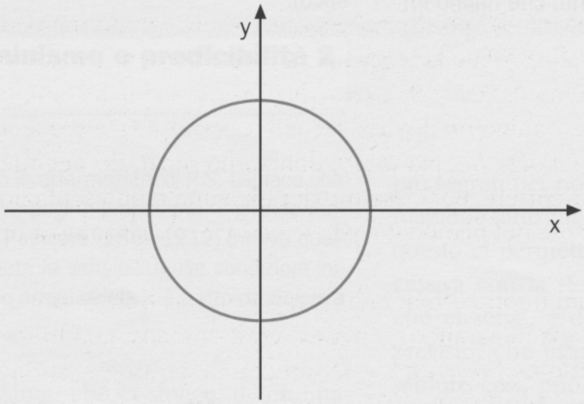
LO SPAZIO DELLE FASI

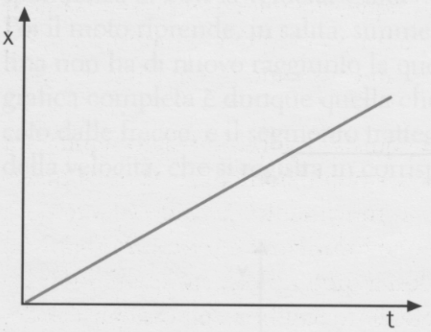
Lungo tutto il corso del volume abbiamo utilizzato in varie occasioni, per illustrare le proprietà dei diversi tipi di moto, rappresentazioni grafiche.
In alcuni casi ci siamo limitati a riprodurre la traiettoria del punto materiale di cui studiavamo il moto; in modo del tutto naturale, allora, qualunque movimento unidimensionale diventava un tratto di linea retta su un asse orientato, e un moto in due dimensioni si trasformava in una particolare curva in un opportuno piano cartesiano in cui sui due assi si riportavano le due coordinate spaziali.
Questi sono i casi in cui la rappresentazione grafica acquista il più immediato significato intuitivo: la curva che si disegna sulla carta è proprio la riproduzione in scala della traiettoria effettivamente disegnata nello spazio dal punto in movimento. È facile vedere però che si tratta al tempo stesso di una rappresentazione che fornisce ben poca informazione sulle proprietà del moto. Basta pensare che, limitandosi a moti unidimensionali, lo stesso segmento può rappresentare indifferentemente il moto di una pallina che rimbalza elasticamente tra due pareti, muovendosi tra ogni urto di moto rettilineo uniforme, o l'oscillazione di una massa attaccata a una molla. Sapresti per esempio dire senza possibilità di errore che tipo di moto è descritto dal grafico seguente?

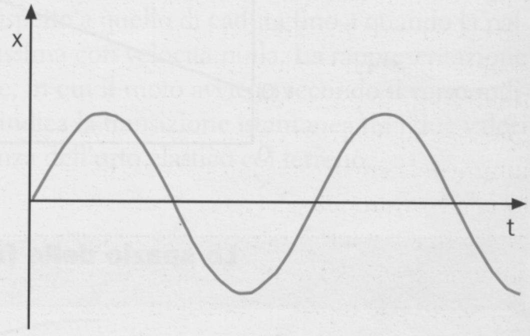


Speriamo che tu non abbia dato una risposta troppo affrettata. Tutto quello che siamo autorizzati a concludere dal grafico è che si tratta di un moto che si svolge su una traiettoria circolare; niente però ci permette di capire se si tratta di un moto circolare uniforme, come quello di un bambino sulla piattaforma di una giostra, oppure di un moto come quello di una pallina attaccata a un filo che viene fatta ruotare in un piano verticale, di cui abbiamo analizzato alcune proprietà nelle unità precedenti. Insomma, la rappresentazione grafica diretta della traiettoria è tanto facile da capire quanto scarsamente efficace da utilizzare.

Ci sono grafici e grafici

Più utili si sono rivelati altri modi di visualizzare le proprietà del moto; stiamo parlando, naturalmente, di tutti quei casi in cui abbiamo rappresentato la variazione nel tempo di una delle grandezze caratteristiche del movimento analizzato. Abbiamo così disegnato l'andamento in funzione del tempo delle coordinate del punto materiale, o delle componenti della sua velocità, o dell'accelerazione, ecc.; abbiamo insomma rappresentato graficamente le leggi orarie del moto. In questo caso, gli equivoci legati alle differenti interpretazioni possibili delle medesime traiettorie scompaiono: la legge oraria di un moto rettilineo uniforme è ben diversa da quella di un moto oscillatorio, e le due sono perfettamente riconoscibili dalle rispettive rappresentazioni grafiche.





