UNA NUOVA COSTANTE UNIVERSALE

UNITÀ XII

1

Dove si profilano all'orizzonte nuove e insospettate possibilità di azione

Non c'è dubbio. Tra elettroni, nuclei e onde luminose, negli ultimi tempi siamo entrati all'interno di un universo decisamente poco vicino a quello dell'esperienza quotidiana, e abbiamo dovuto familiarizzarci con una fenomenologia tutt'altro che intuitiva. In fin dei conti, finché parlavamo di liquidi che si mescolano, o di onde marine, avevamo a che fare con oggetti conosciuti; la comprensione qualitativa dei relativi comportamenti non ci metteva perciò di fronte a difficoltà particolari. Anche quando ci siamo addentrati nell'interpretazione microscopica dei fenomeni termodinamici, spingendoci a studiare le proprietà del movimento delle molecole, la cosa non ci ha posto grandi problemi: in fondo, si trattava pur sempre di discutere del comportamento di tanti corpi che potevamo assimilare a palline, anche se molto piccole. Adesso, invece, cominciamo ad avere a che fare con un mondo sconosciuto: quello che accade all'interno di un atomo è davvero qualcosa che non ha riscontro diretto in alcun fenomeno macroscopico osservabile nella vita quotidiana. Questo significa che, nonostante la nostra riluttanza al riguardo, saremo costretti a chiederti di crederci sulla parola quando ti metteremo di fronte ad alcuni comportamenti e ad alcuni dati empirici relativi alla fenomenologia del mondo microscopico che sono estranei alla tua esperienza. Ti promettiamo comunque che cercheremo di contenere al minimo la quantità di «novità» presentate senza giustificazione, limitandoci a quelle indispensabili per introdurre problemi stimolanti.

Dopo le pentole, i forni

In questo volume abbiamo discusso ampiamente sia i fenomeni termodinamici che quelli ondulatori. Abbiamo invece menzionato solo occasionalmente le interessanti connessioni tra questi due ambiti fenomenologici. Di una, in particolare, vogliamo qui occuparci: è un dato di fatto che un corpo riscaldato emette onde luminose, ovvero onde (raggi γ, X, ultravioletti, luce visibile, infrarossi...) che appartengono allo spettro della radiazione luminosa discusso al termine dell'undicesima unità. È un altro dato di fatto che la frequenza della radiazione emessa varia in funzione della temperatura del corpo: via via che aumenta la temperatura, infatti, si registra la presenza sempre più significativa di radiazione di alta frequenza.

Nelle prossime pagine cercheremo perciò di decifrare alcuni aspetti significativi di questa categoria di fenomeni, allo scopo, in particolare, di stabilire le relazioni che intercorrono tra grandezze termodinamiche (la temperatura del corpo che emette radiazione) e grandezze «ondulatorie» (ad esempio le frequenze o l'energia della radiazione emessa).

