produzione di particelle in laboratorio

In un urto tra due particelle, può essere prodotta una particella pesante a spese dell’energia cinetica dello stato iniziale

In questo modo possono essere prodotte in laboratorio particelle che, a causa della loro instabilità, non sono presenti stabilmente in natura

Queste particelle comunque erano presenti in grande abbondanza nei primi istanti di vita dell’universo

Una particella instabile può decadere in due o più particelle leggere, trasformando la massa in eccesso in energia cinetica dei prodotti di decadimento

(“creare materia”, in Asimmetrie n. 19)

produzione di particelle in laboratorio

Per esempio, consideriamo l'urto di una particella in moto ("proiettile") contro una particella ferma ("bersaglio")

qual è la massa invariante dello stato finale?

$$\overline{P}_p \equiv \left(E_p / c; p,0,0\right); \overline{P}_b \equiv \left(m_b c;0,0,0\right)$$

$$\overline{P}_{tot} \equiv \left(\left(E_p / c + m_b c\right); p,0,0\right)$$

Esperimenti a bersaglio fisso

$$M^2_{inv} c^2 = \left|\overline{P}_{tot}\right|^2 = \left(E_p / c + m_b c\right)^2 - p^2 = \left(E_p / c\right)^2 + m_b^2 c^2 + 2E_p m_b - p^2 = m_p^2 c^2 + m_b^2 c^2 + 2E_p m_b$$

$M_{inv} c^2 \approx \sqrt{2E_p m_b c^2}$ se l'energia del proiettile è grande rispetto alle masse in gioco

Consideriamo ora due particelle (identiche per semplicità) che si muovono una contro l'altra con lo stesso impulso:

$$\overline{P}_p \equiv \left(E_p / c; p,0,0\right); \overline{P}_b \equiv \left(E_p / c; -p,0,0\right)$$

$$\overline{P}_{tot} \equiv \left(2E_p / c;0,0,0\right)$$

$$M^2_{inv} c^2 = \left|\overline{P}_{tot}\right|^2 = 4E_p^{\ 2} / c^2$$

$$M_{inv} c^2 \approx 2E_p \gg \sqrt{2E_p m_b c^2}$$

Esperimenti a fasci incrociati

decadimento di una particella in due fotoni

Nel riferimento di quiete della particella:

$$\overline{P}_H \equiv \left(m_H c;0,0,0\right);\overline{P}_{\gamma_1} \equiv \left(E_\gamma / c; p_\gamma,0,0\right);\overline{P}_{\gamma_2} \equiv \left(E_\gamma / c;-p_\gamma,0,0\right)$$

