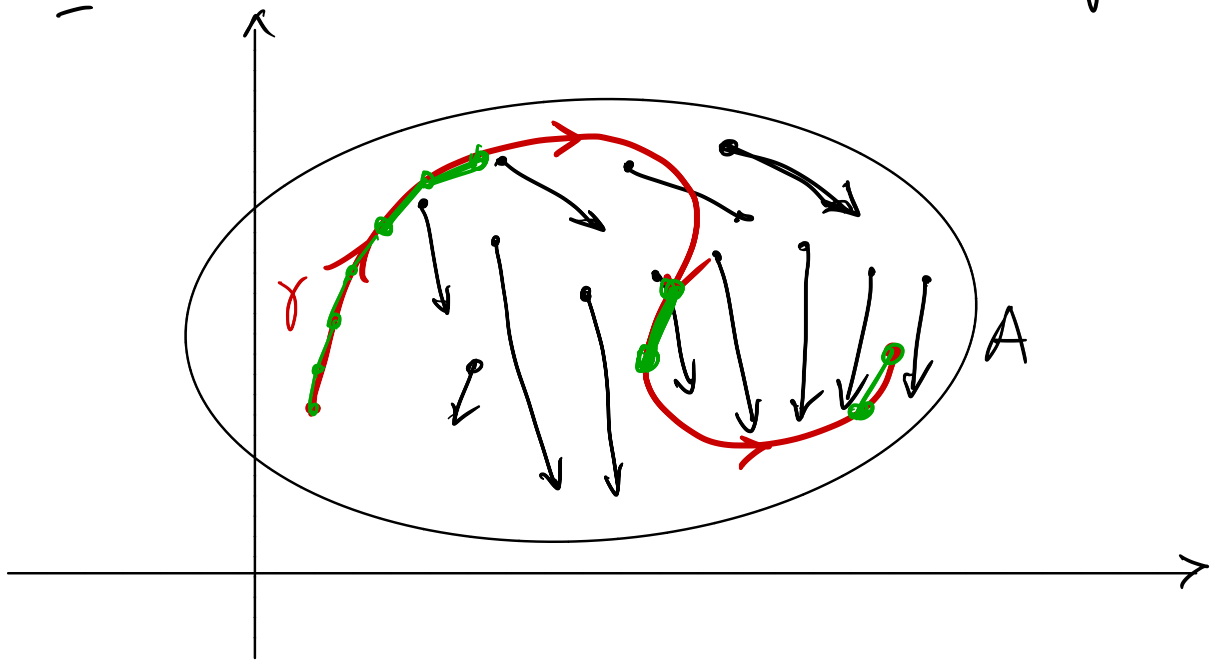
Lavoro di un campo vettoriale lungo una curva.

$A \subset \mathbb{R}^2$ aperto.

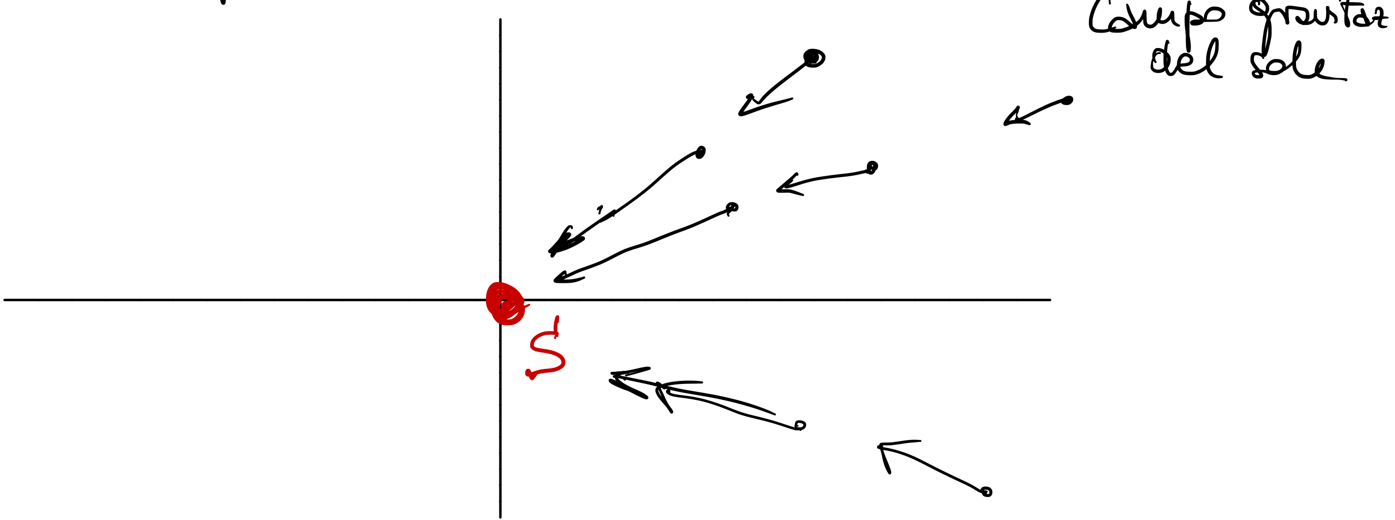
$$\underline{F} : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longmapsto \underline{F}(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$$