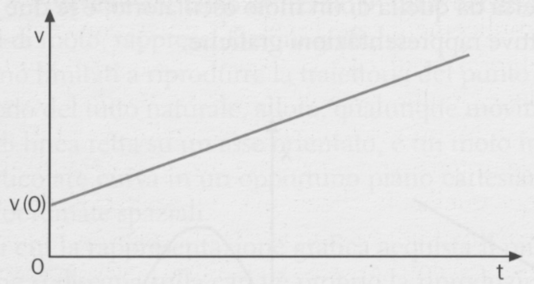
Certo, quello che si guadagna in informazione si perde in intuizione immediata; ora la forma della curva disegnata sul grafico non ha più nulla a che vedere con le proprietà geometriche della traiettoria del punto nello spazio. Inoltre, tutto il gioco si fa più laborioso: per rappresentare graficamente la legge oraria di un moto unidimensionale abbiamo bisogno di un grafico bidimensionale (è il caso degli esempi appena fatti, in cui per descrivere un moto lungo l'asse x abbiamo dovuto usare due assi, x e t), e per analizzare un moto bidimensionale, che si svolge nel piano x-y, dobbiamo separarlo nei due moti componenti, lungo x e lungo y, e ricorrere, per ciascuno di essi, a una rappresentazione in un piano cartesiano, rispettivamente nel piano x-t e y-t... e così via, se passiamo a un moto nello spazio a tre dimensioni.
Queste complicazioni ti sono ormai familiari; possiamo allora permetterci il lusso di introdurre una terminologia di carattere generale, certi che non sarà fonte di equivoci. Abbiamo visto che possiamo rappresentare graficamente le proprietà del moto riportando sugli assi di un piano cartesiano due qualsiasi grandezze che lo descrivono e che sono legate tra loro: per esempio, le coordinate x e y per descrivere una traiettoria in due dimensioni, o le variabili x e t per riprodurre la legge oraria di un moto unidimensionale, o ancora v e t per studiare la variazione nel tempo di una velocità. Useremo allora in modo del tutto generale la parola «spazio» per indicare l'insieme delle variabili che abbiamo scelto per descrivere graficamente il moto; diremo, per esempio, nel caso del grafico che dà la legge oraria di un moto oscillatorio, che abbiamo rappresentato il moto nello spazio t-x, usando d'ora in poi la convenzione di indicare per prima la variabile che compare sulle ascisse.

È chiaro che ora il termine «spazio» acquista un significato astratto, non più necessariamente legato allo spazio ordinario, quello per capirsi in cui si definiscono lunghezze, larghezze e altezze. È comunque un significato facile da afferrare, e ti proponiamo subito alcuni semplici esercizi per familiarizzarti con questa nuova idea. Come rappresenteresti, dunque, nello spazio *t-v*, le proprietà del moto di una pallina che cade lungo la verticale?

Si tratta di disegnare, in un piano cartesiano in cui riportiamo in ascisse il tempo e in ordinate la velocità, la relazione che esprime la variazione della velocità in funzione del tempo in un moto uniformemente accelerato, che sappiamo essere una retta del tipo

$$v(t) = v(0) + at$$

Si ottiene dunque il grafico familiare



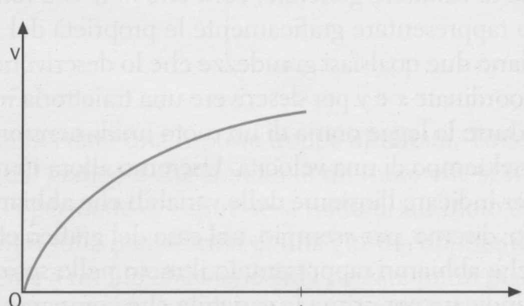
Lo spazio delle fasi

Ma possiamo sbizzarrirci molto di più. Che cosa ci impedisce di rappresentare le proprietà dello stesso moto nello spazio *x-v*, intendendo con *x* il valore della coordinata spaziale lungo un asse verticale? Proprio nulla; anzi, ti chiediamo di farlo.

Anche questo compito può essere svolto senza particolari difficoltà. Se indichiamo con *x* la distanza percorsa a partire dall'istante iniziale, l'equazione del moto si scrive immediatamente (basta usare la conservazione dell'energia)

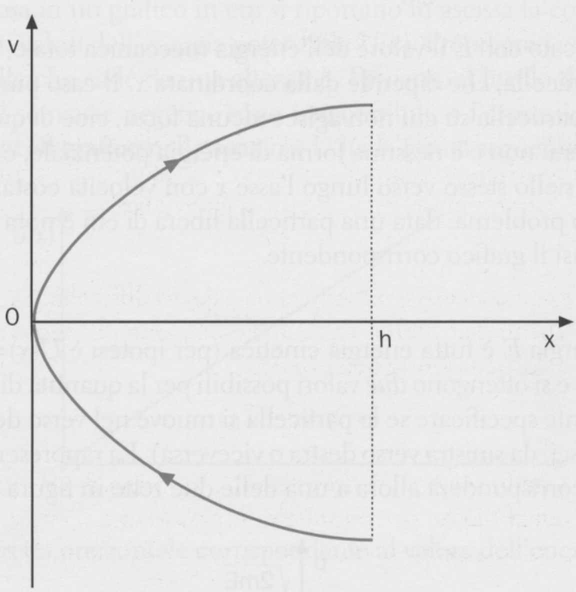
$$v^2 = v_0^2 + 2gx$$

e si può «trascrivere» nello spazio *x-v*, dove assume la forma di una parabola; si ottiene il grafico seguente, in cui abbiamo per semplicità supposto che sia $v_0=0$, che cioè la pallina venga lasciata cadere da una certa altezza con velocità iniziale nulla.