$$2E_\gamma / c = m_H c$$

$$E_\gamma = m_H c^2 / 2$$

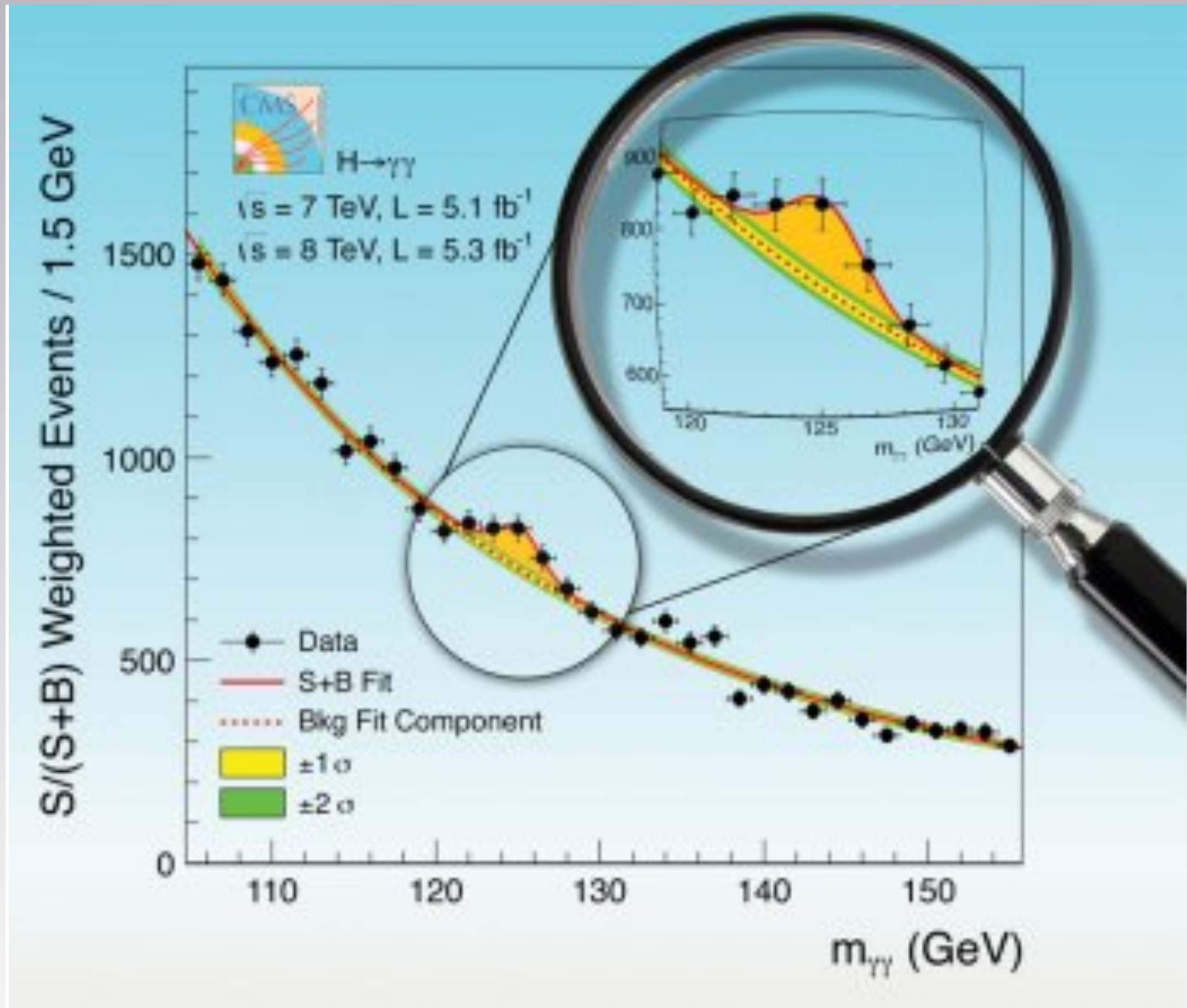
Ma noi misuriamo le energie dei fotoni nel laboratorio...

$$\overline{P}_{\gamma_1} \equiv \left(p_{\gamma_1};\vec{p}_{\gamma_1}\right);\overline{P}_{\gamma_2} \equiv \left(p_{\gamma_2};\vec{p}_{\gamma_2}\right)$$

$$M^2{}_{inv}c^2 = \left|\overline{P}_{tot}\right|^2 = \left(p_{\gamma_1}+p_{\gamma_2}\right)^2 - \left(\vec{p}_{\gamma_1}+\vec{p}_{\gamma_2}\right)^2 = p_{\gamma_1}{}^2 + p^2{}_{\gamma_2} + 2p_{\gamma_1}p_{\gamma_2} - \left(p_{\gamma_1}{}^2 + p^2{}_{\gamma_2} + 2\vec{p}_{\gamma_1}\cdot\vec{p}_{\gamma_2}\right) =$$

$$= 2p_{\gamma_1}p_{\gamma_2}\left(1-\cos\vartheta\right)$$

Decadimento in due fotoni del bosone di Higgs



Cinematica del decadimento beta del neutrone

Il neutrone libero decade secondo la reazione:

$$n \to p + e + \bar{\nu}_e$$

m_e = 0.511 MeV/c^2, m_p = 938.3 MeV/c^2, m_n = 939.6 MeV/c^2

Nel riferimento di quiete del neutrone, l'energia cinetica a disposizione nello stato finale (q-value) è dunque:

$$K_{tot} = \Delta mc^2 = m_n c^2 - (m_p + m_e)c^2 = 0.782 \text{ MeV}$$

L'impulso totale dello stato finale è nullo.

Vogliamo calcolare l'energia cinetica massima di ciascuna delle tre particelle dello stato finale.

Come si può impostare il problema?

E' necessario usare le formule relativistiche?

Cinematica del decadimento beta del neutrone

Poiché l'energia totale a disposizione è molto minore della massa del protone, si potrà sempre utilizzare la formula classica per l'energia cinetica: $K_p = \frac{p_p^2}{2m_p}$

L'energia massima dell'antineutrino si otterrà quando l'elettrone è fermo e viceversa.

Nei due casi, l'impulso dell'antineutrino o dell'elettrone sarà uguale all'impulso del protone. In entrambi i casi, le particelle leggere saranno relativistiche e l'energia cinetica del protone sarà trascurabile.

