

ISTITUZIONI DI MATEMATICA II
FOGLIO DI ESERCIZI 1

A. DALL'AGLIO, F. DE MARCHIS
16.03.2018

Esercizio 1. Data l'equazione differenziale $y'(t) = (t^2 + 2)y(t)$,

- i. determinarne tutte le soluzioni,
- ii. determinarne tutte le soluzioni limitate.

Esercizio 2. Data l'equazione differenziale $(1 + t^2)y'(t) + y(t) = 2$,

- i. determinarne tutte le soluzioni,
- ii. determinarne tutte le soluzioni limitate.

Esercizio 3. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) - 5y(t) = 4e^t - 5t \\ y(0) = -2. \end{cases}$$

Esercizio 4. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) - 2y(t) = \frac{e^{3t}}{e^t + 1} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 5. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{2y(t)}{t} + t^2 \sin(t) \cos(t) \\ y(\pi) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 6. Una popolazione di batteri inizialmente conta 500 individui, dopo 3 ore ne conta 8000. Supponendo che la crescita della popolazione sia proporzionale al numero di individui:

- i. determinarne un'espressione per il numero di batteri dopo t ore,
- ii. determinarne il numero di batteri dopo 4 ore,
- iii. determinare dopo quanto tempo ci saranno 108000 batteri.

Esercizio 7. Dimostrare che le funzioni $u(t) = t^2$ e $v(t) = \cos(t)$ sono linearmente indipendenti.

Esercizio 8. Dimostrare che le funzioni $w(t) = \frac{1}{1+t^2}$ e $z(t) = t - 2$ sono linearmente indipendenti.

Esercizio 9.

- i. scrivere una coppia di funzioni linearmente dipendenti,
- ii. scrivere una funzione $f(x)$, non identicamente nulla, tale che $f(x)$ e $\arctan(t)$ siano linearmente dipendenti.

Esercizio 10. Determinare la soluzione generale dell'equazione

$$y''(t) + y(t) = t^2.$$

Esercizio 11. Determinare la soluzione generale dell'equazione

$$y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = e^{2t}.$$

Esercizio 12. Determinare la soluzione generale dell'equazione

$$y''(t) + 2y'(t) = e^t + e^{-2t}.$$

Esercizio 13. Determinare la soluzione generale dell'equazione

$$2y''(t) + y'(t) - y(t) = te^{-t}.$$

Esercizio 14. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} 5y''(t) - 6y'(t) + 5y(t) = 0 \\ y'(0) = -1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Esercizio 15. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) + 3y'(t) - 4y(t) = e^{-t} + t \\ y'(0) = \frac{1}{6} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Esercizio 16. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) - y'(t) = t + 1 \\ y'(1) = 0 \\ y(1) = -2 \end{cases}$$