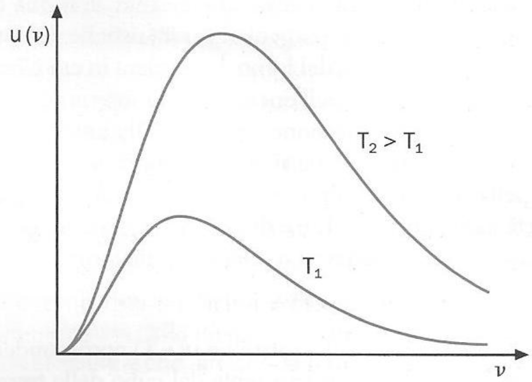
Prima però di dare avvio alla nostra indagine sulla termodinamica della radiazione, è il caso di accennare a un aspetto problematico che forse avrai già colto: per quale strano meccanismo un corpo portato a un'opportuna temperatura emette onde luminose? Per il momento non abbiamo risposte soddisfacenti a questa domanda. L'unica cosa che possiamo ragionevolmente pensare è che le onde *siano il risultato* di qualcosa che succede a livello microscopico: dopotutto, sappiamo ormai che aumentare la temperatura del corpo significa in ultima analisi aumentare l'energia delle sue molecole, ed è perciò sensato ritenere che siano proprio le stesse molecole a poter «emettere onde», ovvero energia. D'altra parte, sappiamo anche che le stesse molecole sono in grado di «assorbire onde», cioè energia: ricorderai che nell'undicesima unità abbiamo accennato al fatto che un corpo colpito ad esempio da radiazione luminosa aumenta di temperatura, segno che le molecole hanno aumentato, in virtù dell'arrivo dell'onda, la propria energia media. Dunque, accontentiamoci per ora di dire che atomi e molecole «emettono e assorbono onde», riservandoci di indagare in un prossimo futuro sul meccanismo attraverso cui tali processi si realizzano.
Torniamo invece al problema centrale che ci sta a cuore: quali relazioni esistono tra la temperatura di un corpo che emette radiazione luminosa e le caratteristiche della radiazione emessa? Per rispondere alla domanda, ci chiederemo che cosa succede dentro un forno...
Siamo di colpo impazziti? Niente affatto: più semplicemente, un forno è proprio il tipico sistema termodinamico che fa al caso nostro, visto che può essere schematizzato come una cavità nella quale, quando le pareti sono portate a una certa temperatura, è contenuta una certa quantità di radiazione, le cui caratteristiche dipendono proprio dalla temperatura del forno stesso. È infatti noto che il colore dell'interno di un forno cambia in funzione di «quanto caldo fa» lì dentro. Un forno in cui si scalda un panino è fondamentalmente scuro, ma se la temperatura viene alzata fino al valore necessario per cuocere una pizza comincia a diventare rosso; diventa poi ancora più rosso se si porta il forno alla temperatura richiesta per una cottura di ceramica, e se ci spingiamo infine alle alte temperature registrate negli altiforni dell'industria siderurgica, dove si fondono i metalli, vediamo l'interno del forno passare da rosso a bianco. Si parla anche, nel linguaggio ordinario, di «calor rosso» o «calor bianco» per indicare differenti temperature.
Ma i colori rosso o bianco sono collegati, come sai, alla frequenza della radiazione presente nel forno: un forno «rosso» significa che al suo interno è largamente prevalente radiazione luminosa corrispondente alla frequenza «rosso», mentre un forno la cui temperatura è aumentata fino a quella del calor/color bianco è pieno di luce visibile di tutte le frequenze. Dunque, a temperature diverse corrispondono diverse distribuzioni della radiazione; e l'esempio appena fatto suggerisce che temperature più elevate provocano uno spostamento della radiazione verso frequenze più elevate.
Inoltre, poiché sappiamo che a ogni onda è associata energia, possiamo chiederci quanta energia è associata alla radiazione presente all'interno di un forno a una certa temperatura. Meglio ancora: dato che nel forno è contenuta radiazione di differenti frequenze, possiamo chiederci come è ripartita l'energia tra di esse. Restando al nostro esempio, siamo in grado di anticipare ragionevolmente che nel forno «bianco», a temperatura più elevata del forno «rosso», non solo sarà contenuta una maggiore quantità di energia, ma che questa energia sarà distribuita soprattutto tra le onde di frequenza più elevata, mentre nel forno «rosso» una minor quantità di energia sarà quasi tutta dovuta alla radiazione di bassa frequenza corrispondente al colore rosso.
D'accordo, dirai, ma perché proprio un forno? Se davvero vogliamo discutere di tempera-

