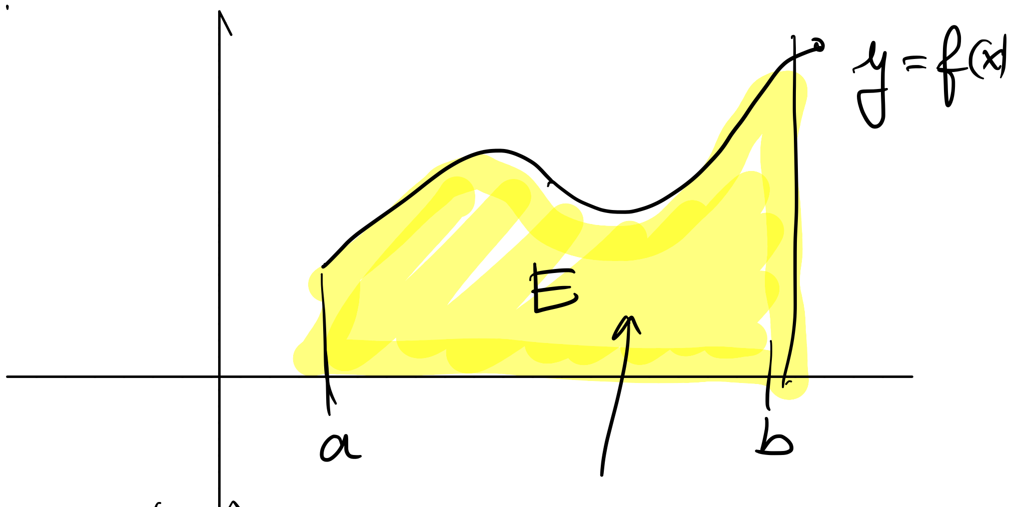
Integrali doppi:

In dim 1. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua

Per semplicità $f(x) \geq 0$.

Non scrivo la def^{ne} di integrale di Riemann, ma rappresento:

