DEF $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ A aperto

$(x_0, y_0) \in A$.

f si dice **differenziabile** in (x_0, y_0) se ammette piano tangente, cioè se è derivabile parzialmente in (x_0, y_0) e se

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)(x-x_0) - f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0$$

Teorema f differenziabile in $(x_0, y_0) \Rightarrow f$ continua in (x_0, y_0)

OSS In dim 1 la differenziabilità equivale alla derivabilità. In dim ≥ 2 è di più della derivabilità direzionale

$f \in C^1(A) \Rightarrow f$ differenziabile in ogni pto

$\Downarrow$ f continua

$\Downarrow$ f derivabile in tutte le direz

Derivate parziali seconde (o terze, etc...)

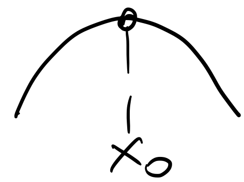
Dim 1 $\quad f(x) : (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$x_0 \in I$ t.c. $f'(x_0) = 0$. Come posso capire se x_0 è pto di max/min relativo, o flesso?

Calcolo $f''(x_0)$

$f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ min. rel. stretto.

$f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ max. rel. stretto



$f''(x_0) = 0 \Rightarrow$ calcolo $f'''(x_0)$

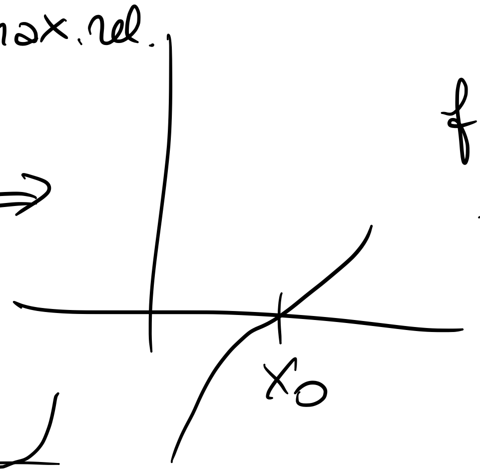
$f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ flesso.

$f'''(x_0) = 0 \Rightarrow$ studio $f^{(4)}(x_0)$

$f^{(4)}(x_0) > 0 \Rightarrow$ min rel.

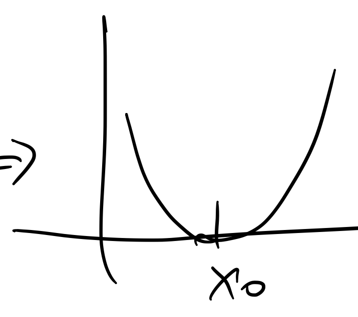
$< 0 \Rightarrow$ max. rel.

$f'''(x_0) > 0 \Rightarrow f''(x) \Rightarrow$



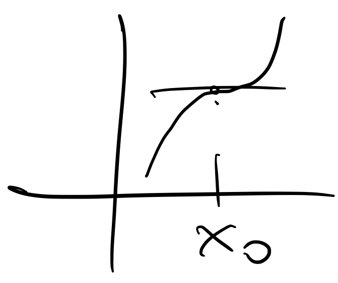
f''

$\Rightarrow$



f'

$\Rightarrow$



Sia $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad$ A aperto

Sia f derivabile parzialmente in tutti i punti di A

Restano definite due nuove funzioni

$$f_x(x,y): A \to \mathbb{R}$$

$$f_y(x,y): A \to \mathbb{R}$$

Posso provare a calcolare le derivate parziali di queste funzioni.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(f_x(x,y)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = f_{xx}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(f_x(x,y)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = f_{xy}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(f_y(x,y)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = f_{yx}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f_y(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = f_{yy}(x,y)$$

$$f(x,y) = x e^{xy} \quad : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$f_x(x,y) = e^{xy} + xy e^{xy} = (1+xy) e^{xy}$$

$$f_y(x,y) = x^2 e^{xy}$$

$$f_{xx}(x,y) = (f_x)_x (x,y) = y e^{xy} + (1+xy) y e^{xy} =$$
$$= y (2+xy) e^{xy}$$

$$f_{xy}(x,y) = x e^{xy} + (1+xy) x e^{xy} = x (2+xy) e^{xy}$$

$$f_{yx}(x,y) = 2x e^{xy} + x^2 y e^{xy} = x (2+xy) e^{xy}$$

$$f_{yy}(x,y) = x^3 e^{xy}$$

Teorema di Schwarz.
~~Coincidenza~~ $\Rightarrow \quad f_{xy} = f_{yx}$

<u>Teorema</u> (Schwarz) $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aperto

f di classe $C^2(A)$ (cioè ammette der. parz. seconde e queste sono continue)

Allora $\quad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) \quad \forall (x,y) \in A.$

Quindi in realtà le derivate parziali seconde di $f(x,y)$ sono solo 3 (se $f \in C^2(A)$)

f_{xx} $\quad$ f_{xy} $\quad$ f_{yy}.

Quante derivate seconde ammette una $f(x,y,z)$ di classe C^2? 6

f_{xx}, f_{yy}, f_{zz}, f_{xy}, f_{xz}, f_{yz}

Classificazione dei punti critici

$f(x,y): A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad$ A aperto

f di classe $C^2(A)$.