Se facciamo la convenzione di porre l'origine dell'asse x nella posizione iniziale della pallina, di orientare l'asse verso il basso, e di indicare con h la distanza da terra della posizione iniziale, la curva si arresta ovviamente quando $x=h$.
Supponiamo ora che la pallina rimbalzi sul terreno in modo perfettamente elastico, e che non ci sia attrito di alcun tipo, in modo che essa continua ad andare su e giù descrivendo il moto reversibile caratteristico, come ben sai, delle situazioni in cui agiscono solo forze conservative. Sapresti tracciare il grafico completo di questo moto nello spazio x-v?

Tutto il moto si svolgerà nel tratto dell'asse x compreso tra $x=0$, corrispondente al punto più alto, e $x=h$, corrispondente al livello del suolo. La velocità varierà, in corrispondenza, da un valore minimo $v(0)=0$ a un valore massimo $v(h)=\sqrt{2gh}$. Abbiamo anche ammesso implicitamente di considerare positive le velocità dirette verso il basso, come si vede facilmente dal grafico. Cosa succede allora quando la pallina, raggiunto il suolo, rimbalza elasticamente? Succede semplicemente che la velocità rimane invariata in modulo ma cambia verso: e questo significa che nel grafico si verifica una discontinuità, per cui in corrispondenza di $x=h$ la velocità «salta» dal valore positivo $\sqrt{2gh}$ al valore negativo $-\sqrt{2gh}$.
Poi il moto riprende, in salita, simmetrico rispetto a quello di caduta fino a quando la pallina non ha di nuovo raggiunto la quota massima con velocità nulla. La rappresentazione grafica completa è dunque quella che segue, in cui il moto avviene secondo il verso indicato dalle frecce, e il segmento tratteggiato indica la transizione istantanea tra i due valori della velocità, che si registra in corrispondenza dell'urto elastico col terreno.



Lo spazio che abbiamo appena introdotto ha un'interessante caratteristica. Fissare un punto nel piano x-v significa determinare simultaneamente i valori della posizione e della velocità, cioè individuare lo stato del sistema (sistema che, nel nostro caso, si riduce a un punto materiale di cui conosciamo la massa). Ma sappiamo che al valore della velocità è legato il valore dell'energia cinetica, mentre al valore della coordinata è legato il valore dell'energia potenziale. La rappresentazione nello spazio x-v si presta dunque molto bene a fornire una lettura grafica delle proprietà del moto in termini energetici.
Nella letteratura scientifica si preferisce usare, come coordinata legata al valore dell'ener-

gia cinetica, la quantità di moto $\vec{p}$ al posto della velocità $\vec{v}$; in questo caso, come è facile vedere ricordando che è $\vec{p}=m\vec{v}$, l'espressione dell'energia cinetica diventa, con una immediata sostituzione, $E_C = p^2/2m$. Le ragioni per cui si adotta questa convenzione sono legate a questioni piuttosto sottili che al momento non ci interessa discutere. Noi ci adegueremo semplicemente ad essa, visto che comunque non ne deriva alcuna complicazione concettuale: per passare dalla velocità alla quantità di moto, tutto quello che bisogna fare è moltiplicare per la massa.

Introduciamo dunque, come ulteriore possibilità per la rappresentazione grafica del moto, lo spazio x-p. Prima di passare ad alcuni esempi che illustrano l'utilità di questo strumento, procediamo alle presentazioni formali: quello che abbiamo appena introdotto si chiama **spazio delle fasi**, ed è, lo ripetiamo, uno spazio bidimensionale, associato a un moto unidimensionale, in cui le coordinate sono date dalla posizione e dalla quantità di moto del punto mobile.

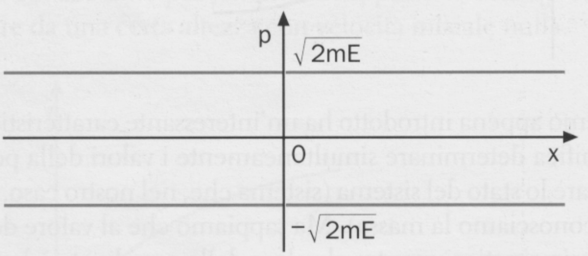
Conservazione dell'energia e spazio delle fasi

Consideriamo una particella che si muove lungo una retta; il moto è unidimensionale e può essere rappresentato nello spazio delle fasi x-p. Limitiamoci per ora ai casi a noi noti in cui sulla particella agiscono solo forze conservative, cioè a quelle situazioni in cui l'energia meccanica della particella è costante. Sarà allora valida in generale la relazione

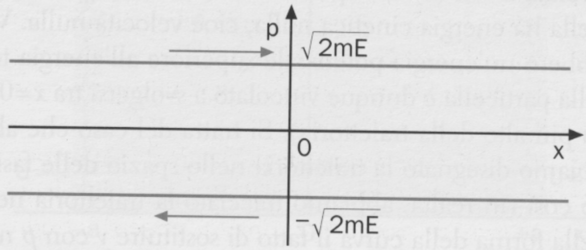
$$\frac{p^2}{2m} + U(x) = E = \text{costante}$$

in cui abbiamo indicato con E il valore dell'energia meccanica totale, e con $U(x)$ l'energia potenziale della particella, che dipende dalla coordinata x. Il caso più semplice da analizzare è quello della particella su cui non agisce alcuna forza, cioè di quella che viene chiamata **particella libera**: non c'è nessuna forma di energia potenziale, e la particella si muove indefinitamente nello stesso verso lungo l'asse x con velocità costante. Ecco allora per te un primo piccolo problema: data una particella libera di cui è nota l'energia E, disegna nello spazio delle fasi il grafico corrispondente.