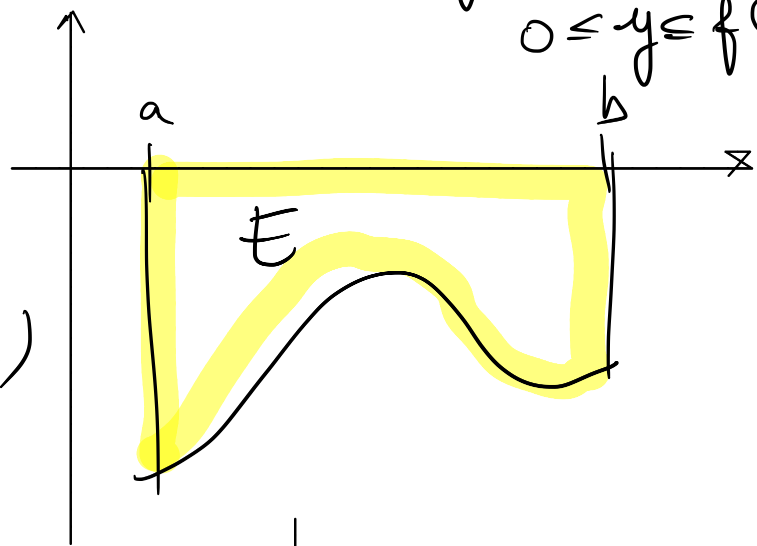
1) se $f \geq 0$



$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{area}(E).$$

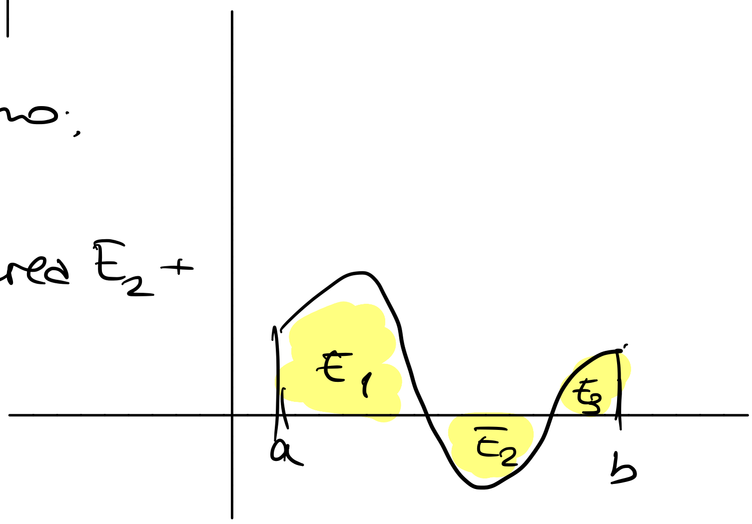
$$E = \{(x,y) : a \leq x \leq b, \; 0 \leq y \leq f(x)\}$$

2) se $f \leq 0$



$$\int_a^b f(x)\,dx = -\,\text{area}(E)$$

3) se f cambia segno:



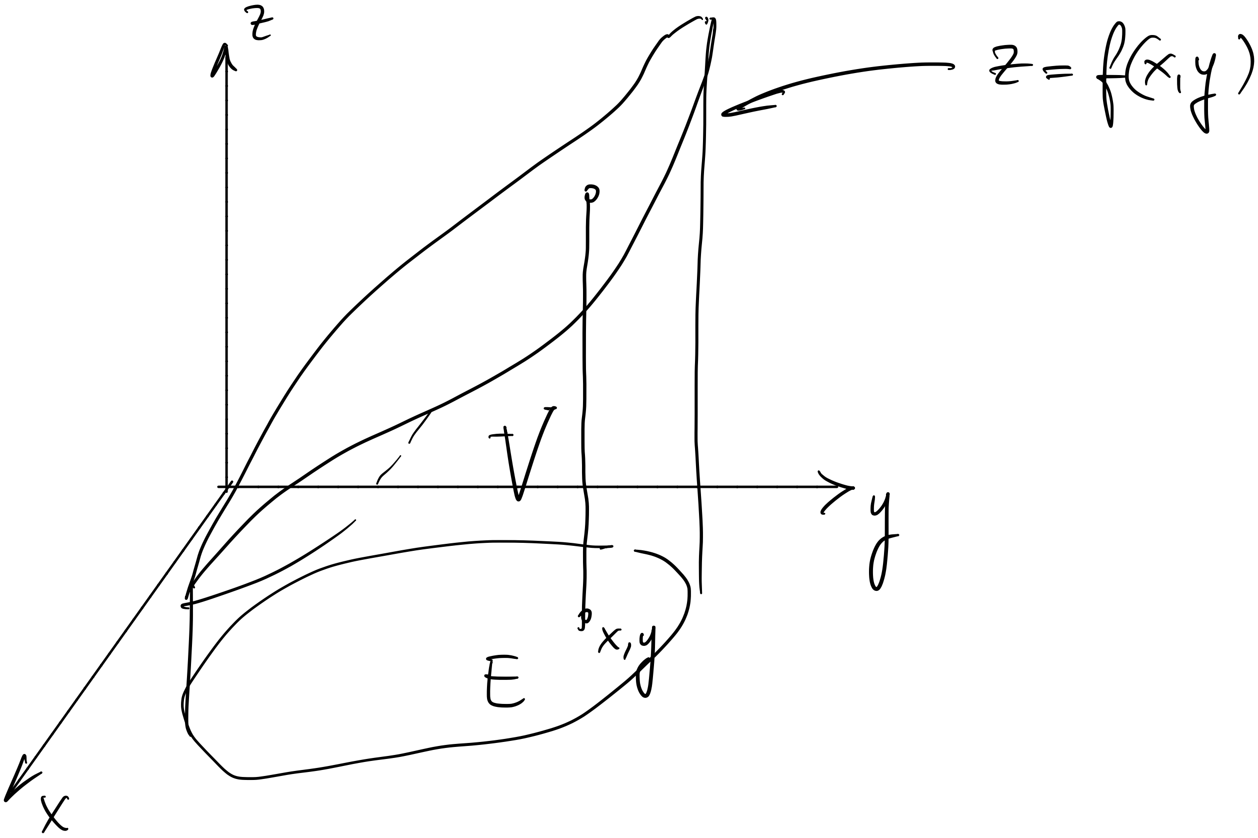
$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{area } E_1 - \text{area } E_2 + \text{are } E_3$$

Idea dell'integrale doppio:

$E \subset \mathbb{R}^2$ $f(x,y): E \to \mathbb{R}$ continua.

fatto come?