$\underline{F}$ continuo in A, cioè F_1, F_2 continue in A.

Sia $\underline{\gamma} : [a,b] \longrightarrow A \subset \mathbb{R}^2$ una curva regolare C^1.



Es. $\underline{F}$ rappresenta la velocità di un fluido, oppure un campo di forze.



Idea: approssimo la curva con tanti segmenti e calcolo il lavoro.

$$L = \sum_{k=0}^{n} \underline{F}(\gamma(t_k)) \cdot \overbrace{\Delta \underline{\gamma}(t_k)}^{\sim \underline{T}(t_k) ds}$$

versore tangente

Quando mando n a $+\infty$, ottengo.

OSS

$$L = \int_\gamma \overbrace{\underline{F}(x,y) \cdot \underline{T}}\, ds =$$

$$\underline{T} = \frac{\underline{\gamma}'(t)}{|\underline{\gamma}'(t)|} = \frac{(x'(t), y'(t))}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}$$

$$ds = |\gamma'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$$

$$= \int_a^b \underline{F}(\underline{\gamma}(t)) \cdot \frac{\underline{\gamma}'(t)}{\cancel{|\underline{\gamma}'(t)|}} \cancel{|\underline{\gamma}'(t)|} dt =$$

$$= \int_a^b \underline{F}(\underline{\gamma}(t)) \cdot \underline{\gamma}'(t)\, dt =$$

$$= \int_a^b [F_1(x(t), y(t))\, x'(t) + F_2(x(t), y(t))\, y'(t)]\, dt$$

Esempio:

Calcolare il lavoro del campo vettoriale

$\underline{F}(x,y) = (\sqrt{y}, x^3 + y)$ lungo la curva

$\underline{\gamma}(t) = (t, t) \qquad t \in [0,1]$.

$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t \end{cases} \qquad \begin{cases} x'(t) = 1 \\ y'(t) = 1 \end{cases}$

$$L = \int_\gamma \underline{F} \cdot \underline{T} \, ds = \int_0^1 \left(\sqrt{t} \cdot 1 + (t^3 + t) \cdot 1\right) dt =$$

$$= \int_0^1 \left(\sqrt{t} + t^3 + t\right) dt = \left(\frac{2}{3} t^{3/2} + \frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{8+3+6}{12} = \frac{17}{12}.$$

Adesso stesso campo vettoriale, ma considero la curva $\varphi(t) = (t^2, t^3) \qquad t \in [0,1]$.

$\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t^3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x'(t) = 2t \\ y'(t) = 3t^2 \end{cases} \qquad x = y^{2/3}$

$$L = \int_\varphi \underline{F} \cdot \underline{T} \, ds = \int_0^1 \left(t^{3/2} \, 2t + (t^6 + t^3) \, 3t^2\right) dt$$

$$L = \int_{\varphi} \underline{F} \cdot \underline{T} \, ds = \int_0^1 \left(t^{3/2} \, 2t + (t^6 + t^3) \, 3t^2 \right) dt =$$

$$= \int_0^1 \left(2t^{5/2} + 3t^8 + 3t^5 \right) dt =$$

$$= \left(2 \cdot \frac{2}{7} t^{7/2} + \frac{3}{9} t^9 + \frac{3}{6} t^6 \right) \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{4}{7} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{24+14+21}{42} = \frac{59}{42}.$$

<u>OSS</u> Il lavoro dello stesso campo lungo due curve che hanno gli stessi estremi e cammini diversi è in generale diverso.

In generale, quindi, il lavoro di un campo lungo una curva non dipende solo dagli estremi della curva ma anche dal percorso effettivamente fatto.