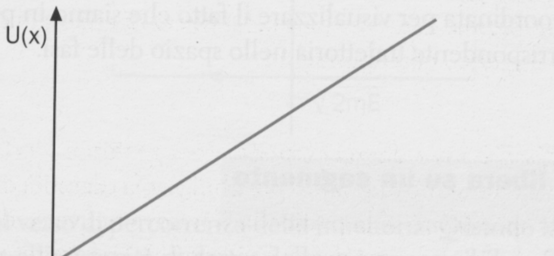
In questo caso l'energia E è tutta energia cinetica (per ipotesi è $U(x)$=0 dovunque); si ha pertanto $p^2/2m = E$, e si ottengono *due* valori possibili per la quantità di moto, $p = \pm\sqrt{2mE}$. Bisogna ulteriormente specificare se la particella si muove nel verso delle x crescenti o decrescenti (se preferisci, da sinistra verso destra o viceversa). La rappresentazione grafica nello spazio delle fasi corrisponderà allora a una delle due rette in figura.



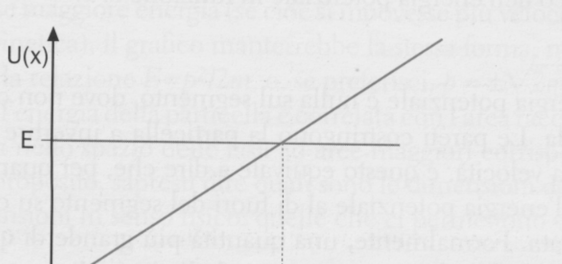
La retta superiore corrisponde a una quantità di moto (cioè a una velocità) costante e positiva, e rappresenta quindi un moto che si svolge nel verso delle x crescenti, mentre a quella inferiore è associata una velocità uguale in modulo ma negativa, diretta cioè in modo da percorrere l'asse x in verso opposto. Alle due rette si può dunque associare una freccia, che indica il verso in cui è percorsa la retta che nello spazio delle fasi rappresenta il moto.



Si usa anche parlare, con terminologia suggestiva e di pronta comprensione, di **traiettoria nello spazio delle fasi**: dovrebbe esserti chiaro che la «traiettoria» di cui si parla indica il modo in cui si sposta, durante il moto, il punto rappresentativo dello stato della particella nello spazio delle fasi, e non ha in generale niente a che vedere con la traiettoria che essa effettivamente descrive nello spazio reale.
Più interessanti sono quei casi in cui le forze che agiscono sulla particella limitano le sue possibilità di movimento, confinandola su un tratto ben definito dell'asse x. Questo avviene quando l'energia potenziale cresce al crescere della coordinata x in modo tale che, per quanto elevata sia l'energia totale della particella, esiste comunque una posizione che non può essere superata perché al di là di essa l'energia potenziale assumerebbe valori maggiori di quello dell'energia totale (per trovarsi in quello stato la particella dovrebbe avere allora un'energia cinetica negativa, il che è manifestamente impossibile).
È facile vedere la cosa in un grafico in cui si riportano in ascissa la coordinata x e in ordinata i corrispondenti valori dell'energia potenziale $U(x)$. Prendiamo come primo esempio il caso della particella che cade da una altezza h. Poniamo il livello del terreno a $x=0$; allora tutti i punti del semiasse negativo sono inaccessibili, e l'espressione dell'energia potenziale è $U(x) = mgx$. Il grafico nello spazio x-U ha la forma seguente.



Tracciamo ora una retta orizzontale corrispondente al valore dell'energia totale E.



Si vede che per qualunque valore di x minore di x_m l'energia potenziale è più piccola dell'energia totale della particella, che dunque in quel punto si muove con un'energia cinetica pari alla differenza $E - U(x)$. Nel punto di coordinata x_m l'energia è tutta energia potenziale: la particella ha energia cinetica nulla, cioè velocità nulla. Valori di x maggiori di x_m comporterebbero un'energia potenziale superiore all'energia totale, il che è impossibile. Il moto della particella è dunque vincolato a svolgersi tra x=0 (il livello del suolo) e x=x_m (il punto più alto della traiettoria). Si tratta del caso che abbiamo analizzato poco fa, e di cui abbiamo disegnato la traiettoria nello spazio delle fasi, anche se ancora non lo chiamavamo così (in realtà, abbiamo tracciato la traiettoria nello spazio x-v, ma dal punto di vista della forma della curva il fatto di sostituire v con p non cambia assolutamente niente).

Queste situazioni dinamiche corrispondono a quelli che si chiamano **stati legati**. È una terminologia che già abbiamo introdotto per indicare i moti che si svolgono su orbite chiuse, e che nel caso di moti unidimensionali risulta ancora più intuitiva: si vuol dire che la particella sta effettuando un moto in cui è vincolata, *legata* a rimanere su un tratto definito dell'asse x. Si dice anche, in modo ancora più suggestivo e altrettanto immediato, che la particella si trova in una **buca di potenziale**, intendendo con ciò che il valore della sua energia totale costringe la particella a rimanere all'interno di una zona limitata, al di fuori della quale l'energia potenziale assumerebbe valori proibiti.

