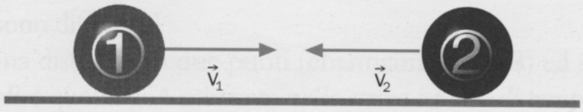
5

GLI URTI TRA DUE CORPI IDENTICI

UNITÀ II

Dove si avanza la confortante ipotesi che si può capire meglio la fisica giocando a biliardo

Abbiamo appena conquistato la libertà di scegliere, all'interno degli infiniti sistemi di riferimento in moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro, quello che preferiamo.
Ma perché preferire l'uno piuttosto che l'altro? Magari perché dall'uno è possibile vedere il mondo in modo più semplice che dall'altro!
Lo ammettiamo: il significato della frase può risultare decisamente oscuro; meglio allora chiarirlo con degli esempi. Prendiamo perciò in considerazione un tipo di fenomeno per noi nuovo, con il quale ci troveremo spesso, anche in futuro, a fare i conti: l'urto tra due corpi.
Si possono fare infiniti esempi di urti: due automobili che si scontrano, una boccia da biliardo che ne colpisce un'altra, una palla da tennis che rimbalza contro una parete, ecc. Insomma, si tratta di una fenomenologia senz'altro variegata, che può apparirci, almeno in prima approssimazione, di una complessità davvero preoccupante! Certo, tutto sarebbe più semplice se scoprissimo qualche legge cui obbediscono tutti gli urti, dal più banale al più complicato...
Iniziamo quindi la ricerca di un'eventuale legge di questo tipo, utilizzando la strategia di partire dai casi più semplici.
Cosa c'è di meglio, allora, di due sfere identiche (per comodità le «battezzeremo» rispettivamente sfera 1 e sfera 2) che procedono l'una contro l'altra alla stessa velocità costante, e che urtano frontalmente?



Il moto delle due sfere prima dell'urto è dunque facilmente descrivibile: le due sfere si muovono di moto rettilineo uniforme, e tra le loro velocità sussiste la relazione

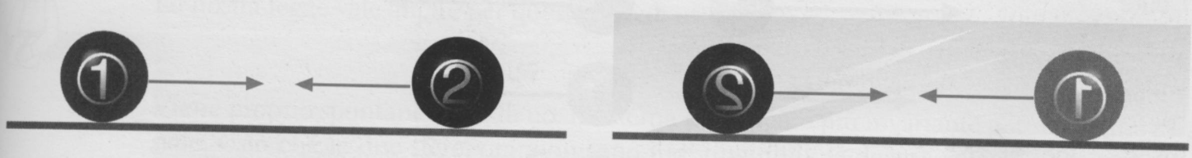
$$\vec{v}_1 = -\vec{v}_2$$

Resta inteso, inoltre, che le due sfere non sono «condizionate» da alcun fattore esterno: si muovono senza subire interventi di altri corpi, senza venir frenate o deviate dal piano sul quale sono appoggiate, e così via. In altre parole, gli effetti del mondo circostante non si fanno sentire o, per dirla con il linguaggio degli addetti ai lavori, sono trascurabili, cosicché è possibile pensare alle due sfere come a un **sistema isolato**, che non interagisce con il mondo esterno.
L'unica cosa che può succedere è che la sfera 1 «intervenga» sulla sfera 2 e viceversa. Bene: è proprio quanto accade nell'urto; e, in conseguenza dell'urto, le due sfere cambieranno il loro moto.

Sai prevedere quale sarà la loro velocità dopo l'urto?
Ti facciamo dono di uno spazio per le tue previsioni. Un suggerimento utile: ricorda che le due sfere sono identiche. Nota inoltre che non abbiamo detto niente sulla «qualità» delle due sfere: dure come bocce da biliardo, più morbide e deformabili come palle da tennis? Discuti le diverse situazioni. E, per amor di completezza, prova a prevedere anche che cosa succede nel caso in cui sulle due sfere ci sia un po' di colla, cosicché dopo l'urto esse rimangono appiccicate l'una all'altra.