Per semplicità prendiamo $f(x,y) \geq 0$.



Voglio definire $\iint_E f(x,y)\,dx\,dy$ in modo

che misuri il volume dell'insieme tridimensionale

$$V = \{(x,y,z) : (x,y) \in E, \quad 0 \leq z \leq f(x,y)\}.$$

Un tale numero si può calcolare come descritto nella pagina successiva.

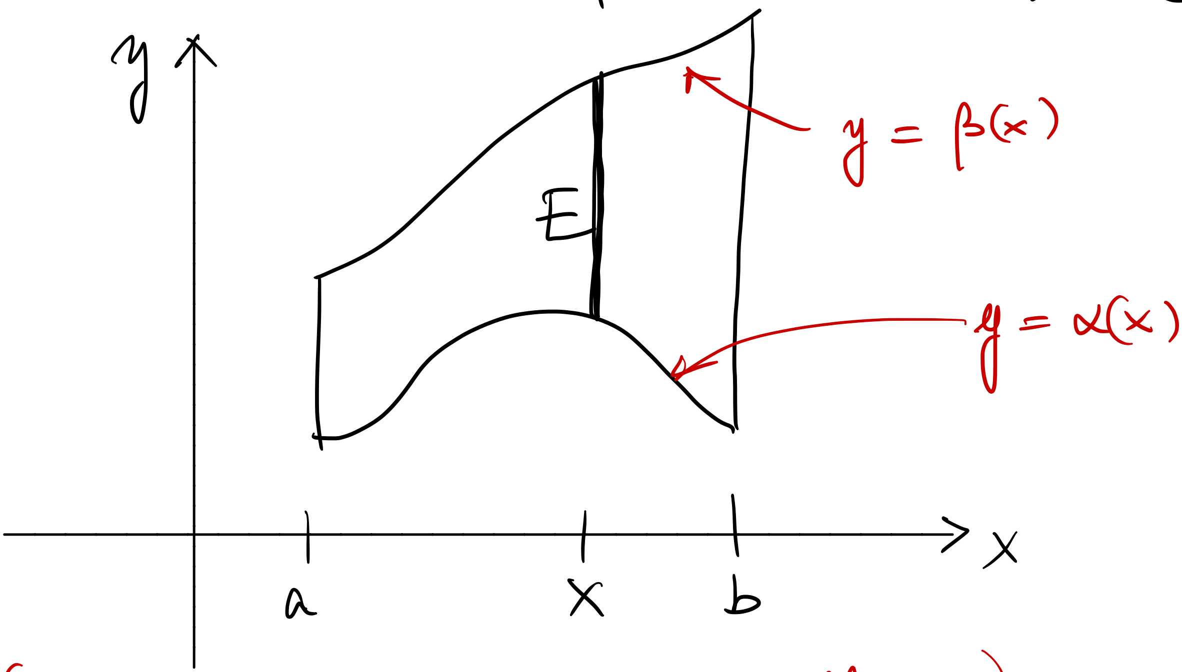
1° problema: come deve essere fatto $E \subset \mathbb{R}^2$

E deve essere un insieme della forma

$$E = \{(x,y): \quad a \le x \le b, \ \alpha(x) \le y \le \beta(x)\}$$

dove $\alpha, \beta : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue e

t.c. $\alpha(x) \le \beta(x) \quad \forall x \in [a,b]$.