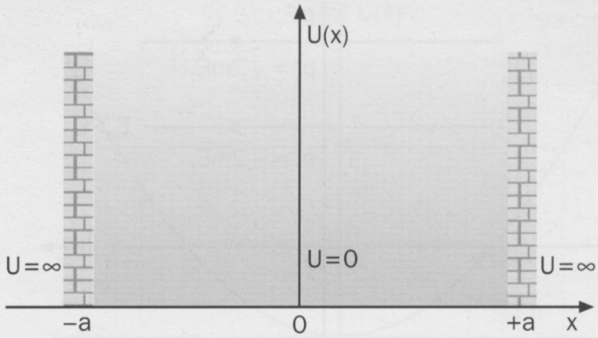
Conosci altri casi di stati legati relativi a moti unidimensionali, oltre a quello della pallina che rimbalza elasticamente sul terreno?

Non sappiamo cosa ti sia venuto in mente. Noi abbiamo presenti due situazioni particolari, che ora vorremmo discutere utilizzando gli strumenti e le idee che abbiamo appena messo a punto: si tratta del caso di una particella che rimbalza elasticamente tra due pareti, senza essere soggetta ad altre forze, e dell'oscillazione armonica di una particella su cui agisce una forza elastica. Per entrambe le situazioni, tracceremo il grafico dell'energia potenziale in funzione della coordinata per visualizzare il fatto che siamo in presenza di stati legati, e studieremo la corrispondente traiettoria nello spazio delle fasi.

La particella libera su un segmento

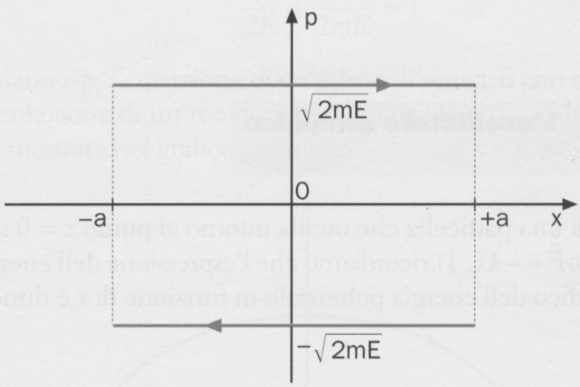
Immaginiamo una particella di massa m libera di muoversi orizzontalmente tra due pareti contro cui rimbalza elasticamente. Poniamo l'origine dell'asse x nel punto di mezzo del segmento percorso dalla particella; nei punti $x = -a$ e $x = +a$ si trovano le due pareti. Come sarà fatto il grafico dell'energia potenziale in funzione di x?

Naturalmente, l'energia potenziale è nulla sul segmento, dove non ci sono forze che agiscono sulla particella. Le pareti costringono la particella a invertire il moto a ogni urto, qualunque sia la sua velocità, e questo equivale a dire che, per quanto grande sia l'energia della particella, l'energia potenziale al di fuori del segmento su cui essa è vincolata è comunque più elevata. Formalmente, una quantità più grande di qualunque grandezza finita è infinita: non c'è che dire, è proprio una bella buca di potenziale! Il grafico è allora il seguente.

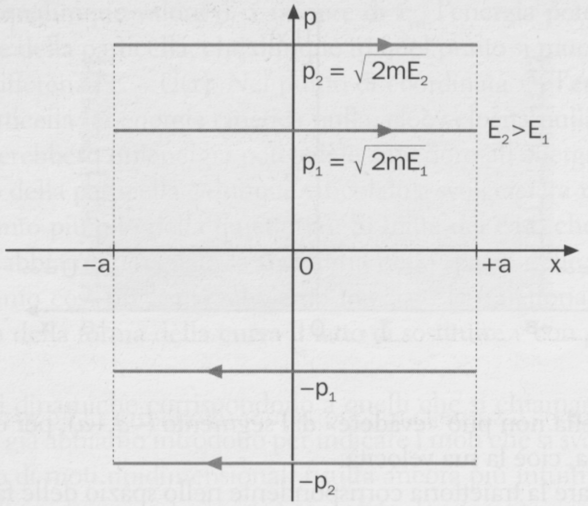


Si vede che la particella non può «evadere» dal segmento $(-a,+a)$, per quanto elevata sia la sua energia cinetica, cioè la sua velocità.
Riesci allora a disegnare la traiettoria corrispondente nello spazio delle fasi?

Il grafico che si ottiene è simile a quello della particella libera, limitato però al segmento $(-a,+a)$.