Analisi dell'urto tra corpi identici e con uguali velocità

Meno male che doveva essere un esempio banale! Eppure, l'analisi della situazione che si determina può risultare davvero semplice, purché si adotti un punto di vista geometrico. Ti accorgerai facilmente, per questa via, che le due sfere, *prima dell'urto*, costituiscono un sistema fisico *invariante* rispetto a una simmetria assiale che abbia come asse una qualsiasi retta perpendicolare ai vettori velocità. Stiamo dicendo, con un linguaggio un po' complicato, una cosa in realtà molto semplice, ovvero che se osservassimo il fenomeno riflesso in uno specchio perpendicolare alla direzione del moto vedremmo la stessa situazione. Una trasformazione di questo tipo, infatti, ha come effetto uno scambio di «destra con sinistra», o, se preferisci, della sfera 1 con la sfera 2.

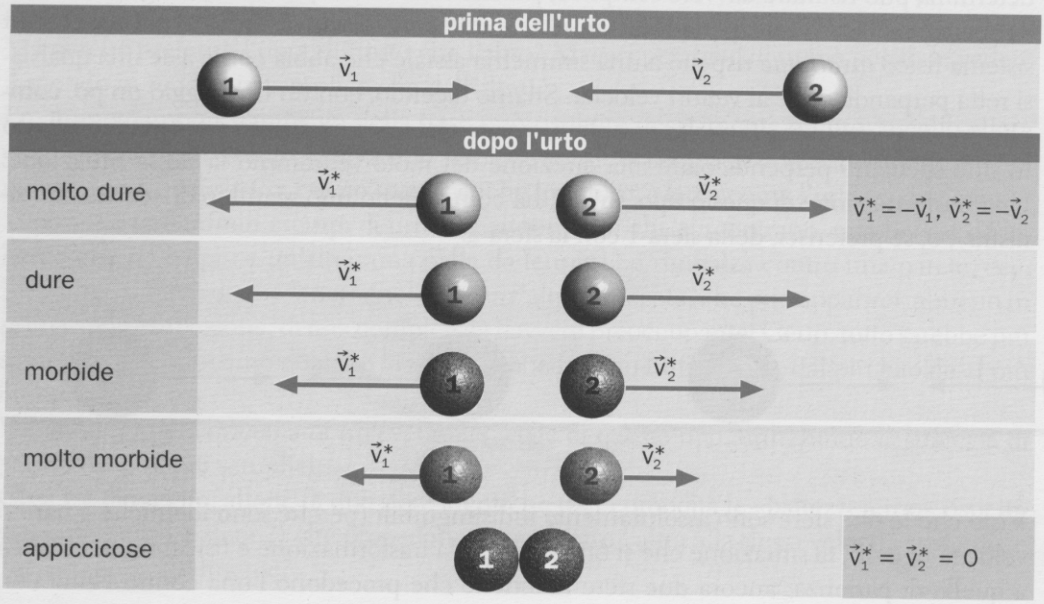


Visto che le due sfere sono assolutamente indistinguibili (perché sono identiche e hanno velocità uguali), la situazione che si ottiene dopo la trasformazione è fisicamente identica a quella di partenza: ancora due sfere identiche che procedono l'una contro l'altra con uguale velocità.
Non ti sembra allora sensato pensare che anche *dopo l'urto* il sistema rimanga invariante rispetto alla stessa «famiglia» di trasformazioni geometriche? In effetti, perché mai l'urto dovrebbe rompere questa simmetria tra destra e sinistra, o dovrebbe produrre effetti diversi sulle due sfere?
Se le cose stanno davvero così, dovrà *necessariamente* valere, tra le velocità $\vec{v}_1^*$ e $\vec{v}_2^*$ delle due sfere dopo l'urto, la seguente relazione

$$\vec{v}_1^* = -\vec{v}_2^*$$

E questo deve accadere indipendentemente dal fatto che le sfere siano più o meno dure o morbide, o, addirittura, più o meno appiccicose! Solo il verificarsi di questa relazione tra le velocità, infatti, può garantire che le due sfere siano del tutto indistinguibili anche dopo l'urto, e costituiscano perciò un sistema fisico invariante per simmetria assiale.
Il risultato ottenuto è davvero molto soddisfacente: sulla base di semplici considerazioni intorno alle proprietà geometriche del problema, siamo infatti riusciti a ridurne drasticamente la complessità. Ora sappiamo che $\vec{v}_1^*$ e $\vec{v}_2^*$ non sono tra loro indipendenti, come invece potevamo supporre all'inizio, ma *devono* essere, *in ogni caso* (cioè qualunque siano le caratteristiche delle due sfere), vettori uguali (in modulo e direzione), e opposti (in verso).