ture e radiazioni (cosa di cui già, probabilmente, faresti volentieri a meno) potremmo almeno scegliere qualche sistema più interessante: potremmo pensare, magari, di stare sdraiati ad abbronzarci sulla spiaggia... Spiacenti: ci serve proprio un forno, anzi, un forno ideale di cui ora descriveremo le caratteristiche. Ci interessa infatti quello che succede in una situazione molto particolare, quale quella che si realizza appunto dentro una cavità chiusa, in cui la radiazione è per così dire intrappolata senza possibilità di disperdersi all'esterno, e in cui non può penetrare radiazione proveniente dal di fuori. Queste condizioni si possono realizzare con ottima approssimazione in un forno con un'imboccatura estremamente piccola (quel tanto che basta per poterci guardare dentro).
Ti chiedi quale sia l'interesse particolare di questo sistema? Presto detto: siccome la radiazione contenuta nella cavità non può uscirne, né può entrare radiazione nella cavità dall'esterno, in condizioni come quelle che abbiamo descritto possiamo considerare il sistema formato dalle pareti del forno e dalla radiazione in esso contenuta come un sistema isolato. E, come in qualunque sistema isolato, in esso si stabilirà una situazione di equilibrio. È proprio un processo analogo a quello che si osserva in un gas. In quel caso, nello stato di equilibrio, le molecole si agitano incessantemente e urtano in continuazione tra di loro e con le pareti, in modo tale però da mantenere una particolare distribuzione delle velocità; nel nostro forno, gli atomi delle pareti, portate a una certa temperatura, emettono e assorbono continuamente radiazione, ma, dato che non può né entrare né uscire nulla dalla cavità, succede che tanta è la radiazione emessa a una certa frequenza quanta quella assorbita. Si determina così uno stato di equilibrio caratterizzato da una particolare distribuzione dell'energia tra le varie frequenze della radiazione presente. Capisci allora perché questo particolare sistema ci pare degno di attenzione: lo studio dello stato di equilibrio di un sistema termodinamico è la chiave per scoprirne delle proprietà molto generali, e noi siamo appunto alla ricerca delle proprietà generali della termodinamica della radiazione. Possiamo allora formulare in un linguaggio un po' più tecnico il problema che ci interessa, mettendo insieme i pezzi del discorso fatto fino a questo punto: vogliamo studiare le proprietà dell'energia caratteristica della radiazione all'equilibrio, esaminandone in particolare la distribuzione in funzione della frequenza. Prima di passare direttamente all'azione, allora, vediamo di saperne qualcosa di più sul piano sperimentale.

Lo spettro del corpo nero

No, «lo spettro del corpo nero» non è il titolo dell'ultimo film dell'orrore. È solo un modo compatto per dare un nome al nostro problema. «Spettro» non è parola nuova per noi, e anche qui la utilizzeremo per indicare l'insieme delle frequenze della radiazione presente nel nostro forno; e «corpo nero» è il termine con cui nella letteratura scientifica si indica il sistema termodinamico che noi più prosaicamente abbiamo chiamato forno. Forno che, naturalmente, non è affatto «nero»: con questa parola ci si riferisce soltanto alla proprietà del sistema di essere in grado di assorbire tutta la radiazione che è in grado di emettere. Ricorda infatti che abbiamo a che fare con un sistema isolato, in cui non entra e da cui non esce niente.
Guardando dentro al nostro forno con uno strumento appropriato, dovremmo essere in grado di ricavare i dati sperimentali che permettono di costruire i grafici della distribuzione dell'energia in funzione della frequenza per un corpo nero a una data temperatura. Questo compito è stato esaurientemente svolto da generazioni di fisici sperimentali, e

noi ci limiteremo a fornirtene i risultati: nella figura sono rappresentate le funzioni di distribuzione dell'energia di un corpo nero a due diverse temperature, misurate sperimentalmente.



Qualche precisazione sarà utile per procedere con più chiarezza. Nel grafico è riportata la grandezza $u(\nu)$ in funzione di ν. Come è ovvio, ν rappresenta la frequenza della radiazione; resta da chiarire il significato esatto della funzione $u(\nu)$. La quantità $u(\nu)\Delta\nu$ sta a indicare una densità di energia: corrisponde infatti alla quantità di energia, presente in un volume unitario, associata alla radiazione di frequenza compresa tra ν e $\nu + \Delta\nu$. Dovrebbe allora essere chiaro perché abbiamo attribuito alla $u(\nu)$ il nome di «funzione di distribuzione dell'energia». Del resto, la terminologia non è certo nuova: ricordi la funzione di distribuzione delle velocità? Lì la funzione di distribuzione ci diceva «quante molecole sono collegate a una certa velocità», e qui, in modo del tutto analogo, essa ci dice «quanta energia è collegata con una certa frequenza».

Avrai notato che abbiamo parlato di «densità di energia» anziché di energia e basta. La ragione sta nel semplice fatto che la distribuzione dell'energia non dipende dalle dimensioni del forno: in un forno più grande sarà contenuta una maggiore quantità di energia, distribuita però, a parità di temperatura, allo stesso modo tra le diverse frequenze. Quali sono dunque le dimensioni della grandezza $u(\nu)$?

Se $u(\nu)\Delta\nu$ rappresenta un'energia per unità di volume, ne segue che $u(\nu)$ ha dimensioni

$$[u(\nu)] = \frac{[\text{energia}]}{[\text{volume}]\,[\text{frequenza}]} = \frac{ML^2T^{-2}}{L^3T^{-1}} = ML^{-1}T^{-1}$$

e si misura in $\mathrm{J \cdot s \cdot m^{-3}}$.