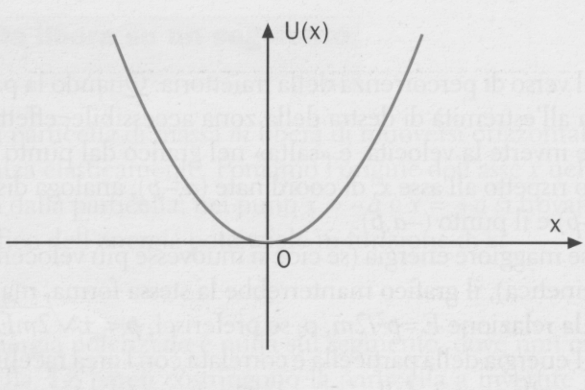
Le frecce indicano il verso di percorrenza della traiettoria. Quando la particella, con quantità di moto p, arriva all'estremità di destra della zona accessibile, effettua un urto elastico con la parete che ne inverte la velocità, e «salta» nel grafico dal punto di coordinate (a,p) a quello, simmetrico rispetto all'asse x, di coordinate $(a,-p)$; analoga discontinuità si verifica tra il punto $(-a,-p)$ e il punto $(-a,p)$.
Se la particella avesse maggiore energia (se cioè si muovesse più velocemente, dato che tutta la sua energia è cinetica), il grafico manterrebbe la stessa forma, ma con un valore di p più alto: infatti vale la relazione $E=p^2/2m$, o, se preferisci, $p = \pm\sqrt{2mE}$.
Si vede dunque che l'energia della particella è correlata con l'area racchiusa dalla sua traiettoria rappresentativa nello spazio delle fasi: ad aree maggiori corrispondono maggiori valori dell'energia. A proposito, sapresti dire quali sono le dimensioni dell'area in questione? Intendiamo le dimensioni in senso fisico, quelle che ci permettono di stabilire le unità di misura di quell'area.



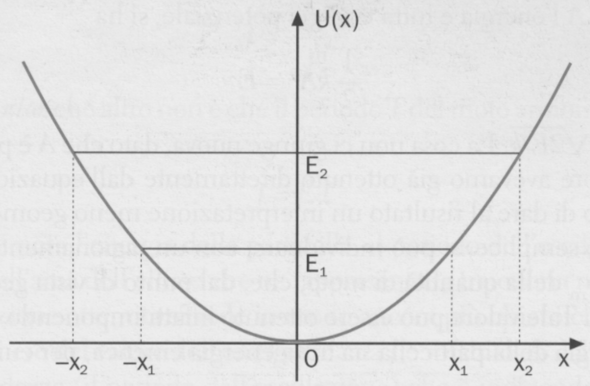
È chiaro dal grafico che le dimensioni dell'area sono quelle di una lunghezza per una quantità di moto, cioè una lunghezza per una massa per una velocità. Useremo, per indicare un'area nello spazio delle fasi, la notazione simbolica J; per la particella sul segmento il suo valore è, semplicemente, $J = 4ap$, numero che sarà quindi espresso, nelle nostre unità abituali, in kg $\times$ m^2 s^{-1}.

L'oscillatore armonico

E veniamo al caso di una particella che oscilla intorno al punto $x = 0$ sotto l'azione di una forza elastica del tipo $\vec{F} = -k\vec{x}$. Ti ricordiamo che l'espressione dell'energia potenziale è ora $U(x) = 1/2kx^2$. Il grafico dell'energia potenziale in funzione di x è dunque una parabola.



È facile vedere che, comunque si fissi il valore dell'energia totale E, la particella è costretta a muoversi su un segmento limitato dell'asse x, simmetrico rispetto al centro dell'oscillazione: se si fa crescere E, aumenta l'ampiezza dell'oscillazione, ma si rimane sempre in uno stato legato.



Riesci a vedere che forma assume la traiettoria rappresentativa nello spazio delle fasi?

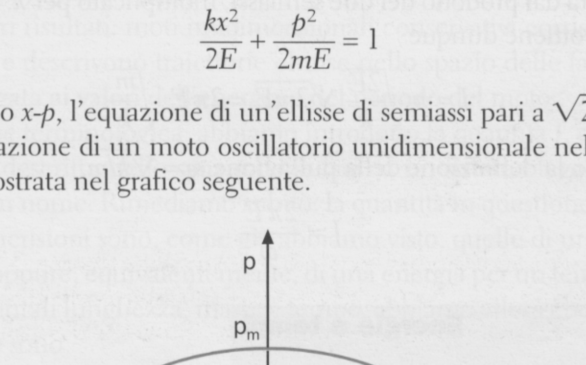
Rispondere a questa domanda era un po' meno immediato, vero? Eppure non si tratta di un problema complicato. La conservazione dell'energia si scrive in questo caso

$$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{p^2}{2m} = E$$

Dividendo per E si ottiene

$$\frac{kx^2}{2E} + \frac{p^2}{2mE} = 1$$

e questa è, nel piano *x-p*, l'equazione di un'ellisse di semiassi pari a $\sqrt{2E/k}$ e $\sqrt{2mE}$. Pertanto la rappresentazione di un moto oscillatorio unidimensionale nello spazio delle fasi prende la forma mostrata nel grafico seguente.



È facile vedere che anche in questo caso il verso di percorrenza della traiettoria è quello orario: quando la particella ha velocità positiva e si trova sul semiasse positivo, continua ad allontanarsi dal centro dell'oscillazione mentre la sua velocità diminuisce, fino ad arrivare nell'estremo A, dove la velocità è nulla e quindi l'energia è tutta potenziale; a questo punto inverte il moto (la velocità diventa dunque negativa) fino a raggiungere l'altro estremo –A, ecc. A proposito, ti proponiamo un facile quesito: che relazione c'è tra l'ampiezza dell'oscillazione A e il valore dell'energia totale E?