Tuttavia esistono dei campi vettoriali (esempi: campo gravitazionale, campo elettrico) in cui il lavoro dipende solo dal pto di partenza e dal pto di arrivo ma non dal percorso effettivamente svolto.

DEFINIZIONE Un campo vettoriale $\underline{F}: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ si dice <u>conservativo</u> se ammette un potenziale, cioè se esiste una funzione scalare

$V(x,y): A \to \mathbb{R}$ di classe $C^1(A)$ t.c.

$$\underline{F}(x,y) = \nabla V(x,y) \quad \forall (x,y) \in A$$

cioè
$$\begin{cases} F_1(x,y) = V_x(x,y) = \dfrac{\partial V}{\partial x}(x,y), \\ F_2(x,y) = V_y(x,y) \end{cases} \quad \forall (x,y) \in A$$

V si dice potenziale.

Quindi:

$\underline{F}$ conservativo se $\underline{F}$ è il gradiente di una funzione scalare.

<u>Esempi</u>: $\underline{F}(x,y) = (2xy, x^2)$ è conservativo?

devo esibire $V(x,y): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ t.c.

$$V_x(x,y) = 2xy \quad ; \quad V_y(x,y) = x^2$$

A occhio si vede che possiamo prendere

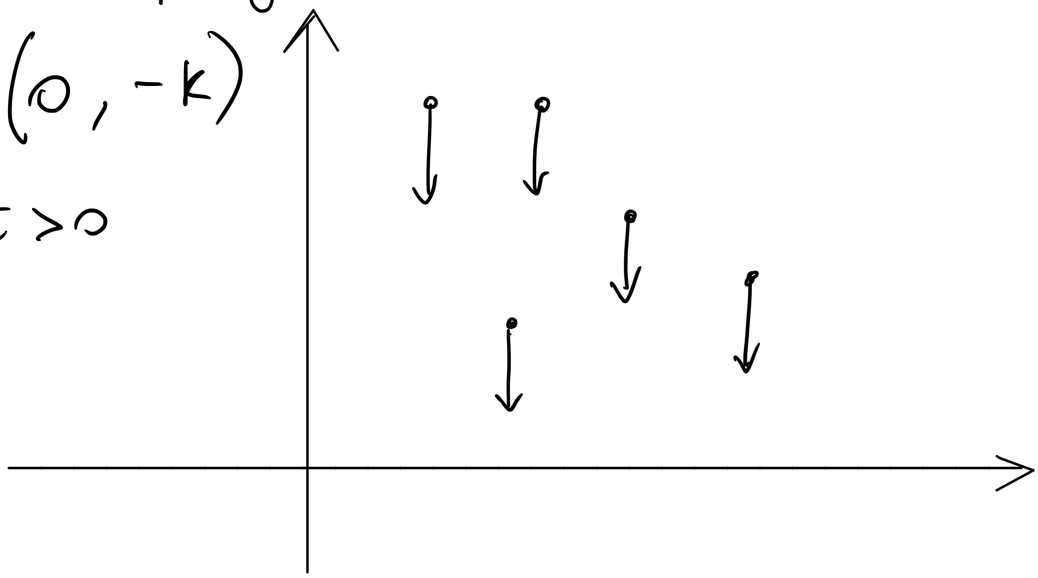
$$V(x,y) = x^2 y + C$$

<u>OSS</u> Il potenziale è definito a meno di una costante additiva.

<u>Esempio:</u> Campo gravitazionale al suolo.