Vediamo che i dati sperimentali confermano quanto la nostra esperienza di forni suggeriva: l'energia totale (che non è altro che l'area compresa tra la curva e l'asse delle ascisse) aumenta all'aumentare della temperatura, e corrispondentemente aumenta anche il valore della frequenza cui è associato il massimo dell'energia, cosa che si vede dal fatto che tutta la curva «si sposta» verso le frequenze più alte. Questi due fatti si possono anche esprimere in maniera quantitativa: è possibile infatti dimostrare che l'energia totale è proporzionale alla quarta potenza della temperatura, e che la frequenza cui corrisponde il massimo di energia radiante cresce proporzionalmente alla temperatura. La domanda che ci sta a cuore, comunque, è un'altra: qual è la forma esatta della funzione $u(\nu)$? È possibile, ol-

tre che «disegnarla» grazie ai dati sperimentali, determinarla per via teorica sulla base delle nostre conoscenze?
Per addentrarci in questa nuova avventura intellettuale, fissiamo qualche altro punto di partenza. Dai numerosi dati sperimentali raccolti nell'esame della radiazione di differenti tipi di forni emerge un'indicazione estremamente interessante: la forma della funzione $u(\nu)$ sembra essere del tutto insensibile alle particolari caratteristiche del forno in esame. Quale che sia la composizione delle pareti del forno, la maniera in cui è costruito o il modo in cui viene riscaldato, la distribuzione dell'energia al suo interno dipende esclusivamente dalla temperatura T. Insomma, l'espressione analitica della funzione di distribuzione dell'energia del corpo nero $u(\nu)$ è quella che si dice una *funzione universale* delle sole variabili ν e T. Come sospettavamo, la distribuzione di equilibrio della radiazione mostra di possedere delle proprietà molto generali. E c'è di più: considerazioni di carattere termodinamico portano a dimostrare che essa deve avere la seguente forma

$$u(\nu,T) = \nu^3 f(\nu/T)$$

ovvero, detto a parole, che il valore della funzione $u(\nu,T)$ corrispondente a particolari valori delle variabili ν e T dipende necessariamente dal cubo della frequenza per una funzione incognita del rapporto tra frequenza e temperatura. La dimostrazione di questo risultato è del tutto al di fuori della nostra portata: si tratta di uno di quei rari casi in cui ti chiediamo di crederci sulla parola. Da qui in poi, comunque, procederemo con le nostre gambe... o meglio, con le nostre teste.
Dunque, al lavoro. Dobbiamo mettere insieme tutte le nostre competenze per vedere se riusciamo a determinare la forma della sconosciuta funzione $f(\nu/T)$ che compare nell'espressione della $u(\nu,T)$, tenendo conto del fatto che le sue dimensioni sono fissate e che si tratta di una funzione universale.

Una conclusione catastrofica

Cominciamo allora la nostra caccia alla funzione misteriosa riflettendo sul significato del termine «funzione universale». Ti stai chiedendo perché mai questa riflessione semantica dovrebbe aiutarci per il nostro problema fisico? Legittima curiosità, che sarà subito soddisfatta: se la funzione $u(\nu,T)$ ha carattere universale, essa non potrà dipendere da nessuna grandezza particolare, e pertanto nella sua espressione potranno comparire, oltre alle variabili ν e T, solamente *costanti universali*.
«Potranno» o «dovranno»? Per potere, certamente possono, visto che sono universali; e, per dovere, certamente devono. Riesci a vedere perché?

Guardando l'espressione generale della $u(\nu,T)$, è facile accorgersi che, se non si aggiunge qualche altro ingrediente alla torta, essa non può avere le dimensioni giuste: non c'è infatti nessuna combinazione di frequenze e temperature che possa dare le dimensioni di una densità di energia diviso una frequenza. Bisogna perciò introdurre nella funzione $u(\nu,T)$ (o, equivalentemente, nella $f(\nu/T)$) qualche quantità dimensionale; in altre parole, dovrà comparire nel risultato finale qualche costante universale fisicamente significativa, dotata di dimensioni opportune.
Quali sono le costanti universali che abbiamo sotto mano? La lista è presto fatta, ma non ti priveremo del piacere di compilarla di persona. Quali costanti universali conosci?

