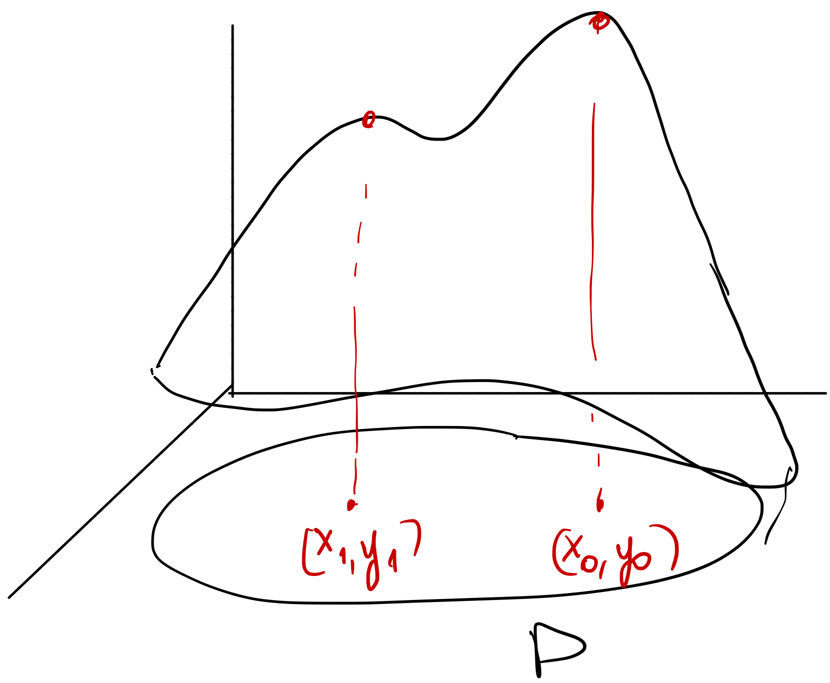
$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\qquad (x_0, y_0) \in D$

DEF (x_0,y_0) si dice punto di massimo ~~assoluto~~ assoluto
minimo
per f se

$$f(x_0,y_0) \geq f(x,y) \quad \forall (x,y) \in D.$$
$\leq$

DEF (x_0,y_0) si dice punto di massimo relativo
minimo
per f se $\exists$ intorno $B_r(x_0,y_0)$ t.c.

$$f(x_0,y_0) \geq f(x,y) \quad \forall (x,y) \in D \cap B_r(x_0,y_0)$$
$\leq$



(x_0,y_0) è pto di max assoluto (e relativo)
(x_1,y_1) è pto di max relativo.

OSS Un max/min assoluto è anche relativo.

DEF (x_0,y_0) si dice pto di max relativo stretto
min
se $\exists$ $B_r(x_0,y_0)$ t.c.

$$f(x_0,y_0) > f(x,y) \quad \forall (x,y) \in D \cap B_r(x_0,y_0) \setminus \{(x_0,y_0)\}$$
$<$

Estremo relativo = pto di max o min relativo

Estremo assoluto = " " " " " assoluto

TEOREMA DI FERMAT

$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$(x_0, y_0) \in D$ sia un pto di massimo o minimo relativo di f interno a D (cioè esiste un intorno $B_r(x_0,y_0) \subset D$).

Allora, se esistono le derivate parziali di f in (x_0,y_0), queste si annullano.

In altre parole, si annulla il gradiente $\nabla f(x_0,y_0)$

DEF $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (x_0,y_0) interno a D.

(x_0,y_0) si dice punto critico (o stazionario) di f se $\nabla f(x_0,y_0) = 0$.

TEOR. FERMAT (in breve) I pti di estremo relativo di f interni a D sono anche pti critici di f (se f è derivabile parzialmente in tali punti).