È davvero un bel passo avanti!
Certo, ancora non sappiamo il *valore* che può essere assunto dai vettori $\vec{v}_1^*$ e $\vec{v}_2^*$; questo dipende senza dubbio, infatti, dal *tipo* di sfera che prendiamo in considerazione. Ma ti sarà facile prevedere, sulla base delle tue esperienze (hai mai giocato a biliardo, o con quelle palle «magiche» che non si fermano mai?), che quanto più le sfere sono dure e indeformabili, tanto più tenderanno, dopo l'urto, a rimbalzare all'indietro con una velocità sempre più vicina, in modulo, a quella che avevano prima dell'urto. Il caso estremo è quello in cui le sfere tornano indietro proprio con una velocità uguale e opposta a quella iniziale. Per la cronaca: si parla in quest'ultimo caso di **urto elastico**.
Quanto più, invece, le sfere sono morbide, deformabili, o addirittura appiccicose, tanto meno rimbalzeranno all'indietro, fino all'altro caso estremo, in cui esse rimangono appiccicate e ferme. Sempre per la cronaca: si parla in questo caso di **urto completamente anelastico**.



Resta comunque il fatto, importantissimo, che in ogni caso è verificata la relazione

$$\vec{v}_1^* = -\vec{v}_2^*$$

Possiamo azzardare, a questo punto, una prima ipotesi di legge degli urti.
L'urto provoca infatti una *variazione di velocità* in ambedue le sfere

$$\Delta\vec{v}_1 = \vec{v}_1^* - \vec{v}_1$$
$$\Delta\vec{v}_2 = \vec{v}_2^* - \vec{v}_2$$

Ma poiché, qualunque sia l'urto, valgono le relazioni

$$\vec{v}_1 = -\vec{v}_2 \qquad \vec{v}_1^* = -\vec{v}_2^*$$

tra le variazioni di velocità sussiste comunque l'uguaglianza

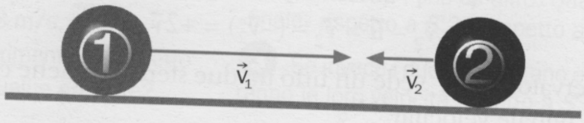
$$\Delta\vec{v}_1 = -\Delta\vec{v}_2$$

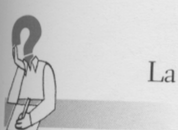
Potremo prendere proprio quest'ultima relazione come legge degli urti: ogni urto determina, sui due corpi identici, delle variazioni di velocità tra loro uguali (in modulo e direzione) e opposte (in verso).

Che succede se le velocità sono diverse?

Ti soddisfa questa legge?
Certo, per essere semplice, è semplice. Ed è efficace, visto che riesce a descrivere bene gli urti tra due corpi identici che procedono l'uno contro l'altro con velocità uguali e opposte. Ma noi avevamo ambizioni ben più alte: volevamo una legge comune a *tutti* gli urti. Prima di gridare al successo, dunque, dobbiamo controllare la bontà della nostra legge in qualche urto un po' più complicato.
Ad esempio, possiamo discutere cosa succede nel caso di due sfere, ancora identiche, che si muovono però, prima dell'urto, con velocità di diverso modulo. Tanto per considerare un caso concreto, facciamo l'ipotesi che i moduli delle due velocità siano uno il triplo dell'altro. Sia cioè

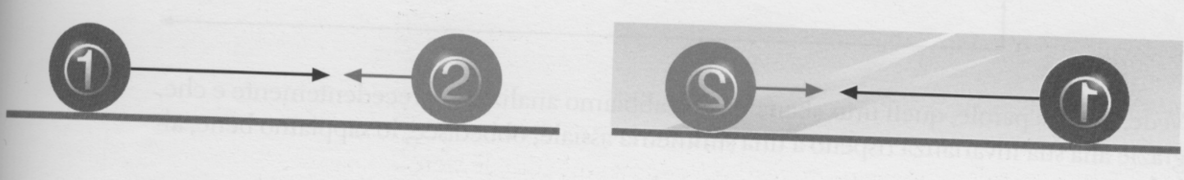
$$\vec{v}_1 = -3\vec{v}_2$$





La nostra legge vale anche per questo tipo di urti?