(dominio normale rispetto alla x)

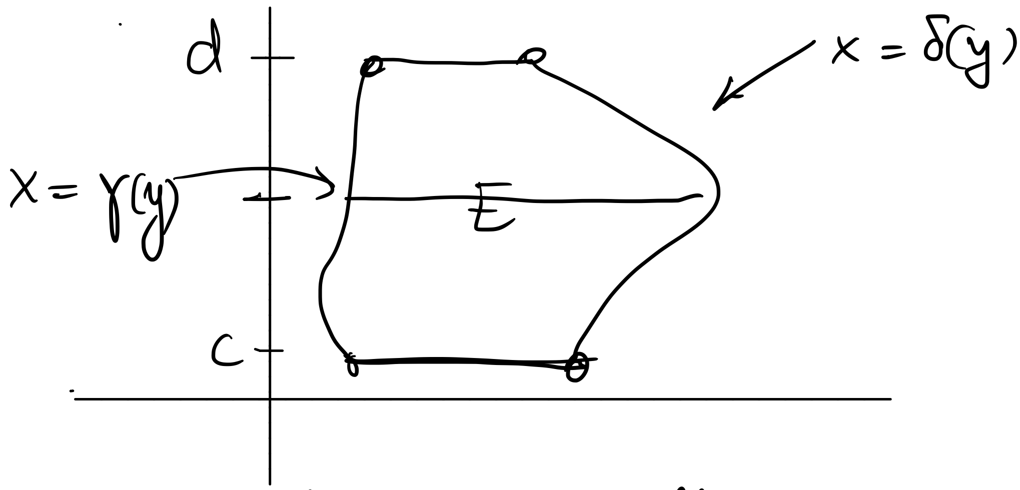
ovviamente area $E = \displaystyle\int_a^b (\beta(x) - \alpha(x))\,dx$

Oppure

$$E = \{(x,y): \quad c \le y \le d,\ \gamma(y) \le x \le \delta(y)\}$$

con $\gamma(y), \delta(y) : [c,d] \to \mathbb{R}$ continue e t.c.

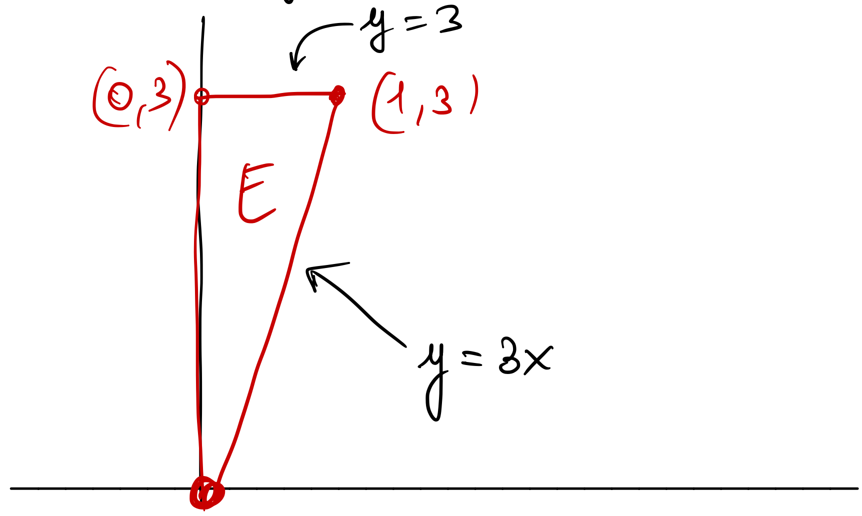
$$\gamma(y) \le \delta(y) \qquad \forall y \in [c,d].$$



dominio normale rispetto alla y.

$$\text{Area } E = \int_c^d (\delta(y) - \gamma(y))\, dy$$

Esempio: triangolo pieno di vertici $(0,0)$, $(1,3)$, $(0,3)$



E è un insieme x-normale.