Per il neutrino, che ha massa praticamente nulla, il suo impulso sarà uguale all'energia cinetica a disposizione:

$$p_n = K_{tot} = 0.782 \text{ MeV}$$

e l'energia cinetica del protone sarà: $K_p \simeq \frac{p_n^2}{2m_p} = 0.33 \text{ keV}$

Cinematica del decadimento beta del neutrone

Poiché l'energia totale a disposizione è molto minore della massa del protone, si potrà sempre utilizzare la formula classica per l'energia cinetica: $K_p = \frac{p_p^2}{2m_p}$

L'energia massima dell'antineutrino si otterrà quando l'elettrone è fermo e viceversa.

Nei due casi, l'impulso dell'antineutrino o dell'elettrone sarà uguale all'impulso del protone. In entrambi i casi, le particelle leggere saranno relativistiche e l'energia cinetica del protone sarà trascurabile.

Anche l'elettrone, se il neutrino è fermo, avrà una energia cinetica pari a quella totale, e l'energia totale sarà:

$$E_e = K_{tot} + m_e c^2 = 1.293\ \text{MeV} \Rightarrow p_e c = \sqrt{E_e^2 - m_e^2 c^4} = 1.188\ \text{MeV}$$

L'energia cinetica del protone sarà quindi: $K_p \simeq \frac{p_e^2}{2m_p} = 0.75\ \text{keV}$

Covarianza delle leggi fisiche

Poiché il primo postulato di Einstein afferma che le leggi fisiche sono le stesse in tutti i riferimenti in moto rettilineo e uniforme tra di loro,

e il secondo implica che diversi sistemi di riferimento in moto rettilineo e uniforme sono connessi da trasformazioni Lorentz,

ne segue che per rispettare la relatività speciale (RS) tutte le leggi fisiche devono essere covarianti per trasformazioni di Lorentz.

In particolare le leggi che esprimono le interazioni devono essere covarianti.

Abbiamo già analizzato esplicitamente la covarianza delle leggi della dinamica.

Covarianza delle equazioni di Maxwell

Eq. di Maxwell

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla}\times\vec{E} - \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} - \varepsilon\mu\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \vec{\nabla}\times B - \varepsilon\mu\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \mu\vec{J}$$

8 equazioni in 6 incognite accoppiate

i campi si possono derivare dai potenziali elettromagnetici

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

eq. di Maxwell in termini dei potenziali e.m.

$$\nabla^2 V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \Box V = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = \Box\vec{A} = -\mu\vec{J}$$

4 equazioni in 4 incognite disaccoppiate

Covarianza delle equazioni di Maxwell

Eq. di Maxwell

$$\text{div}\,\vec{E} = \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\text{div}\,\vec{B} = \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

$$\text{rot}\,\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla}\times\vec{E} - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\text{rot}\,\vec{B} - \varepsilon\mu\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{\nabla}\times B - \varepsilon\mu\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu\vec{J}$$

i campi si possono derivare dai potenziali elettromagnetici

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

eq. di Maxwell in termini dei potenziali e.m.

$$\nabla^2 V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \Box V = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \Box \vec{A} = -\mu\vec{J}$$

La densità di corrente e la densità di carica sono gli elementi di un quadrivettore $\overline{J} \equiv \left(\rho c, \vec{J}\right)$

L'operatore dalambertiano è relativisticamente invariante

Il potenziale vettore e il potenziale scalare sono gli elementi di un quadrivettore $\overline{A} \equiv \left(\frac{V}{c}, \vec{A}\right)$

$\Rightarrow$ Le equazioni di Maxwell si possono scrivere in forma compatta: $\Box\overline{A} = -\mu\overline{J}$

Le equazioni di Maxwell sono "covarianti a vista"

La “chiusura” della Relatività Speciale

I principi della dinamica e l’elettromagnetismo,

le due sintesi potenti ed eleganti della fisica classica,

sono espresse da leggi covarianti, che soddisfano quindi automaticamente i postulati della relatività “speciale” (RS), o “ristretta”.

Cosa manca?

La legge della gravitazione di Newton è palesemente in contrasto con la RS

relatività generale

La relatività speciale è una teoria covariante della dinamica delle particelle e del campo elettromagnetico

Problemi aperti nella RS:

1. come si possono formulare le leggi fisiche in sistemi di riferimento accelerati
2. come si può integrare la gravità nella RS

La RS è incompatibile con la gravità (tutti i tentativi di incorporarle una nell'altra producono risultati incoerenti o in contraddizione con risultati sperimentali)

Principio di equivalenza

L’uguaglianza della massa inerziale e della massa gravitazionale non deriva dai principi della dinamica

In meccanica classica è necessario introdurre un nuovo principio, il “principio di equivalenza”.