Viene proprio spontaneo dire di no: il sistema non appare più invariante per simmetria assiale, visto che le due sfere, ora, non sono indistinguibili; la diversa velocità, infatti, è un «segno particolare» che permette di differenziarle. Osservando la figura che segue, puoi notare che nell'immagine speculare la sfera più veloce procede verso sinistra, mentre nella realtà avanza verso destra: la simmetria tra destra e sinistra è dunque violata.

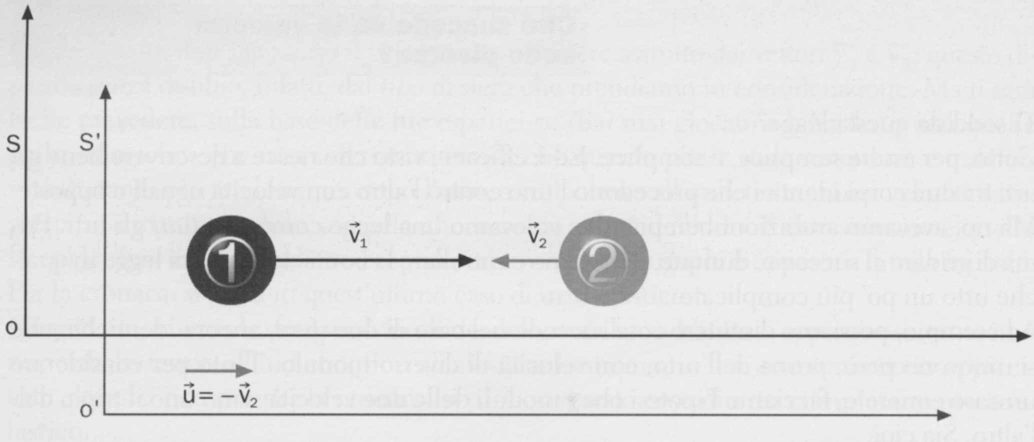


Tutte le considerazioni geometriche che ci hanno condotto, nel caso precedente, alla legge degli urti non sembrano essere più attuali. A meno che non troviamo un modo per «simmetrizzare» anche questo tipo d'urto. E noi, ovviamente, lo troveremo! Vediamo come.
Dire che le due sfere procedono con velocità una tripla dell'altra, significa dire che *rispetto a un particolare sistema di riferimento* S (presumibilmente la Terra, o il laboratorio) si ha

$$\vec{v}_1 = -3\vec{v}_2$$

Immagina invece che un ipotetico osservatore guardi l'urto da un secondo sistema di riferimento S' in moto rettilineo uniforme rispetto a S, ad esempio con velocità