$$\text{Area } E = \int_0^1 (3-3x)\,dx = 3 - \tfrac{3}{2} = \tfrac{3}{2}$$

$$E = \{(x,y): \quad 0 \le x \le 1,\ 3x \le y \le 3\}$$

ma è anche y-normale

$$E = \{(x,y): \quad 0 \le y \le 3, \quad 0 \le x \le y/3\}$$

$$\text{Area } E = \int_0^3 \frac{y}{3}\,dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 9 = \frac{3}{2}$$

$$\cancel{E = \{(x,y): \quad 0 \le y \le 3, \quad 0 \le x \le 1\}}$$

Sia E un dominio x-normale come sopra

$$E = \{(x,y): \quad a \le x \le b, \ \alpha(x) \le y \le \beta(x)\}$$

Sia $f(x,y): E \longrightarrow \mathbb{R}$ continua: definiamo

$$\iint_E f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

Se E è un dominio y-normale

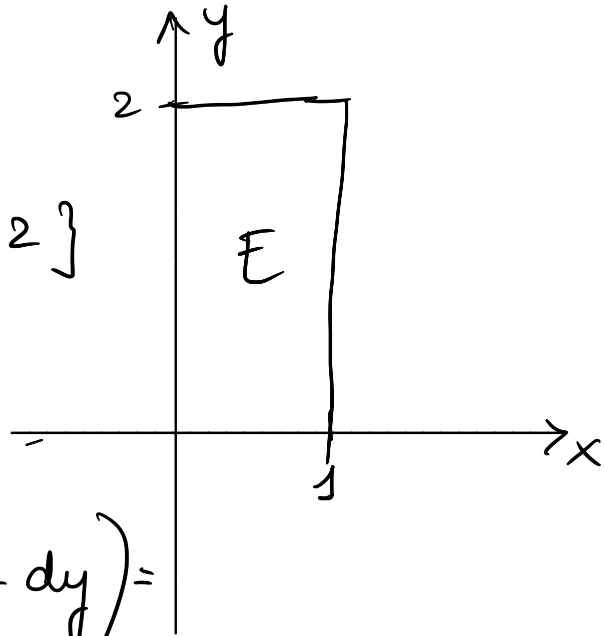
$$E = \{(x,y): \ c \le y \le d \ , \ \gamma(y) \le x \le \delta(y)\}$$

Allora

$$\iint_E f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

Ovviamente (è un teorema!) se E è sia x-normale che y-normale, i due risultati coincidono.

Calcolare $\displaystyle\iint_E \underbrace{\frac{x}{1+y}}_{f(x,y)}\,dx\,dy$ dove $E=[0,1]\times[0,2]$



$E=\{(x,y):\ 0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le 2\}$

$$\iint_E \frac{x}{1+y}\,dx\,dy = \int_0^1 dx\left(\int_0^2 \frac{x}{1+y}\,dy\right) =$$

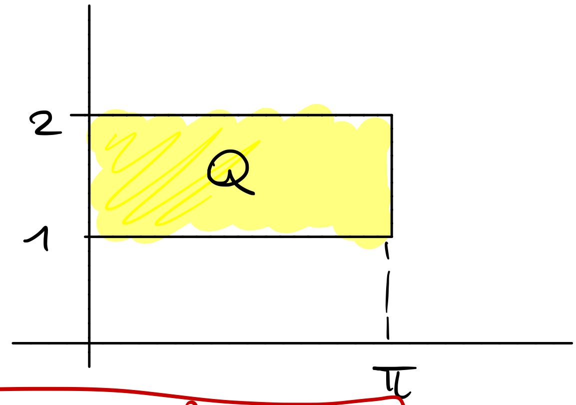
$$= \int_0^1 dx\ \ x\left(\int_0^2 \frac{dy}{1+y}\right) = \int_0^1 dx\ x\ \ \ln(1+y)\Big|_{y=0}^{y=2}$$

$$= \underbrace{\int_0^1 dx\ x}_{=\,1/2}\ \left(\ln 3 - \cancel{\ln 1}\right) = \frac{\ln 3}{2}$$