Siccome nel punto A l'energia è tutta energia potenziale, si ha

$$\frac{1}{2}kA^2 = E$$

da cui si ricava $A = \sqrt{2E/k}$. La cosa non ci giunge nuova, dato che A è proprio uno dei due semiassi, il cui valore avevamo già ottenuto direttamente dall'equazione dell'ellisse: ora però siamo in grado di dare al risultato un'interpretazione meno geometrica e più fisica.
In modo altrettanto semplice, si può individuare, con un ragionamento più di tipo fisico, il valore massimo p_{m} della quantità di moto, che, dal punto di vista geometrico, coincide con l'altro semiasse. Tale valore può essere ottenuto infatti imponendo che nel centro dell'oscillazione l'energia della particella sia tutta energia cinetica, per cui si ha

$$\frac{p_{\mathrm{m}}^2}{2m} = E$$

e quindi $p_{\mathrm{m}} = \sqrt{2mE}$.
Anche per l'oscillatore armonico, come per la particella sul segmento, a un aumento dell'energia totale corrisponde un maggior valore dell'area racchiusa dalla traiettoria rappresentativa nello spazio delle fasi: se cresce E, infatti, aumentano entrambi i semiassi dell'ellisse. L'area in questione ha ovviamente le stesse dimensioni di quella corrispondente al moto della particella sul segmento, dato che si tratta comunque di una superficie nello stesso spazio delle fasi: il suo valore si ottiene facilmente ricordando l'espressione dell'area di un'ellisse, che è data dal prodotto dei due semiassi, moltiplicato per π. Indicandola ancora con il simbolo J, si ottiene dunque

$$J = \pi\sqrt{\frac{2E}{k}}\sqrt{2mE} = 2\pi E\sqrt{\frac{m}{k}}$$

o anche, ricordando la definizione della pulsazione $\omega = \sqrt{k/m}$,

$$J = \frac{2\pi E}{\omega}$$

Energie e tempi

Avrai certo notato che, in tutta questa nostra discussione sulla rappresentazione del moto nello spazio delle fasi, non è stata mai menzionata la variabile tempo. La cosa non sorprende poi tanto, visto che stiamo lavorando in uno spazio in cui le coordinate sono la posizione e la quantità di moto; e in effetti, da un'occhiata ai grafici che abbiamo costruito per la particella sul segmento e per l'oscillatore armonico, non sembra che da essi si possa trarre alcuna informazione utile per rispondere a domande sull'evoluzione temporale del fenomeno.
Tuttavia, riflettiamo un po' più attentamente sulla questione, prendendo come esempio il caso dell'oscillatore armonico. Tanto per cominciare, si può dedurre dalla traiettoria nello spazio delle fasi che il moto è periodico: il punto rappresentativo descrive una curva chiusa e ritorna allo stato di partenza, con gli stessi valori di posizione e velocità. Dopo quanto tempo, però? O, per dirla in altro modo, qual è il periodo dell'oscillazione? Bene, ti diciamo che sei in possesso di tutti gli elementi per rispondere alla domanda, e ti diamo solo un piccolo suggerimento: guarda bene l'ultima espressione che abbiamo ottenuto, quella che dà il valore dell'area dell'ellisse nello spazio delle fasi. Dovrebbe suggerirti qualcosa...

D'accordo, ti abbiamo messo sulla buona strada, ma se hai trovato autonomamente la soluzione ti facciamo comunque le nostre congratulazioni. Nell'espressione dell'area dell'ellisse

$$J = \frac{2\pi E}{\omega}$$

compare il fattore $2\pi/\omega$, che altro non è che il periodo T del moto armonico. Possiamo quindi scrivere

$$J = ET$$

e vediamo che, se è nota l'energia della particella, il periodo dell'oscillazione si può ricavare dalla misura dell'area dell'ellisse che ne rappresenta la traiettoria nello spazio delle fasi. Dall'ultima relazione ottenuta si vede in modo ancora più chiaro che l'area in questione aumenta al crescere del valore dell'energia; l'area J è infatti data dal prodotto dell'energia E per una grandezza (il periodo dell'oscillazione) che è indipendente da E, e si conclude dunque che J è direttamente proporzionale all'energia della particella.
Ti lasciamo come facile esercizio di verificare che anche per la particella sul segmento vale una proprietà analoga; ti chiediamo cioè di ricavare la semplice relazione che lega, in quel caso, l'area racchiusa dalla traiettoria nello spazio delle fasi ai valori dell'energia della particella e del periodo del moto.

Semplicissimo: ora si ha $J = 4ap$, $E=p^2/2m$, e $T=4a/v = 4am/p$. Si ha dunque $ET = 2ap$, e si ottiene la relazione $J = 2ET$.
Riassumiamo i nostri risultati: moti unidimensionali conservativi corrispondenti a stati legati sono periodici, e descrivono traiettorie chiuse nello spazio delle fasi; l'area racchiusa dalla traiettoria è legata ai valori dell'energia e del periodo del moto.
Un'ultima notazione terminologica: abbiamo introdotto la quantità J, che rappresenta l'area della traiettoria descritta nello spazio delle fasi da un sistema legato, ma ci siamo dimenticati di darle un nome. Rimediamo subito: la quantità in questione prende il nome di **azione**, e le sue dimensioni sono, come già abbiamo visto, quelle di una quantità di moto per una posizione, oppure, equivalentemente, di una energia per un tempo. In termini delle tre unità fondamentali lunghezza, massa e tempo, abbiamo allora che le dimensioni della grandezza azione sono