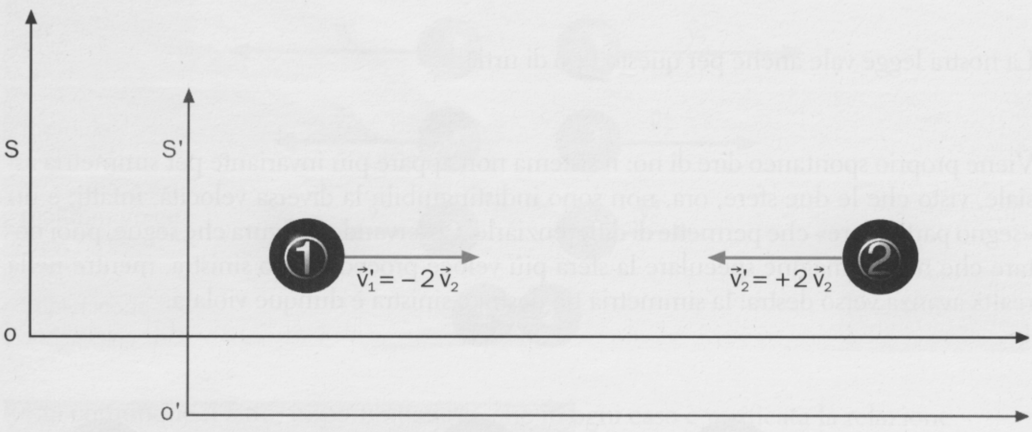
$$\vec{u} = -\vec{v}_2$$



Inutile ricordarti che l'osservatore posto in S' associa, a ognuna delle due sfere, altre velocità, pari rispettivamente, in virtù delle ormai ben note trasformazioni galileiane, a

$$\vec{v}\,'_1 = \vec{v}_1 - \vec{u} = -3\vec{v}_2 - (-\vec{v}_2) = -2\vec{v}_2$$
$$\vec{v}\,'_2 = \vec{v}_2 - \vec{u} = \vec{v}_2 - (-\vec{v}_2) = +2\vec{v}_2$$

Guarda un po': l'osservatore in S' vede un urto tra due sfere identiche che si muovono l'una contro l'altra con uguale velocità!



Vede, in altre parole, quell'urto «banale» che abbiamo analizzato precedentemente e che, grazie alla sua invarianza rispetto a una simmetria assiale, obbedisce, lo sappiamo bene, alla legge

$$\Delta\vec{v}\,'_1 = -\Delta\vec{v}\,'_2$$

Ecco qui: senza trucco e senza inganno, ma solo con una scelta opportuna di sistema di riferimento, abbiamo escogitato un modo per «simmetrizzare» anche questo urto più complesso; in ultima analisi, per ridurlo a un caso già noto!
In questo modo possiamo riconfermare molto agevolmente la validità della nostra legge degli urti. Una volta scoperto che essa vale in S', siamo certi che vale senz'altro anche in S. Ricorda infatti che le variazioni di velocità sono grandezze invarianti per cambiamento di sistema di riferimento. È quindi

$$\Delta\vec{v}_1 = \Delta\vec{v}\,'_1$$
$$\Delta\vec{v}_2 = \Delta\vec{v}\,'_2$$

Perciò, visto che vale l'uguaglianza

$$\Delta\vec{v}\,'_1 = -\Delta\vec{v}\,'_2$$

possiamo subito concludere che si verifica anche l'uguaglianza

$$\Delta\vec{v}_1 = -\Delta\vec{v}_2$$

Incominci a capire, a questo punto, perché all'inizio del capitolo abbiamo affermato che la scelta di un opportuno sistema di riferimento può rendere più semplice la visione del mondo?

Domande di verifica

1 Dal sistema di riferimento S del laboratorio si osservano due corpi uguali che avanzano l'uno contro l'altro con velocità $v_1 = -2$ m/s e $v_2 = +8$ m/s. Qual è la velocità u del sistema di riferimento S' rispetto al quale i due corpi hanno velocità uguali e opposte?

2 I due corpi del quesito precedente rimangono, dopo l'urto, attaccati l'uno all'altro. Quale sarà la loro velocità «finale» rispetto a S'? E rispetto a S?

3 Se invece i due corpi urtano elasticamente, quali saranno le loro velocità rispetto a S'? E rispetto a S?

6

LA LEGGE DEGLI URTI

UNITÀ II

Dove si dà un primo saggio delle qualità inventive e di fantasia necessarie per capire il mondo

La legge degli urti che abbiamo ipotizzato nel capitolo precedente ha superato a pieni voti alcuni difficili esami. Ma è evidente che le prove sostenute non sono ancora sufficienti: nel mondo, nostro malgrado, esistono anche gli urti tra corpi non identici (una pallina da ping-pong contro una da tennis, un'auto che si scontra con un camion, ecc.); dobbiamo dunque verificare se la nostra legge descrive efficacemente anche questa diversa tipologia di urti.
Cominciamo con il chiederci, per esempio, che succede quando urtano due sfere dello stesso materiale, ma di volume una doppio dell'altra, che procedono con velocità uguali (come al solito in modulo e direzione) e opposte (in verso).