Abbiamo G, la costante di gravitazione universale, che più universale di così non si può. Seguono, nella lista dei candidati, la costante di Boltzmann k e, in buon ordine, la velocità della luce nel vuoto c, e la carica elementare e. E qui ci fermiamo. Quale di queste quattro costanti potrà ragionevolmente intervenire nel problema, e concorrere dunque alla composizione della nostra funzione? Suggerimento: ci stiamo occupando di *termodinamica* della *radiazione*, ed è dunque del tutto sensato prendere in considerazione quei candidati che regolano fenomeni termodinamici o luminosi, scartando invece quelli che caratterizzano situazioni che non hanno nulla a che fare con la nostra. Sulla base di questo criterio, chi scegli tra G, k, c ed e?

Non c'è dubbio possibile. Il sistema di cui ci stiamo occupando non ha niente a che vedere con le forze gravitazionali (hai mai sentito parlare della *massa* della luce?) o con le cariche elettriche (abbiamo mai menzionato la *carica* di un'onda luminosa?), mentre è ovviamente sensibile alle proprietà della luce (non stiamo forse parlando proprio di *radiazione luminosa*?) e ha certamente a che fare con la termodinamica (stiamo infatti studiando rapporti tra energia della radiazione luminosa e temperatura). La scelta è dunque obbligata: nell'espressione della funzione di distribuzione della densità di energia del corpo nero potranno comparire la costante di Boltzmann k e la velocità della luce c, mentre non c'è posto per la costante di gravitazione G e la carica elementare e.
Gli ingredienti, a questo punto, ci sono tutti: a parte costanti numeriche adimensionali, la funzione $u(\nu,T)$ potrà contenere solamente la frequenza ν, la temperatura T, e le costanti dimensionali k e c. A te il compito, allora, di determinarne la forma cercando di costruire una combinazione di queste quattro quantità che abbia le dimensioni richieste: per ora ti diciamo che esiste *una sola* combinazione possibile.

Vediamo un po'. Ricordiamo che la funzione $u(\nu,T)$ ha come dimensioni

$$[u(\nu,T)] = M\,L^{-1}\,T^{-1}$$

Proviamo a scrivere la funzione $u(\nu,T)$ come una combinazione di potenze dei nostri quattro ingredienti

$$u(\nu,T) = k^{\alpha}\,c^{\beta}\,\nu^{\gamma}\,T^{\delta}$$

Ricordando le dimensioni di k, c, ν e T otteniamo allora

$$[u(\nu,T)] = (M\,L^2\,T^2\,\Theta^{-1})^{\alpha}\,(L\,T^{-1})^{\beta}\,(T^{-1})^{\gamma}\,\Theta^{\delta}$$

e si vede che la consistenza dimensionale richiede che sia $\alpha = \delta = 1$, $\beta = -3$ e $\gamma = 2$. Insomma, l'unica combinazione dimensionalmente accettabile dà per la funzione $u(\nu,T)$ la forma seguente (ovviamente a meno di fattori numerici adimensionali)

$$u(\nu,T) = \frac{\nu^2 kT}{c^3}$$

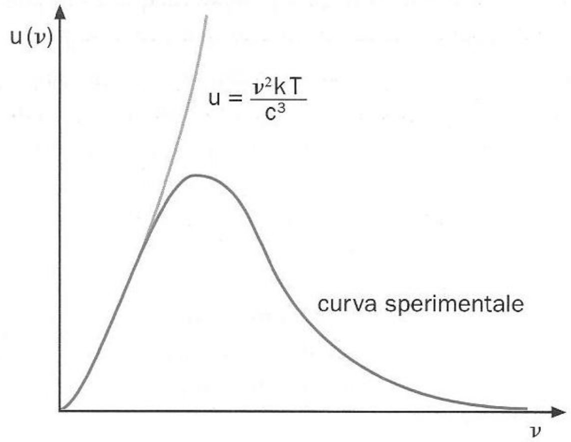
Nota che l'espressione appena ottenuta si può anche scrivere come

$$u(\nu,T) = \nu^3\,\frac{kT}{\nu c^3} = \nu^3 f(\nu/T)$$

e ha dunque la forma giusta richiesta dalla termodinamica.
Tutto bene, allora? Purtroppo, temiamo di no. Se in altre occasioni ci siamo mostrati per-

plessi di fronte a certi risultati, adesso siamo veramente costernati. Quest'ultimo risultato non ci piace, non ci piace proprio. Sei in grado di capire perché?

