UN PROBLEMA DI CONTROLLO OTTIMO IN TEMPO DISCRETO

Maggio 2017

1. IL SISTEMA DI CONTROLLO

Sia $U = [-1,1]^m \subset \mathbb{R}^m$; date matrici $A_{n \times n}$, $B_{n \times m}$ e una posizione iniziale $x \in \mathbb{R}^n$ la traiettoria del sistema di controllo è definita per ricorrenza da

(S) $$y_0 = x, \quad y_{k+1} = y_k + h\,(Ay_k + Bu_k) \quad \text{per } k = 0,1,2,\dots$$

Qui $h > 0$ è fissato (il passo temporale), i vettori u_k sono scelti in U

Denotiamo con $u^s = \{u_0, u_1, \dots, u_k, \dots\} \subset U$ la generica successione di controlli e con $y^s = \{y_0, y_1, \dots, y_k, \dots\} \subset \mathbb{R}^n$ la corrispondente successione di stati definita dal sistema (S)

Date due condizioni iniziali $x \neq \tilde{x}$ e fissata la successione di controllo u^s si consideranno

$$y^s = \{x, y_1, y_2, \dots\} \qquad \tilde{y}^s = \{\tilde{x}, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots\}$$

LEMMA 1 Per ogni $k = 0,1,2,\dots$ si ha

$$|y_k - \tilde{y}_k| \le (1 + h\|A\|)^k\, |x - \tilde{x}|$$

Dimo. Al passo 1:

$$|y_1-\tilde{y}_1| = \left|x+h(Ax+Bu_0)-\tilde{x}-h(A\tilde{x}+Bu_0)\right| \leq$$

$$\leq |x-\tilde{x}+hA(x-\tilde{x})| \leq |x-\tilde{x}|+h\|A\|\,|x-\tilde{x}|$$

$$=(1+h\|A\|)\,|x-\tilde{x}|$$

Al passo 2, usando la stima al passo 1,

$$|y_2-\tilde{y}_2| \leq |y_1-\tilde{y}_1|+h|A(y_1-\tilde{y}_1)| \leq (1+h\|A\|)\,|y_1-\tilde{y}_1|$$

$$\leq (1+h\|A\|)^2\,|x-\tilde{x}|$$

Iterando il procedimento si ottiene la tesi

2. $\boxed{\text{IL PROBLEMA DI CONTROLLO OTTIMO}}$

Data una funzione $L: \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}$ (densità di costo) e un parametro $0<\beta<1$ (tasso di sconto), per ogni successione di controllo $u^S \subset U$ si considera il costo totale

$$J(x,u^S) = h\sum_{k=0}^{+\infty} L(y_k,u_k)\,\beta^k$$

dove y_k è definita da (S).

Il problema di controllo ottimo è

(P) $$\inf_{u^S \in \mathcal{U}} J(x,u^S)$$

OSSERVAZIONE

L'estremo inferiore in (P) è fatto al variare di u^s nell'insieme $\mathcal{U}$ tutte le successioni contenute in U.

E' importante notare che $\mathcal{U}$ è un insieme convesso contenuto nello spazio vettoriale di dimensione infinita formato da tutte le successioni contenute in $\mathbb{R}^m$

La funzione valore del problema (P) è definita da

$$V(x) = \inf_{u^s \in \mathcal{U}} J(x, u^s)$$

Supponiamo che

(I_1) $\exists C_1 : |L(x,u) - L(\tilde{x},u)| \leq C_1 |x - \tilde{x}|, \forall u \in U, \forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$

(I_2) $\exists C_2 : |L(x,u)| \leq C_2 , \forall u \in U, \forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$

LEMMA 2 Sotto le ipotesi (I_1) e (I_2) si ha

(*) $$|V(x)| \leq \frac{C_2 h}{1-\beta}, \forall x \in \mathbb{R}^n$$

(**) se $\beta(1 + h\|A\|) < 1$ allora $\exists C = C(h, \|A\|, \beta)$ t.c.

$$|V(x) - V(\tilde{x})| \leq C h C_1 |x - \tilde{x}|, \quad \forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$$