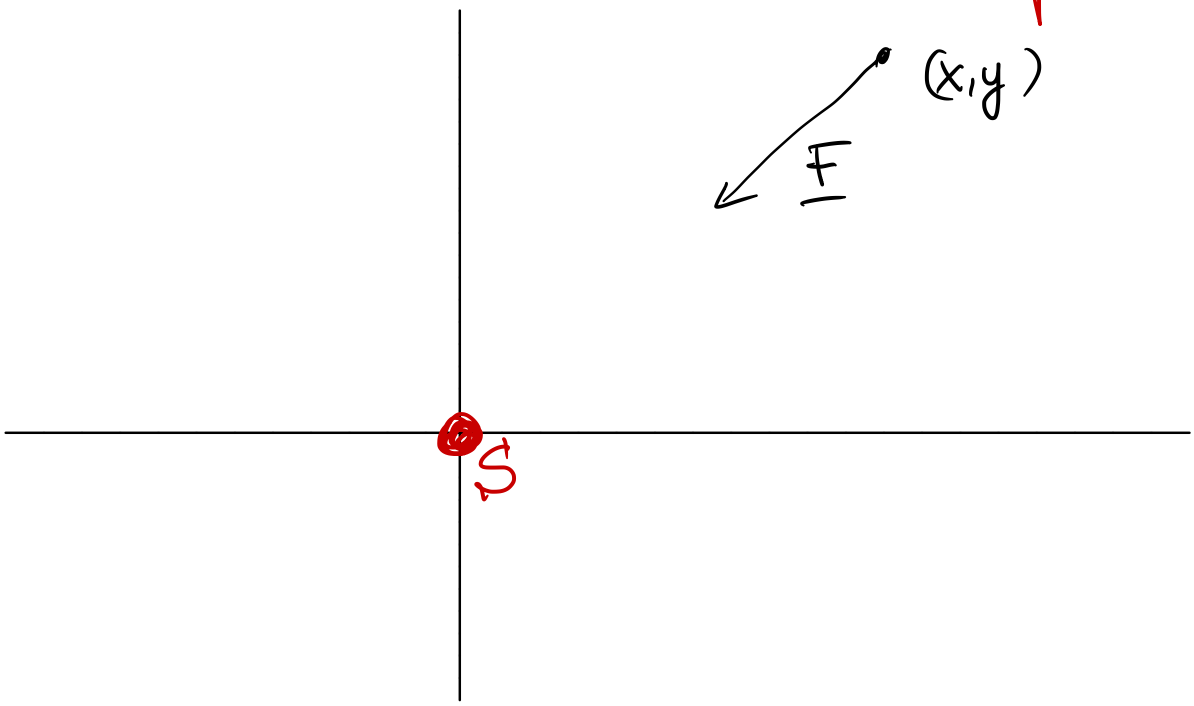
$$\underline{F}(x,y) = (0, -k)$$

k costante > 0



$$V(x,y) = -ky \quad (+c)$$

Esempio: Campo gravitazionale ~~nello spazio~~ nel piano.



$$|\underline{F}| = \frac{K}{r^2} = \frac{K}{(x^2+y^2)}$$

Il versore di $\underline{F}$ $= -\dfrac{(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

$$\underline{F}(x,y) = \left(\frac{-kx}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \frac{-ky}{(x^2+y^2)^{3/2}} \right)$$

E' conservativo con potenziale

$$V(x,y) = \frac{K}{\sqrt{x^2+y^2}} + c = \frac{K}{r} + c$$

$$V_x(x,y) = -\frac{K}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2}x}{(x^2+y^2)^{3/2}} = F_1(x,y)$$

A cosa serve un potenziale per un campo conservativo?

Sia $\underline{F}(x,y)$ un campo conservativo in $A \subset \mathbb{R}^2$ con potenziale $V(x,y)$

Sia $\underline{\gamma}:[a,b] \longrightarrow A$ una curva C^1.

$$L = \int_\gamma \underline{F} \cdot \underline{T}\, ds =$$

F è conservativo

$$= \int_a^b \left[F_1(x(t),y(t))\,x'(t) + F_2(x(t),y(t))\,y'(t)\right] dt =$$

$$= \int_a^b \left[V_x(x(t),y(t))\,x'(t) + V_y(x(t),y(t))\,y'(t)\right] dt$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt}\underbrace{\left[V(x(t),y(t))\right]}_{g(t)} dt = \int_a^b g'(t)\,dt =$$

$$= g(b) - g(a) = V(x(b),y(b)) - V(x(a),y(a)) =$$

$$= V(P_2) - V(P_1)$$

se $P_2 = (x(b),y(b))$ è il punto di arrivo della curva

$P_1 = (x(a),y(a))$ " " " partenza " "

TEOREMA (appena dimostrato): il lavoro compiuto da un campo vettoriale conservativo lungo una curva regolare γ è dato dalla differenza tra il potenziale calcolato nel punto di arrivo di γ e il potenziale calcolato nel punto di partenza di γ.

$$\int_{\gamma} \underline{F} \cdot \underline{T} \, ds = V(P_2) - V(P_1)$$

e quindi, in particolare, non dipende dal percorso effettivamente seguito.

OSS Il campo vettoriale del primo esempio
$\underline{F}(x,y) = (\sqrt{y}, x^3+y)$ non è conservativo,
perché ho trovato due curve che hanno gli stessi estremi ma lavoro diverso.

