1.2 PRINCIPI DI MINIMO E DI MASSIMO

Funzioni armoniche: punti di estremo

Ω aperto di $\mathbb{R}^n$, $u \in C^2(\Omega)$ è armonica se

$$\Delta u(x) := \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega$$

L'operatore di Laplace Δ è la traccia della matrice Hessiana di u.

Teorema [principio di minimo/massimo]

Ω aperto limitato, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ armonica in Ω

$$\Downarrow$$

$$\min_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \min_{x \in \partial\Omega} u(x) \; ; \; \max_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \max_{x \in \partial\Omega} u(x)$$

i.e.

$$\min_{\partial\Omega} u \le u(x) \le \max_{\partial\Omega} u \quad \forall x \in \overline{\Omega}$$

Dimo. Per ogni $\varepsilon > 0$ si consideri la funzione

$$v_\varepsilon(x) := u(x) - \varepsilon |x|^2 , \quad x \in \Omega$$

Si ha $\quad \Delta v_\varepsilon(x) = \Delta u(x) - 2n\varepsilon = -2n\varepsilon < 0 , \quad x \in \Omega$

Per il Teo. di Weierstrass esiste almeno un punto di minimo $x_0 \in \overline{\Omega}$ per v_ε; le condizioni necessarie del 2° ordine, se x_0 fosse in Ω, ~~~~ implicano

$$\Delta v_\varepsilon(x^0) \ge 0$$

e quindi v_ε non ha punti di massimo interni ad Ω.

Dato che Ω è limitato si ha
$$|x| \leq R \quad , \forall x \in \overline{\Omega}$$

e quindi
$$u(x) - \varepsilon |x|^2 \geq u(x) - \varepsilon R^2 \quad \forall x \in \overline{\Omega}$$

Allora
$$u(x) - \varepsilon |x|^2 = v_\varepsilon(x) \geq \min_{x \in \overline{\Omega}} v_\varepsilon(x) = \min_{x \in \partial\Omega} v_\varepsilon(x) \geq \min_{x \in \partial\Omega} u(x) - \varepsilon R^2 \, , \; \forall x \in \overline{\Omega}$$

Mandando $\varepsilon \downarrow 0$ si trova
$$u(x) \geq \min_{x \in \partial\Omega} u(x) \qquad \forall x \in \overline{\Omega}$$

ovvero
$$\min_{\overline{\Omega}} u \geq \min_{\partial\Omega} u$$

Dato che per qualunque funzione u si ha
$$\min_{\overline{\Omega}} u = \min\{\min_{\Omega} u ; \min_{\partial\Omega}\} \leq \min_{\partial\Omega} u$$

si conclude che
$$\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u .$$

Per la seconda parte della tesi si procede in modo analogo considerando la funzione ausiliaria
$$v_\varepsilon(x) := u(x) + \varepsilon |x|^2 . \; \square$$

Osservazione. Nel caso $n=1$, tutte e sole le funzioni armoniche su un intervallo Ω sono le funzioni affini

$$u(x) = mx+q \qquad \text{con } m, q \in \mathbb{R}$$

Per $n \geq 2$ esempi di funzioni armoniche sono

- $u(x) = m \cdot x + q \qquad$ con $m = (m_1, \dots, m_n)$, $q \in \mathbb{R}$

~~$u(x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots x_k^2 - x_{k+1}^2 - x_{k+2}^2 - \dots - x_n^2$, $x = (x_1 \dots x_n) \in$~~

- $u(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$
- $u(x_1, x_2) = \log \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $\quad x = (x_1, x_2) \neq (0,0)$
- $u(x_1, x_2) = e^{x_1} \cos x_2$, $\quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$
- $u(x_1, x_2) = \operatorname{arctg} \dfrac{x_1}{x_2}$, $\quad x = (x_1, x_2)$ con $x_2 \neq 0$

Un esempio importante per $n \geq 3$ è

$$u(x) = |x|^{2-n} \qquad \text{per } x \neq 0$$

Esercizio. Considerare le funzioni quadratiche

$$u(x) = \frac{1}{2} Ax \cdot x + m \cdot x + q \qquad , x \in \mathbb{R}^2$$

dove A è una matrice simmetrica 2×2. Per quali scelte di A, m, q si ha che u è armonica?

Esercizio. Continua ad essere vero l'enunciato del Teorema se si suppone che u sia <u>superarmonica</u> cioè

$$\Delta u(x) \leq 0 \quad \forall x \in \Omega \quad ?$$

Esercizio $u(x,y) = e^x \cos y$ è armonica in

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; -\pi/2 < y < \pi/2\}$$

(a) calcolare

$$\min_{\partial\Omega} u \text{ e } \max_{\partial\Omega} u \qquad [\text{entrambi} = 0]$$

(b) calcolare

$$\min_{\bar\Omega} u \text{ e } \max_{\bar\Omega} u$$

(c) osservare che non vale la tesi del Teo, per questa u. Perché?, $[u(0,0) = 1]$

(d) verificare che la tesi del Teo, ~~si applica~~ vale per u su

$$\Omega_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} \leq r\}$$

(e) ~~che succede~~ studiare

$$\lim_{r\to+\infty} \min_{\partial\Omega_r} u \, , \quad \lim_{r\to+\infty} \max_{\partial\Omega_r} u$$

ESERCIZIO [semplici esempi di programmazione lineare]

Dimo. esistenza di pt. di min (o non esistenza) e calcolare valore min

1) $\min_{G} 3x_1+2x_2$, $G=\{x=(x_1,x_2) : x_1 \geq 1, x_2 \geq 1\}$

2) $\min_{G} 3x_1-2x_2$, $G=\{x=(x_1,x_2) : x_1 \geq 1, x_2 \geq 1$

3) $\min_{G} \frac{1}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2$, $G=\{x=(x_1,x_2) : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1+x_2 \leq 1\}$

4) $\min_{G} 3x_1+2x_2$, $G=\{x=(x_1,x_2) : x_1 \geq 0, 0 \leq x_2 \leq 1\}$

5) $\min_{C} 3x_1+2x_2$, $G=\{x=(x_1,x_2) : x_1 \geq 0, x_1 \leq x_2 \leq 5x_1\}$

In ciascuno dei casi disegnare G, individuare ∂G e verificare se G è limitato o meno.
Le funzioni in gioco sono lin. (e quindi armoniche)

ESERCIZIO Studiare il problema:

$\min_{G} \operatorname{arctg} \frac{x_1}{x_2}$, $G=\{x=(x_1,x_2) : x_1 \geq 1, x_2 \geq 1\}$