Tanto per cominciare, la funzione che abbiamo ottenuto non assomiglia neanche un po' a quella disegnata nei grafici sperimentali. La nostra $u(\nu,T)$ dipende, per un dato valore della temperatura, dal quadrato della frequenza, il che vuol dire che, rappresentata nel grafico, essa fornisce una bella parabola: le curve sperimentali, invece, hanno ben altro andamento. In effetti, esse sono ben descritte da una parabola nel primo tratto, quello corrispondente ai valori più bassi della frequenza, ma da un certo punto in poi se ne discostano visibilmente e, invece di continuare a crescere, raggiungono un massimo da cui cominciano a decadere verso lo zero in modo che assomiglia a quello di un esponenziale.



Al più, quindi, potremmo accettare la nostra $u(\nu,T)$ come una buona approssimazione del solo tratto iniziale della distribuzione. Ma quello che soprattutto ci angustia è che il nostro risultato, oltre a non riprodurre soddisfacentemente i dati sperimentali, è proprio assurdo da un punto di vista fisico. Infatti esso ci dice che, qualunque sia il valore della temperatura, l'energia totale contenuta nella cavità è infinita (basta pensare a cosa diventa, per una parabola, l'area compresa tra la curva e l'asse delle ascisse).
Catastrofe! E, in effetti, il termine *catastrofe ultravioletta* fu coniato dai fisici all'inizio del Novecento per indicare questo paradossale risultato. Si capisce perché «ultravioletta»: le radiazioni responsabili della catastrofe, cioè dell'assurda crescita dell'energia totale verso un valore infinito, sono quelle di alta frequenza, corrispondenti appunto a lunghezze d'onda ancora più piccole di quella del colore violetto.
Che possibilità abbiamo di tirarci fuori dal guaio in cui ci siamo cacciati? A noi pare che esistano le seguenti tre alternative:

a. i dati sperimentali sono tutti sbagliati;
b. per la radiazione non sono validi i princìpi generali della termodinamica;
c. nella nostra «confezione» della funzione $u(\nu,T)$ manca qualche ingrediente.

Non possiamo, però, prendere in seria considerazione l'alternativa **a**, anche perché, oltre a fare in questo modo un grave oltraggio all'abilità dei fisici sperimentali, non risolveremmo comunque il problema dell'energia infinita prevista dalla nostra formula. Quanto alla possibilità **b**, non ci sentiamo francamente di ricorrervi se non in ultimissima istanza: troppi buoni servizi ha reso la termodinamica, e troppo generali sono i suoi risultati, per disfarsene senza tentare altre direzioni. Non ci resta allora che l'alternativa **c**. Essa però ci conduce dritti dritti a una conclusione di un certo peso: se per costruire un'espressione soddisfacente della funzione $u(\nu,T)$ abbiamo bisogno di un altro ingrediente, esso non può che essere, a causa delle caratteristiche di universalità che la funzione di distribuzione possiede, *una nuova costante universale* di cui fino a questo punto avevamo ignorato l'esistenza.

Alla ricerca dell'acca perduta

Partiamo dunque alla ricerca di una forma soddisfacente della funzione $u(\nu,T)$, sapendo che nella sua espressione dovrà comparire una nuova costante dimensionale. Ci faremo guidare in questa avventura, oltre che dalle tecniche dell'analisi dimensionale, dall'aspetto qualitativo che la sconosciuta funzione deve possedere, quale ci è suggerito dai dati empirici. Dall'esame dei grafici sperimentali possiamo ricavare le seguenti utili indicazioni:

a. per piccoli valori della frequenza (la parte di sinistra della curva) la funzione cercata assomiglia molto a una parabola. Questo vuol dire che la «vera» $u(\nu,T)$ deve essere approssimabile, per piccole ν, dalla funzione che abbiamo già individuato, cioè che deve essere

$$u(\nu,T) \cong \frac{\nu^2 kT}{c^3} \qquad \text{per } \nu \to 0$$

Ricordando che deve comunque essere

$$u(\nu,T) = \nu^3 f(\nu/T)$$

questo equivale a dire che si deve avere

$$f(\nu/T) \cong \frac{kT}{\nu c^3} \qquad \text{per } \nu \to 0$$

b. per grandi valori della frequenza («coda» di destra della curva) la funzione decade a zero in modo simile a quello di un esponenziale. Questo suggerisce che la «vera» $u(\nu,T)$ deve potersi approssimare, per grandi ν, con una funzione del tipo