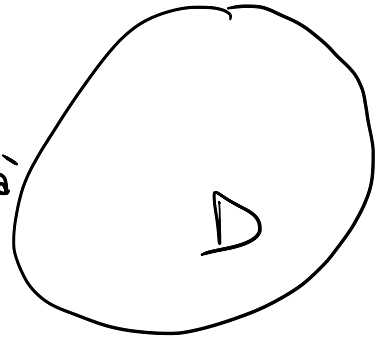
Ricordiamo il thm. di Weierstrass.

$f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua in D chiuso e limitato ammette max e min. assoluti. Dove stanno?

1) nei pti critici interni

2) eventuali pti interni di non derivabilità

3) sui punti della frontiera.



ESEMPIO Trovare massimo e min. assoluti di

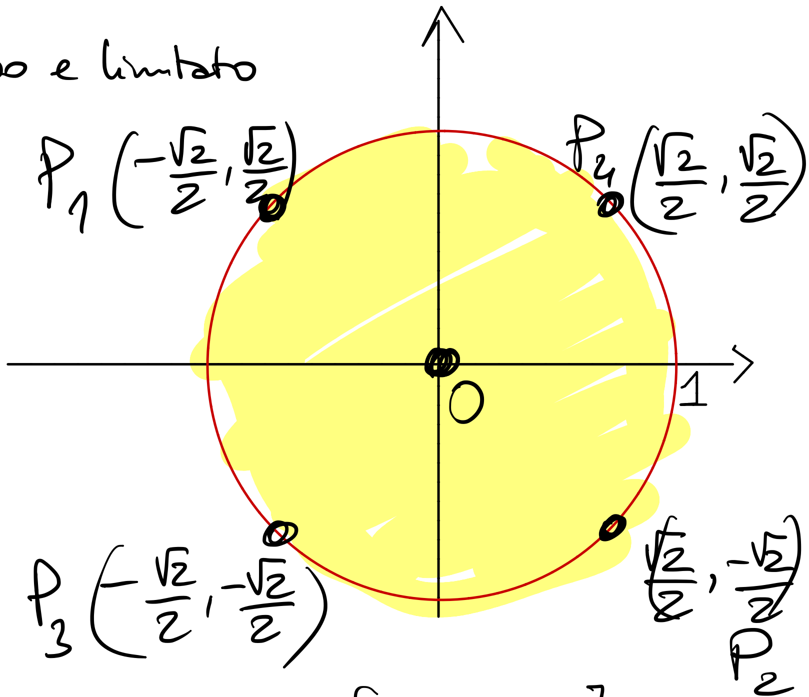
$f(x,y) = x^2 + y^2 - xy$

nell'insieme $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

OSS f continua, D chiuso e limitato

$\Rightarrow$ vale Weierstrass.

Dove vengono assunti.



1) Pti critici interni.

$f_x(x,y) = 2x - y$

$f_y(x,y) = 2y - x$

Pti critici: sol^{ni} di $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2y - x = 0 \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Unico pto critico: $O(0,0)$ interno

2) Pti di non derivabilità: non ce ne sono.

3) Pti della frontiera $\partial D = \{(x,y): x^2 + y^2 = 1\}$

I pti di ∂D si scrivono come $(x,y) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$
$\theta \in [0, 2\pi]$.

Studio

$$\gamma(\theta) = f(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta - \cos\theta \operatorname{sen}\theta =$$
$$= 1 - \cos\theta \operatorname{sen}\theta =$$
$$= 1 - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\theta)$$

$\gamma(\theta)$ è massima quando $\operatorname{sen}(2\theta) = -1$

cioe $\quad 2\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$.

$$\theta = \frac{3\pi}{4} + k\pi \Rightarrow \theta = \frac{3}{4}\pi, \quad \theta = \frac{7}{4}\pi$$

Pti di massimo <u>su ∂D</u>

$$P_1 = \left(\cos\frac{3}{4}\pi, \operatorname{sen}\frac{3}{4}\pi\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$P_2 \left(\cos\frac{7}{4}\pi, \operatorname{sen}\frac{7}{4}\pi\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

In questi punti f vale $\frac{3}{2}$.