Dimo. Supponiamo (per semplicità) che esista $\tilde{u}^s \in \mathcal{U}$ tale che

$$V(\tilde{x}) = J(\tilde{x}, \tilde{u}^s)$$

Per definizione di $V(x)$ si ha dunque

$$V(x) \leq J(x, \tilde{u}^s)$$

e di conseguenza

$$V(x) - V(\tilde{x}) \leq J(x, \tilde{u}^s) - J(\tilde{x}, \tilde{u}^s) =$$

$$= h \sum_{k=0}^{\infty} \left(L(y_k, \tilde{u}_k) - L(\tilde{y}_k, \tilde{u}_k) \right) \beta^k$$

Usando il LEMMA 1 e l'ipotesi (I_1) si deduce

$$V(x) - V(\tilde{x}) \leq h C_1 |x - \tilde{x}| \sum_{k=0}^{\infty} (1 + \|A\| h)^k \beta^k$$

Se $\beta(1 + h\|A\|) < 1$ la serie geometrica è convergente e quindi

$$V(x) - V(\tilde{x}) \leq h C_1 \frac{1}{1 - \beta(1 + h\|A\|)} |x - \tilde{x}|$$

Scambiando i ruoli di x e $\tilde{x}$ si ottiene la stessa stima per $V(\tilde{x}) - V(x)$.

Nel caso generale, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\tilde{u}^s_\varepsilon \in \mathcal{U}$ t.c.

$$J(x, u^s_\varepsilon) \leq V(x) + \varepsilon$$

e si procede come prima, concludendo grazie all'arbitrarietà di ε. $\square$

3. L'EQUAZIONE DI BELLMAN

L'equazione di Bellman (ovvero della Programmazione Dinamica) è:

$$\text{(B)} \qquad \sup_{u \in U} \left[W(x) - \beta W(x + h(Ax + Bu)) - h L(x,u) \right] = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

È una equazione funzionale la cui incognita è una funzione $W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Osserviamo che (B) è equivalente a

$$W(x) = \operatorname{Inf}_{u \in U} \left[\beta W(x + h(Ax + Bu)) + h L(x,u) \right], \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Indichiamo con $BC(\mathbb{R}^n)$ lo spazio vettoriale delle funzioni limitate su $\mathbb{R}^n$ con la norma

$$\|w\| \triangleq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |w(x)|$$

e con T l'operatore definito da

$$\begin{aligned} ([illegible]) \qquad (T^{\circ}w)(x) &= \operatorname{Inf}_{u \in U} \left[\beta w(x + h(Ax + Bu)) + h L(x,u) \right] \\ &= \operatorname{Min}_{u \in U} \left[\beta w(x + h(Ax + Bu)) + h L(x,u) \right] \end{aligned}$$

dato che w, A, B, L sono continue e U compatto.

Quindi l'equazione (B) può essere vista come il problema di punto fisso

(PF) $W \in BC(\mathbb{R}^n)$; $W(x) = (TW)(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$

per l'operatore T su $BC(\mathbb{R}^n)$

LEMMA 3. L'operatore T è una contrazione su $BC(\mathbb{R}^n)$ cioè

$$\|Tw - T\tilde{w}\| \leq \beta \|w - \tilde{w}\| \quad \text{con } 0<\beta<1$$

Dimo. È simile a quella del LEMMA 2
Fissate funzioni $w, \tilde{w}$ in $BC(\mathbb{R}^n)$ si scelgono, per ogni punto x, vettori $u = u(x)$ e $\tilde{u} = \tilde{u}(x)$ in U

tali che il minimo in (Δ) sia raggiunto (grazie al Teo. di Weierstrass). Quindi

$$(Tw)(x) - (T\tilde{w})(x) = \beta w(x+h(Ax+Bu)) + hL(x,u) - \beta\tilde{w}(x+h(Ax+B\tilde{u})) - hL(x,\tilde{u})$$

$$\leq \beta\left(w(x+h(Ax+B\tilde{u})) - \tilde{w}(x+h(Ax+B\tilde{u}))\right) + hL(x,\tilde{u}) - hL(x,\tilde{u})$$