Come si capisce se un campo è conservativo o no?

Supponiamo che $\underline{F}(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y)) : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

sia di classe $C^1(A)$, cioè

$F_1(x,y)$, $F_2(x,y)$ di classe $C^1(A)$

e supponiamo che $\underline{F}$ sia conservativo di potenziale $V(x,y)$ $\Rightarrow$ $V(x,y) : A \to \mathbb{R}$ di classe $C^2(A)$

t.c. $\begin{cases} V_x(x,y) = F_1(x,y) \\ V_y(x,y) = F_2(x,y) \end{cases}$

$$\begin{aligned} (F_1)_y &= V_{xy} \\ & \quad \ \| \\ (F_2)_x &= V_{yx} \end{aligned}$$

Teor. di Schwarz.

Abbiamo dim. che:

<u>TEOREMA</u> Condizione Necessaria (C.N.)

affinché un campo vettoriale $\underline{F}$ di classe $C^1(A)$ sia conservativo è che

$$\underbrace{(F_1)_y(x,y) = (F_2)_x(x,y) \quad \forall (x,y) \in A}_{\text{Irrotazionalità di } \underline{F}.}$$

Un campo vettoriale $F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$

si dice irrotazionale in A se

$$(F_1)_y \equiv (F_2)_x$$

Il teorema dice:

F conservativo $\Longrightarrow$ F irrotazionale

e quindi

F non irrotazionale $\Longrightarrow$ F non conservativo

Per esempio:

Esempio

$$\underline{F}(x,y) = (2xy, 5x^2)$$

$$(F_1)_y(x,y) = (2xy)_y = 2x$$

$$\neq$$

$$(F_2)_x(x,y) = (5x^2)_x = 10x$$

il campo non è irrotazionale $\Rightarrow$ non è conservativo.

Domanda: La C.N. del teorema è anche C.S.?

In altre parole:

$\underline{F}$ irrotazionale $\overset{?}{\Longrightarrow}$ $\underline{F}$ conservativo

1) in generale <u>no</u>!

2) con qualche ipotesi in più, sì!

<u>OSS</u>. Se abbiamo un campo vettoriale conservativo, e prendo una curva $\underline{\gamma}$ chiusa, cioè una curva con punto iniziale e punto finale coincidenti, allora

$$L = \int_\gamma \underline{F} \cdot \underline{T}\, ds = 0.$$

In realtà <u>si può dimostrare</u> che un campo vettoriale che abbia lavoro nullo lungo <u>tutte</u> le curve chiuse è conservativo.

<u>OSS</u> $\underline{F}$ irrotazionale $\not\Rightarrow$ $\underline{F}$ conservativo.

$$\underline{F}(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right) = \frac{(-y, x)}{x^2+y^2}$$

definito in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

1) F irrotazionale.

$$(F_1)_y = \left(-\frac{y}{x^2+y^2} \right)_y = - \frac{x^2+y^2 - y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

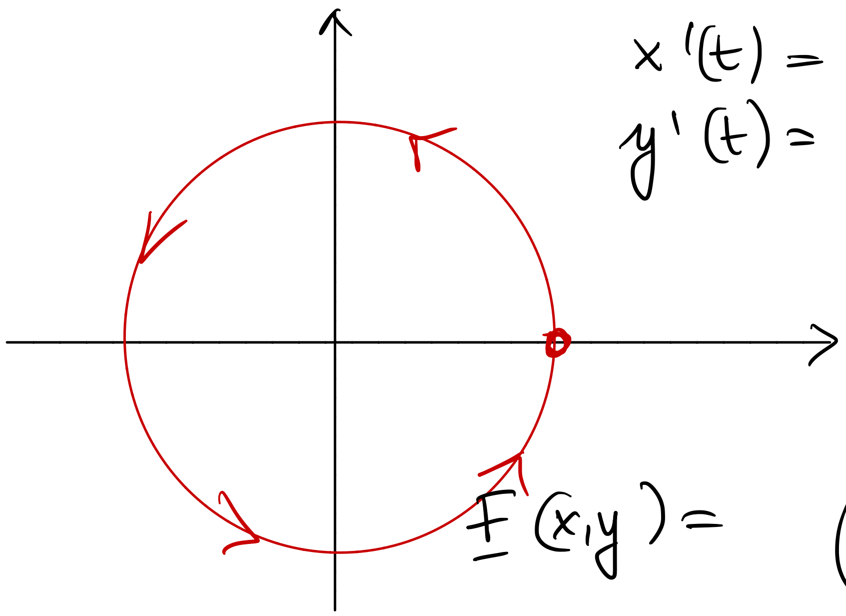
$$(F_2)_x = \left(\frac{x}{x^2+y^2} \right)_x = \dots = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Il campo è irrotazionale.