$$[J] = ML^2T^{-1}$$

Stati legati in due dimensioni

Non c'è naturalmente nessuna ragione al mondo per cui ci si debba limitare a considerare stati legati associati a moti unidimensionali; un'opportuna generalizzazione dei concetti appena introdotti ci permetterà di trattare anche il caso di moti periodici in due, o tre dimensioni. Ci limiteremo a illustrare un caso specifico: il moto di un pianeta che descrive un'orbita circolare intorno al Sole. Possiamo anticipare la ragione di questa scelta: più avanti nel corso dei nostri studi di fisica avremo a che fare con un sistema del tutto equivalente, sul piano formale, a quello Sole-pianeta, e ci torneranno allora molto utili i risultati che otterremo tra poco.
Il moto che stiamo studiando è conservativo e periodico; il pianeta si trova dunque, secondo quanto abbiamo appena imparato, in uno stato legato. Nella quinta unità, studiando una situazione formalmente identica (una massa in orbita intorno alla Terra), eravamo arrivati alla conclusione che uno stato legato si ottiene quando l'energia totale della massa è

negativa, nel caso in cui si scelga di porre uguale a zero il valore dell'energia potenziale all'infinito. Sappiamo infatti che, se si utilizza questa convenzione, il segno dell'energia meccanica ci dice immediatamente se il corpo può o meno allontanarsi all'infinito: un valore positivo dell'energia significa che il corpo può allontanarsi indefinitamente, mentre un valore negativo esclude questa eventualità, costringendo il corpo a rimanere vincolato alla massa attraente. A uno stato legato corrisponde perciò un valore negativo dell'energia meccanica. E questo è proprio il caso del nostro pianeta. La sua energia è data da

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R}$$

dove abbiamo indicato con m e M le masse, rispettivamente, del pianeta e del Sole, e con R, ovviamente, la distanza tra Sole e pianeta, cioè il raggio dell'orbita. Trattandosi, nella nostra approssimazione, di un moto circolare uniforme, vale la relazione

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{GMm}{R^2}$$

da cui si ottiene

$$v^2 = \frac{GM}{R}$$

Sostituendo questo risultato nell'espressione dell'energia si ha

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}mv^2 - mv^2 = -\frac{1}{2}mv^2 < 0$$

L'energia totale è dunque in effetti negativa, a conferma del fatto che il pianeta si trova in uno stato legato.

Possiamo allora pensare di determinare il valore dell'azione collegata a questo moto, valore che corrisponde, come sappiamo, all'area della traiettoria descritta nello spazio delle fasi. E qui si pone il problema: che cosa è lo spazio delle fasi per un moto bidimensionale? La cosa è più semplice di quanto appaia a prima vista. Basta pensare di rappresentare il moto in un piano cartesiano x-y e scomporlo poi nei due moti componenti lungo i due assi; è una tecnica che abbiamo già usato, in particolare proprio trattando il moto circolare uniforme. Così facendo, il moto bidimensionale si riduce alla combinazione di due moti unidimensionali, per ciascuno dei quali sappiamo costruire un opportuno spazio delle fasi. Abbiamo dunque due moti componenti, uno rappresentabile nello spazio delle fasi di coordinate x-p_x, e l'altro nello spazio y-p_y. L'area che stiamo cercando, che dà il valore dell'azione J, sarà allora semplicemente la somma delle aree delle traiettorie descritte nei rispettivi spazi delle fasi dai due moti componenti. Di che specie di traiettorie si tratta?

Siamo fortunati. Ci è infatti noto che la scomposizione lungo i due assi cartesiani di un moto circolare uniforme dà luogo, per ciascuna direzione, a un moto armonico; e l'area associata alla traiettoria nello spazio delle fasi di un oscillatore armonico unidimensionale è proprio quanto abbiamo appena calcolato, prima di imbarcarci nello studio del moto del pianeta. La quantità che stiamo cercando è dunque la somma delle azioni associate ai due moti oscillatori che compongono il nostro moto circolare, cioè anche, dato che le due oscillazioni hanno stessa ampiezza e frequenza, il doppio della azione J^* associata a ogni singola oscillazione. Il nostro risultato precedente ci dice che questa vale

$$J^* = \frac{2\pi E}{\omega}$$

L'azione J che stiamo cercando è allora semplicemente uguale a $2J^*$, e, ricordando che nel nostro caso si ha $E = -1/2mv^2$, e $\omega = v/R$, si ottiene

$$J = 2J^* = 2 \cdot \frac{2\pi E}{\omega} = -4\pi \frac{1}{2} \frac{mv^2 R}{v} = -\,2\pi R m v$$

Nota che il valore dell'azione risulta uguale al prodotto del modulo della quantità di moto mv per la lunghezza $2\pi R$ dell'orbita circolare descritta dal pianeta (il segno meno dipende solo dalla scelta da noi fatta per l'energia). Possiamo facilmente verificare, infine, che anche in questo caso esiste una semplice relazione tra azione, energia e periodo del moto; basta moltiplicare e dividere l'azione per la velocità v, e ricordare che il periodo è dato da $T=2\pi R/v$, e che l'energia E è uguale a $-1/2mv^2$, per ottenere immediatamente

$$J = -\frac{2\pi R}{v}\, mv^2 = 2ET$$