Einstein lo riformula nel 1908: gli effetti di un campo gravitazionale uniforme sono identici a quelli di un sistema di riferimento uniformemente accelerato rispetto ad un riferimento inerziale con $a = g$ (verso l’alto)

$\Rightarrow$ Un campo gravitazionale può essere eliminato in un apposito sistema di riferimento (in “caduta libera”) con $a = -g$ (“ascensore di Einstein”)

Tutto ciò evidenzia come i “problemi aperti” 1) e 2) siano in realtà strettamente interconnessi

Che succede per un campo gravitazionale non uniforme?

Carattere locale del principio di equivalenza

Se il campo gravitazionale non è uniforme (come quello intorno ad un corpo dotato di massa), non è possibile identificare un unico sistema di riferimento che "cancelli" la gravità.

Tuttavia è sempre possibile individuare una piccola porzione di spazio, dove g non varia apprezzabilmente.

Per un sistema di riferimento inerziale lorentziano tutte le leggi fisiche devono essere descritte dalla RS

Sistema Localmente Inerziale (SLI): quello in cui vale (localmente) il primo principio della dinamica (nella formulazione moderna):

1. vale la relatività galileiana
2. un punto materiale non soggetto all'interazione con altri corpi (isolato), se è fermo rimane fermo
3. si conserva la quantità di moto: un punto materiale isolato in moto rettilineo uniforme rimane in moto rettilineo uniforme

Conseguenze del principio di equivalenza

a) Il rapporto tra massa inerziale e massa gravitazionale è una costante fondamentale adimensionale

b) i raggi di luce seguono traiettorie curve per effetto della gravità.

- costruzione geometrica in un riferimento accelerato rispetto ad un SLI
- dimostrazione sperimentale nel 1919: misura della posizione delle stelle durante l'eclisse di sole del 29 maggio, osservata da due gruppi di astronomi alle estremità dell'Atlantico

c) spostamento verso il rosso della luce in un campo gravitazionale (red-shift gravitazionale)

- un fotone emesso da una sorgente che si trova in un campo gravitazionale deve essere rallentato (ossia la sua energia deve diminuire) ed è quindi red-shifted

d) il campo gravitazionale rallenta lo scorrere del tempo

- il red-shift implica una frequenza minore, e dunque un tempo rallentato

metrica e curvatura dello spazio tempo

Qui si esaurisce la RG “intuitiva”.

Per procedere oltre sarebbe necessario introdurre:

- il tensore metrico, che permetta di definire la quadridistanza anche in un sistema di riferimento non inerziale.
- le linee geodetiche curve: è necessario introdurre un tensore che rappresenti la curvatura dello spaziotempo.
- una equazione che connette le quantità così introdotte con la distribuzione della materia ed energia dell’universo e dei loro flussi nello spaziotempo (l’equivalente di cariche e correnti nelle eq. di Maxwell)

il tensore metrico

se vogliamo scrivere il modulo quadro di un quadrivettore come la somma dei quadrati dei moduli quadri delle componenti, per far comparire i segni meno al posto giusto lo possiamo scrivere come prodotto del vettore covariante con quello controvariante, definito come il quadrivettore moltiplicato per un “tensore metrico”:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Questo vale naturalmente anche per lo spostamento quadridimensionale infinitesimo

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dx^\mu dx_\nu = dx^\nu dx_\mu$$

riferimenti non inerziali

come esempio, consideriamo un riferimento rotante intorno all'asse z: in esso le nuove coordinate x' ed y' sono ciascuna funzione di x, y e t. Quando andiamo a calcolare il ds^2, unguagliandolo nei due riferimenti, compariranno termini che rimescolano le tre coordinate.

In altri termini, il tensore metrico non è più diagonale.

L’equazione del campo gravitazionale

le proprietà geometriche dello spaziotempo dipendono dalla distribuzione di energia ed impulso

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Nel primo membro oltre al tensore metrico compaiono il tensore di curvatura, la curvatura scalare e la costante cosmologica.

Il tensore di curvatura e la curvatuta scalare dipendono dal tensore metrico e dalle sue derivate prime e seconde, quindi l’equazione permette in linea di principio di determinare la metrica, noto il tensore energia-impulso

onde gravitazionali

l'equazione della RG ammette una soluzione in termini di onde che si propagano (nel vuoto) secondo l'eq. di d'Alambert, come le eq. di Maxwell, con la velocità della luce

La relatività generale è stata formulata compiutamente nel 1915 e pubblicata nel 1916, le onde gravitazionali sono state osservate nel 2015 e pubblicate nel 2016, esattamente 100 anni dopo