$(x_0,y_0) \in A$ pto critico di f, cioè:

$\nabla f(x_0,y_0) = \underline{0}$, $\quad f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0$.

Mi chiedo se (x_0,y_0) è:
- pto di min. relativo
- " " max. relativo
- né l'uno né l'altro.

<u>Esempi:</u> $f(x,y) = x^2+y^2$.

$f_x(x,y) = 2x \qquad f_y(x,y) = 2y$.

Pti critici: $\begin{cases} 2x=0 \\ 2y=0 \end{cases} \iff (x,y)=(0,0)$

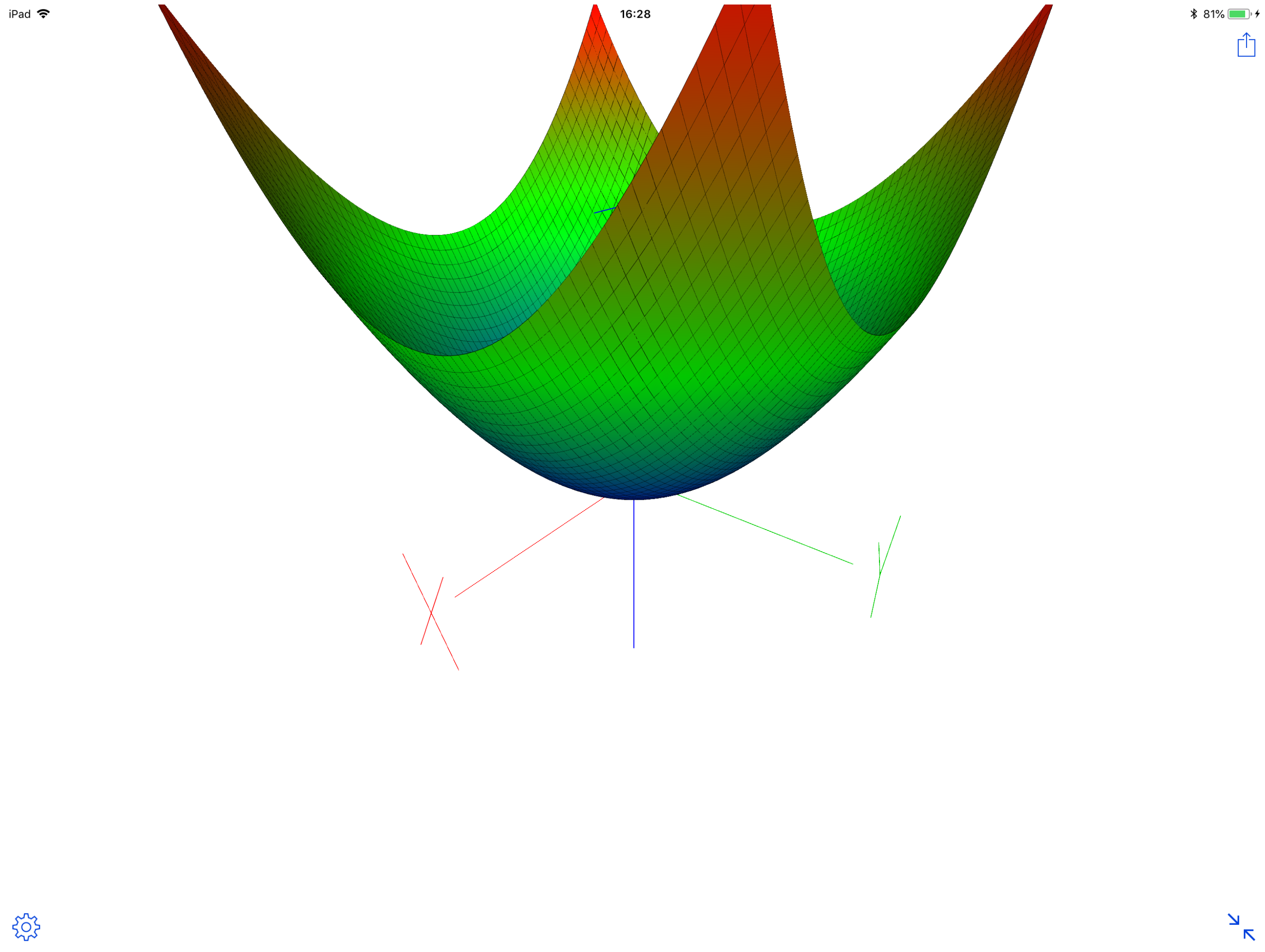
D'altra parte $f(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$= 0 \iff (x,y)=(0,0)$

$(0,0)$ è pto di min relativo, anzi assoluto.

Ovviamente, se $f(x,y) = -x^2-y^2$

Unico pto critico è $(0,0)$, che è massimo relativo (assoluto)


iPad
16:28
81%

$f(x,y) = x^2 - y^2$

$f_x(x,y) = 2x$ $\qquad$ $f_y(x,y) = -2y$.

Unico pto critico: l'origine. $(0,0)$.

$(0,0)$ Non è né max né min. relativo. E' un pto di sella.

iPad 16:28 81%