Allo stesso risultato si perviene se si considera come dominio y-normale

$$\iint_E \frac{x}{1+y}\,dx\,dy = \int_0^2 dy\left(\int_0^1 dx\ \frac{x}{1+y}\right) = \dots = \frac{\ln 3}{2}$$

$$\iint_Q xy\cos(xy^2)\,dx\,dy,\quad Q=[0,\pi]\times[1,2].$$



$$\|$$

$$\int_0^\pi dx\left(\int_1^2 dy\,\frac{2xy}{2}\cos(xy^2)\right)=$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\text{sost}\quad xy^2=t\\&2xy\,dy=dt\end{aligned}}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\pi dx\left(\int_x^{4x} dt\,\cos t\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\pi dx\quad \operatorname{sen} t\Big|_{t=x}^{t=4x}=\frac{1}{2}\int_0^\pi dx\left(\operatorname{sen}(4x)-\operatorname{sen}x\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cancel{-\frac{1}{4}\cos(4x)}+\cos x\right)\Big|_0^\pi=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\underbrace{\cos(4\pi)}_{=1}+\frac{1}{4}\underbrace{\cos 0}_{=1}+\cos\pi-\cos 0\right)=-1$$

Cambiando l'ordine di integrazione

$$\int_1^2 dy \left(\int_0^{\pi} dx \quad x y \cos(xy^2) \right) = (*)$$

$$\int x \cos(xy^2) dx = \frac{x}{y^2} \operatorname{sen}(xy^2) - \int \frac{\operatorname{sen}(xy^2)}{y^2} dx =$$

per parti

$f(x) = x \qquad f'(x) = 1$

$g'(x) = \cos(xy^2) \implies g(x) = \frac{1}{y^2} \operatorname{sen}(xy^2)$

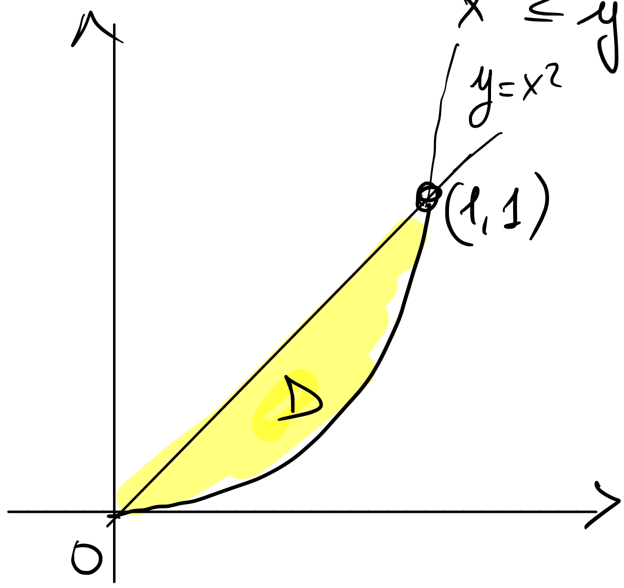
$$= \frac{x}{y^2} \operatorname{sen}(xy^2) + \frac{1}{y^4} \cos(xy^2)$$

$$(*) = \int_1^2 dy \; y \left(\frac{x}{y^2} \operatorname{sen}(xy^2) + \frac{1}{y^4} \cos(xy^2) \right) \Bigg|_{x=0}^{x=\pi} =$$

$$= \int_1^2 dy \; y \left(\frac{\pi}{y^2} \operatorname{sen}(\pi y^2) + \frac{1}{y^4} \left(\cos(\pi y^2) - 1 \right) \right)$$

(corretto ma difficile)

$$\iint_D (2x+3y)\,dx\,dy = \Big[\text{dove } D = \{(x,y):\ 0\le x\le 1,\ x^2\le y\le x\}$$