Pti di minimo <u>su ∂D</u> sono quelli in cui
$\operatorname{sen}(2\theta) = +1$

$$2\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + k\pi$$
$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}, \quad \theta = \frac{5}{4}\pi.$$

Il minimo <u>su ∂D</u> è assunto in $P_3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $P_4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

In questi punti f vale $\frac{1}{2}$.

Massimo e min. assoluti stanno fra questi 5 pti.

$$f(O) = f(0,0) = 0$$

$$f(P_1) = f(P_2) = \frac{3}{2}$$

$$f(P_3) = f(P_4) = \frac{1}{2}.$$

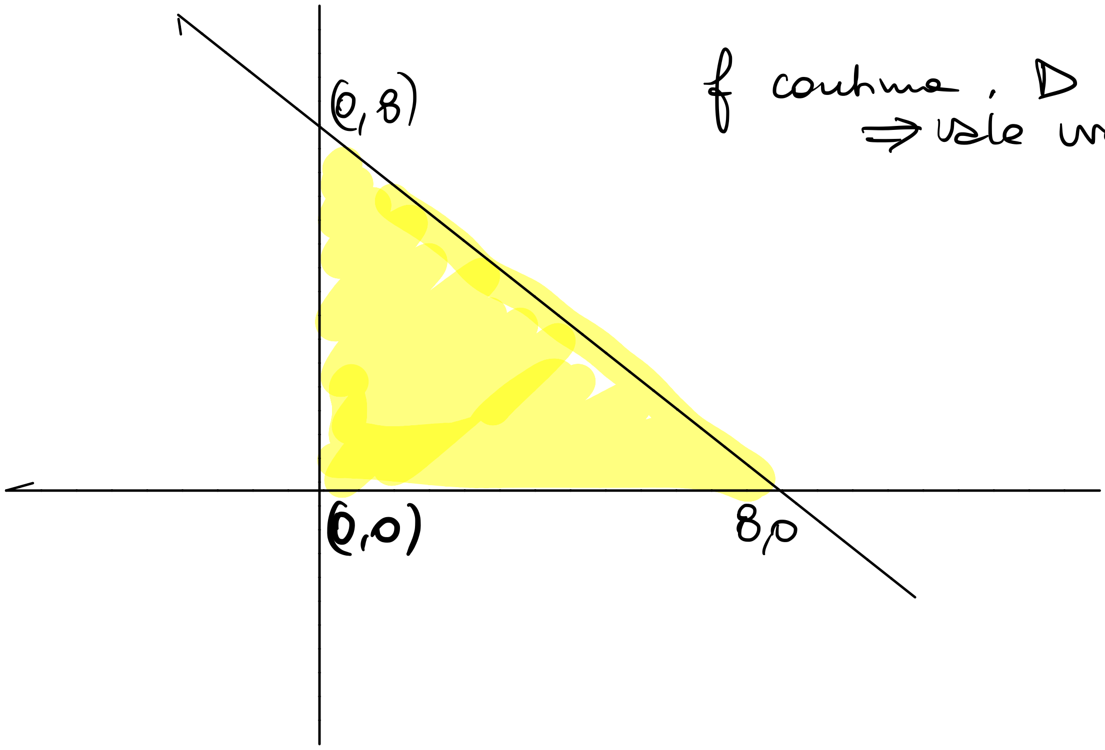
<u>Max assoluto di f</u>: $\frac{3}{2}$, assunto in P_1 e in P_2

<u>Min. assoluto di f</u>: 0, assunto in $(0,0)$

Calcolare max e min. assoluti di

$$f(x,y) = x^3 + (x+y)(y-3x)$$

nel triangolo chiuso di vertici $(0,0)$, $(8,0)$, $(0,8)$.



f continua, D chiuso e limitato
$\Rightarrow$ vale Weierstrass.

2) Pti di non derivabilità: non ce ne sono

1) Pti critici interni:

$$f(x,y) = x^3 + (x+y)(y-3x)$$

$$f_x(x,y) = 3x^2 + (y-3x) - 3(x+y)$$

$$f_y(x,y) = (y-3x) + (x+y)$$