Quindi, usando

$$(Tw)(x) - (T\tilde{w})(x) \leq \beta \|w - \tilde{w}\|.$$

TEOREMA 1 Nelle ipotesi fatte esiste un'unica soluzione $\bar{W} \in BC(\mathbb{R}^n)$ dell'equazione (B)

Inoltre, fissata una qualsiasi $W_0 \in BC(\mathbb{R}^n)$ e considerata la successione ricorsiva

$$(\Delta\Delta) \qquad W_1(x) = (TW_0)(x)$$

$$W_{k+1}(x) = (TW_k)(x) \qquad k = 1, 2, \ldots$$

si ha

$$\lim_{k \to +\infty} \| W_k - \bar{W} \| = 0$$

Dim. Conseguenza diretta del Principio delle Contrazioni. ■

OSSERVAZIONE Se $w, \tilde{w} \in BC(\mathbb{R}^n)$ con $w(x) \geq \tilde{w}(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$(Tw)(x) \geq (T\tilde{w})(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Ne segue, se $L \geq 0$ e W_0 è scelta ≥ 0 che la successione data da $(\Delta\Delta)$ verifica

$$0 \leq W_0 \leq W_1 \leq W_2 \leq \ldots \leq W_k \leq W_{k+1} \leq \ldots$$

Il seguente risultato identifica l'unica soluzione di (B) come la funzione valore di (P) e fornisce un algoritmo per la sintesi di una successione ottima di controlli per (P).

Sia W l'unica soluzione di (B). Per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ sia $u^*(x) \in U$ un controllo che realizza il massimo in (B): esiste per continuità della funzione

$$u \longrightarrow -\beta W(x+h(Ax+Bu)) - hL(x,u)$$

e compattezza di $U=[-1,1]^m$.

Consideriamo la traiettoria y^* definita da

$$y_0^* = x \,, \quad y_1^* = y_0^* + h(Ay_0^* + Bu^*(y_0^*)),$$

$$y_{k+1}^* = y_k^* + h(Ay_k^* + Bu^*(y_k^*))$$

Dall'equazione (B) si deduce che

$$W(y_0^*) - \beta W(y_1^*) - hL(y_0^*, u_0^*) = 0$$

(1) $$W(y_1^*) - \beta W(y_2^*) - hL(y_1^*, u_1^*) = 0$$

(2) $$W(y_2^*) - \beta W(y_3^*) - hL(y_2^*, u_2^*) = 0$$

(k) $$W(y_k^*) - \beta W(y_{k+1}^*) - hL(y_k^*, u_k^*) = 0$$

Sia $u^{*s} = \{u_0^*, u_1^*, ----\}$.

Moltiplicando la uguaglianza ① per β, la ② per β^2, la ⓚ per β^k e sommando si trova

$$W(x) = W(y_0^*) = h \sum_{k=0}^{\infty} L(y_k^*, u_k^*)\beta^k = J(x, u^{*s}) \geq$$
$$\geq \operatorname*{Inf}_{u^s \in \mathcal{U}} J(x, u^s) \triangleq V(x)$$

D'altra parte per una generica $\mathcal{U} \ni u^s = \{u_0, u_1, ----\}$ e per la corrispondente traiettoria y^s da Ⓑ si deduce che

$$W(y_0) - \beta W(y_1) - h L(y_0, u_0) \leq 0$$
$$-----------$$
$$W(y_k) - \beta W(y_{k+1}) - h L(y_k, u_k) \leq 0$$
$$-----------$$

Procedendo come sopra

$$W(x) = W(y_0) \leq h \sum_{k=0}^{\infty} L(y_k, u_k)\beta^k = J(x, u^s), \ \forall u^s \in \mathcal{U}$$

e dunque

$$W(x) \leq \operatorname*{Inf}_{u^s \in \mathcal{U}} J(x, u^s) \triangleq V(x).$$

Dunque $\quad W(x) \equiv V(x)$

e la successione u^{*s} è ottimale. ▨