$$u(\nu,T) \propto e^{-x}$$

dove x dovrà essere una combinazione adimensionale delle grandezze in gioco (è un esponente!). Possiamo dire di più: tenendo presente la forma generale della $u(\nu,T)$ richiesta dalla termodinamica, e il fatto che la funzione esponenziale è essa stessa priva di dimensioni, si vede che per alte frequenze la funzione che stiamo cercando deve ridursi alla forma

$$u(\nu,T) \cong (\nu^3 B)\, e^{-x}$$

dove B è una costante dimensionale e x è una funzione adimensionale del rapporto ν/T. Le dimensioni di B devono essere tali da rendere il prodotto $\nu^3 B$ dimensionalmente uguale alla $u(\nu,T)$. Ti lasciamo il facile compito di provare che le dimensioni di B sono allora quelle di una (energia) · (lunghezza)$^{-3}$ · (tempo)^4. Dato che B è una costante al momento ancora indeterminata, nulla ci impedisce di scriverla come A/c^3, dove c è la velocità della luce, e A è una nuova costante le cui dimensioni sono ovviamente

$$[A] = [B]/[\nu^3] = [\text{energia}] \cdot [\text{tempo}]$$

cioè quelle della grandezza che a suo tempo (cioè nei *Complementi* della sesta unità) abbiamo battezzato «azione». In definitiva, possiamo dire che per grandi frequenze la funzione $u(\nu,T)$ deve potersi approssimare con l'espressione

$$u(\nu,T) \cong \frac{\nu^3 A}{c^3} \cdot e^{-x}$$

dove A è una costante con le dimensioni di una azione e x è una funzione, ancora da determinare, del rapporto ν/T.
Ricordando allora che $u(\nu,T) = \nu^3 f(\nu/T)$ si può quindi concludere che $f(\nu/T)$ deve essere del tipo

$$f(\nu/T) = \frac{A}{c^3} g(x)$$

dove $g(x)$ è una funzione adimensionale del rapporto ν/T che deve ridursi, per grandi valori di ν, alla forma e^{-x}. Inoltre, dato che alle basse frequenze deve essere

$$f(\nu/T) \cong \frac{kT}{\nu c^3}$$

la $g(x)$ deve ridursi alla forma approssimata

$$g(x) \cong \frac{kT}{A\nu} \qquad \text{per } \nu \to 0$$

Cominciamo a vedere qualcosa. Abbiamo, intanto, le espressioni approssimate della $f(\nu/T)$ per le basse e le alte frequenze; vediamo che nell'approssimazione valida per le alte frequenze compare una nuova costante con le dimensioni di un'azione; e verifichiamo anche che la nuova costante «sparisce» dalla formula quando scriviamo l'espressione approssimata per l'altra estremità dello spettro, in cui rimane valido il nostro vecchio risultato.
Chiediamoci ora come può essere fatta l'incognita x, argomento adimensionale della funzione $g(x)$. Sappiamo che deve contenere il rapporto ν/T. Per ragioni dimensionali, la temperatura T deve andare in compagnia della costante di Boltzmann k, dato che solo in questo modo si può fare scomparire l'indesiderata dimensione «temperatura» dall'espressione; deve essere perciò $x \propto \nu/kT$. Per rendere adimensionale la x manca allora al numeratore una costante che abbia le dimensioni giuste, quelle di un'energia diviso una frequenza, ovvero di un'energia per un tempo. Singolare e fortunata coincidenza! Una costante siffatta l'abbiamo per l'appunto appena «inventata» per esprimere la forma generale della $f(\nu/T)$: si tratta naturalmente della costante A, che ha proprio le dimensioni di un'energia per un tempo, cioè di un'azione (è qui che si vede quanto siamo stati astuti a trasformare l'originale costante B nella forma A/c^3). È allora del tutto ragionevole supporre, visto che ci serve una costante con le dimensioni di un'azione per mettere a posto le cose nell'espressione della x, che questa costante sia proprio la nostra A. Proviamo dunque a porre

$$x = \frac{A\nu}{kT}$$

Ora che abbiamo un'idea sulla forma della x, l'ultimo passo dell'operazione di montaggio consiste nel costruire l'espressione completa della $f(\nu/T)$ raccordando opportunamente le sue due estremità; cosa che si può fare facilmente, con un minimo di inventiva da matematici, se si scrive la $f(\nu/T)$ in questo modo

$$f(\nu/T) = \frac{A}{c^3} \cdot \frac{1}{e^x - 1}$$

Basta infatti ricordare le proprietà fondamentali della funzione esponenziale per verificare che l'espressione appena scritta si riduce alle approssimazioni che conosciamo nei due casi di grandi ν e di piccole ν (cioè di grandi x e di piccole x). Per grandi x, ovviamente, si può trascurare il termine -1 nel denominatore, mentre per piccole x, come sappiamo, vale l'approssimazione

$$e^x \cong 1 + x$$

A te allora il compito di verificare la bontà della nostra nuova formula nei due casi limite.