$$= \int_0^1 dx \left(\int_{x^2}^{x} dy\ (2x+3y) \right) =$$

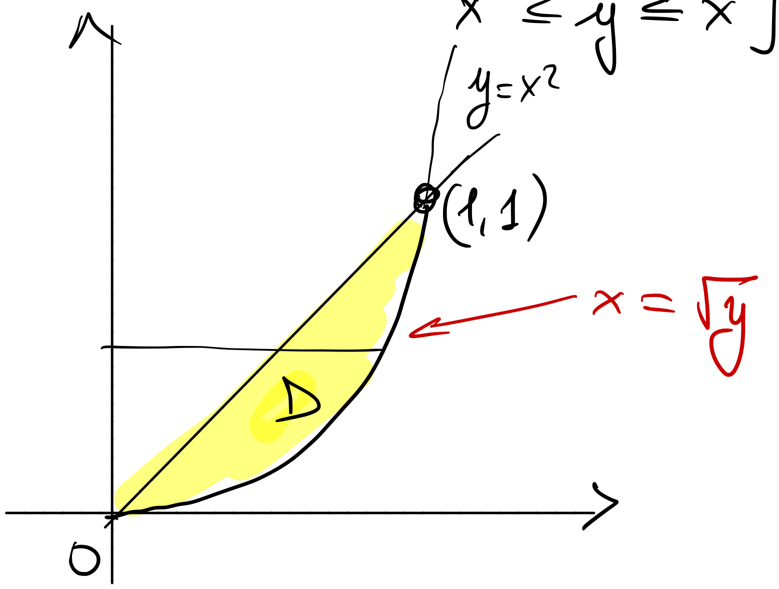
$$= \int_0^1 dx \left(2x(x-x^2) + \left(\frac{3y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=x^2}^{y=x} \right) =$$

$$= \int_0^1 dx \left(2x^2 - 2x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x^4 \right) =$$

$$= \int_0^1 dx \left(-\frac{3}{2}x^4 - 2x^3 + \frac{7}{2}x^2 \right) =$$

$$= -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{5} - \frac{\cancel{2}1}{\cancel{4}2} + \frac{7}{6} = \frac{-9-15+35}{30} = \frac{11}{30}$$

$$\iint_D (2x+3y)\, dx\,dy = (*) \quad \text{dove} \quad D = \{(x,y):\ 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le x\}$$



ordine inverso:

$$D = \{ (x,y):\ 0 \le y \le 1 ,\quad y \le x \le \sqrt{y} \}$$

$$(*) = \int_0^1 dy \left(\int_y^{\sqrt{y}} dx\, (2x+3y) \right) =$$

$$= \int_0^1 dy \left(x^2 \Big|_{x=y}^{x=\sqrt{y}} + 3y\,(\sqrt{y} - y) \right) =$$

$$= \int_0^1 dy \, (y \underbrace{- y^2}_{} + 3\, y^{3/2} \underbrace{- 3y^2}_{}) =$$

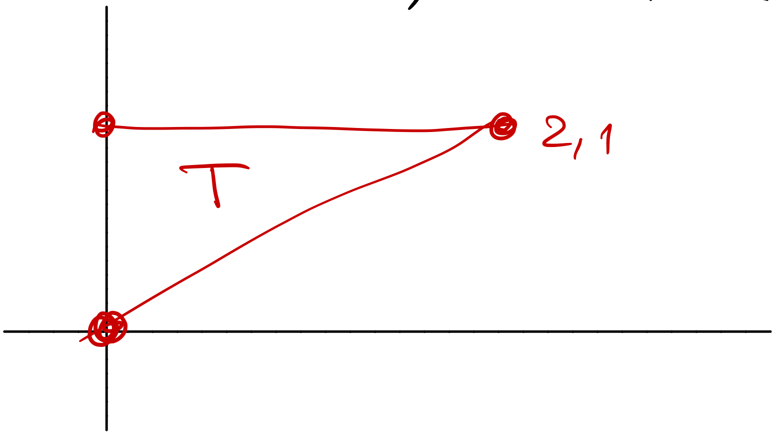
$$-4y^2$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{4}{3} + 3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{2} - \frac{4}{3} + \frac{6}{5} = \frac{15 - 40 + 36}{30} =$$

$$= \frac{11}{30}$$

ESERCIZIO Calcolare

$$\iint_T e^{y^2}\,dx\,dy$$ dove T è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(0,1)$, $(2,1)$



Farlo nei due ordini possibili; uno dei due è molto più facile.