Ma " non è conservativo.

Infatti se prendo la curva chiusa

$$\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t) \qquad t \in [0, 2\pi].$$



$$x'(t) = -\operatorname{sen} t$$
$$y'(t) = \cos t$$

$$\underline{F}(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

$$\int_\gamma \underline{F} \cdot \underline{T}\, ds = \int_0^{2\pi} [(-\operatorname{sen} t)(-\operatorname{sen} t) + \cos t \cos t]\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi \neq 0$$

Il campo non è conservativo.

$$\begin{cases} V_x(x,y) = 3x^2y + xy^2 + 2 \\ V_y(x,y) = x^3 + x^2y - 1 \end{cases}$$

Immaginando di "congelare" la y, si integra la 1ª rispetto alla x

$$\boxed{V(x,y) = \int (3x^2y + xy^2 + 2)\,dx = x^3y + \frac{x^2y^2}{2} + 2x + g(y)}$$

$$V_y(x,y) = \cancel{x^3} + \cancel{x^2y} - 1$$

$$\|$$

$$\cancel{x^3} + \cancel{x^2y} + g'(y) \Rightarrow g'(y) = -1$$

$$\Rightarrow g(y) = -y + c$$

$$\Rightarrow V(x,y) = x^3y + \frac{x^2y^2}{2} + 2x - y + c.$$

__Esercizio:__

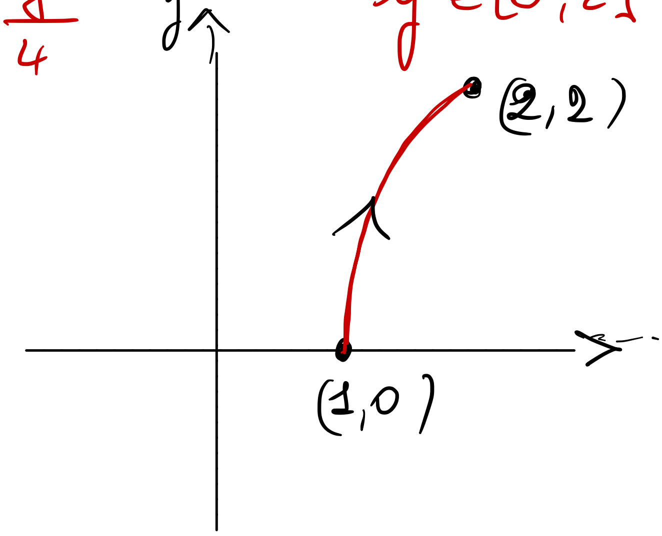
Calcolare il lavoro di

$\underline{F}(x,y) = (xy^2, x^2y)$ lungo la curva

$\gamma \quad \begin{cases} x(t) = 1+t^2 \\ y(t) = 2t \end{cases} \qquad t \in [0,1].$

$\Downarrow$

$x = 1 + \dfrac{y^2}{4} \qquad y \in [0,2]$



1° modo: calcolo diretto:

$$L = \int_0^1 \left((1+t^2)\, 4t^2\, 2t + (1+t^2)^2\, 2t\, 2 \right) dt = \text{(facile)} \ldots$$

2° modo: osservare che

$$(F_1)_y = 2xy = (F_2)_x \implies \text{campo irrotaz}$$

$\Downarrow$

il dominio è $\mathbb{R}^2$ semplic. connesso $\Longrightarrow$ campo conservativo.

$\Downarrow$

Calcolo il potenziale

$$\underline{F}(x,y) = (xy^2,\ x^2y)$$

$$\begin{cases} V_x(x,y) = xy^2 \\ V_y(x,y) = x^2y \end{cases}$$

$$V(x,y) = \int xy^2\,dx = \frac{x^2y^2}{2} + g(y)$$

$$V_y(x,y) = \cancel{x^2y}$$

$$\parallel$$

$$\cancel{x^2y} + g'(y) \quad \Longrightarrow \quad g'(y) = 0$$

$$g(y) = c.$$

$$V(x,y) = \frac{x^2y^2}{2} + c$$

$$L = V(2,2) - V(1,0) = 8 - 0 = 8$$