Semplice. Alle alte frequenze infatti si ottiene

$$f(\nu/T) \cong \frac{A}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{A\nu/kT}} = \frac{A}{c^3}\, e^{-A\nu/kT}$$

e quindi

$$u(\nu,T) \cong \frac{\nu^3 A}{c^3}\, e^{-A\nu/kT}$$

cioè proprio il tipo di decremento esponenziale che cercavamo, come richiesto dai dati sperimentali.

E per basse frequenze si ha

$$f(\nu/T) \cong \frac{A}{c^3} \cdot \frac{1}{1 + A\nu/kT - 1} = \frac{A}{c^3} \cdot \frac{kT}{A\nu} = \frac{kT}{\nu c^3}$$

e si riottiene così la vecchia espressione della $u(\nu,T)$

$$u(\nu,T) = \frac{\nu^2 kT}{c^3}$$

Possiamo allora scrivere la forma generale della nuova $u(\nu,T)$, valida per tutte le frequenze

$$u(\nu,T) = \frac{A\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{A\nu/kT} - 1}$$

e sentirci rassicurati dal fatto che un confronto dei valori previsti da questa espressione con i dati sperimentali mostra che essa riproduce correttamente l'andamento dello spettro del corpo nero non soltanto alle due estremità (il che è ovvio, perché è proprio così che l'abbiamo costruita), ma anche in tutta la parte intermedia della curva. Questo, naturalmente, a patto di assegnare un ben preciso valore alla nuova protagonista della vicenda, la costante A che si è decisa a emergere dall'anonimato dopo essersi così ben nascosta alle basse frequenze. Diciamo subito che l'accordo dei dati sperimentali con la nostra formula è eccellente se si assegna alla costante A il valore di $6{,}6 \cdot 10^{-34}$... cosa?

Certo, la nuova costante si misura in J · s, dato che ha le dimensioni di un'azione, che come sappiamo ha a sua volta le dimensioni di un'energia per un tempo. Ed è anche giunta l'ora di battezzare A con un nome definitivo, visto che avremo ancora a lungo a che fare con essa; ti comunichiamo dunque che la nuova costante fondamentale A è universalmente nota con il nome di **costante di Planck**, e che viene indicata nella letteratura scientifica con il simbolo h. Max Planck è, come avrai immaginato, il fisico tedesco che ha introdotto la costante h, proprio nello studio dello spettro del corpo nero, nel 1900.

Tanto per non contravvenire a una nostra antica abitudine, ecco alcune pignolerie prima di chiudere l'argomento. Come ben sai, i risultati che si ottengono grazie all'uso dell'analisi dimensionale sono certamente corretti a meno di fattori numerici. Per amore di precisione, ti comunichiamo dunque che l'espressione definitiva della funzione di distribuzione dell'energia del corpo nero, con tutti i fattori numerici al posto giusto, è

$$u(\nu,T) = \frac{8\pi\nu^3 h}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

E già che stiamo facendo i pignoli, eccoti anche il valore esatto della costante di Planck

$$h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$$

Piccola piccola, per la verità. Però anche, non dimenticarlo, universale. La sua estrema piccolezza ci fa capire perché finora non ne avessimo sospettato l'esistenza; ma ora che l'abbiamo scoperta, siamo autorizzati a immaginare che essa giochi un ruolo importante in altri processi fisici del mondo microscopico. Se così non fosse, che razza di costante universale sarebbe?

Domande di verifica

1 Osservando differenti grafici della $u(\nu,T)$ corrispondenti a diverse temperature, si nota che il tratto della curva approssimabile con una parabola corrisponde a un maggior intervallo di frequenze all'aumentare della temperatura. Giustifica questo fatto a partire dall'espressione esatta della formula di Planck.