A te la parola

Scommettiamo che avrai tentato di individuare un modo per «simmetrizzare» anche questa nuova situazione. È sempre una buona idea provare a ripercorrere una strada che si è rivelata utile ed efficace nel passato.
Ma forse il tentativo non è stato coronato da successo; infatti, il «segno particolare» che rende distinguibile la destra dalla sinistra è ora il diverso volume delle due sfere. Una differenza per così dire «intrinseca» ai due corpi, e che appare perciò impossibile da annullare.
Ma sai prevedere quale delle due sfere «avrà la peggio» nell'urto?

Senz'altro la sfera 2 che è più piccola, benché si muova con velocità in modulo uguale a quella della sfera 1. Questo avverrà, ovviamente, perché l'effetto dell'urto non dipende soltanto dalla velocità dei due corpi, ma anche da «quali» sono i corpi.

«Pesiamo» le velocità

Possiamo raccontare i fatti in questo modo: è vero che $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ sono uguali (in modulo), ma nell'urto $\vec{v}_1$ «conterà» di più, avrà una rilevanza maggiore, perché è la velocità della sfera più grande. Quanto maggiore? Sembra sensato dire *il doppio*, perché la sfera 1 è grande il

doppio della sfera 2. Possiamo tenere conto di questa differenza tra le due sfere moltiplicando le loro velocità per un coefficiente che ne misuri la rilevanza relativa; così, se ad esempio, tanto per fissare le idee, diamo coefficiente α alla $\vec{v}_2$, dovremo dare coefficiente 2α alla $\vec{v}_1$.
Potremmo allora inventare due nuovi vettori $\vec{p}_1$ e $\vec{p}_2$ pari, rispettivamente, a

$$\vec{p}_1 = 2\alpha\,\vec{v}_1$$

$$\vec{p}_2 = \alpha\,\vec{v}_2$$

Attraverso $\vec{p}_1$ e $\vec{p}_2$ saremo in grado, in un colpo solo, di descrivere tutte le caratteristiche significative di ogni sfera: la sua velocità e, insieme, grazie al coefficiente per cui quest'ultima viene moltiplicata, la misura della sua rilevanza nell'urto, che dipende dalle qualità della sfera che si muove con quella velocità.
Lo stato fisico del sistema prima dell'urto verrà così completamente descritto per mezzo dei soli vettori $\vec{p}_1$ e $\vec{p}_2$

Non ci serve altro, visto che abbiamo escogitato un modello matematico del fenomeno col quale, per così dire, abbiamo «tradotto» sfere più o meno grandi in vettori più o meno grandi.
Il vantaggio di questa invenzione è davvero notevole: ormai liberi da sfere doppie o triple, e ridotti alla più semplice «realtà» dei vettori, è facile trovare, anche in questo caso, un modo per «simmetrizzare» il fenomeno d'urto. Basterà, infatti, individuare il sistema di riferimento S′ rispetto al quale sia

$$\vec{p}\,'_1 = -\,\vec{p}\,'_2$$

Ma quale deve essere la velocità relativa $\vec{u}$ di tale sistema di riferimento?
Dalle trasformazioni galileiane sappiamo che i vettori $\vec{p}\,'_1$ e $\vec{p}\,'_2$ saranno legati ai vettori $\vec{p}_1$ e $\vec{p}_2$ dalle relazioni

$$\vec{p}\,'_1 = 2\alpha\,(\vec{v}_1 - \vec{u})$$
$$\vec{p}\,'_2 = \alpha\,(\vec{v}_2 - \vec{u})$$

Ricordando che $\vec{v}_1 = -\,\vec{v}_2$, è facile individuare il vettore $\vec{u}$ per il quale è verificata l'uguaglianza $\vec{p}\,'_1 = -\,\vec{p}\,'_2$. Ti lasciamo come esercizio di determinarlo nel caso particolare preso in esame.

Una relazione di validità generale

Siamo finalmente in grado di dire come va a finire anche questo urto più complesso tra corpi diversi. La linea del ragionamento sarà ovviamente identica a quella seguita in precedenza, solo che adesso parleremo dei vettori $\vec{p}$ invece che dei vettori $\vec{v}$.
Prima dell'urto, rispetto a S', i vettori $\vec{p}\,'_1$ e $\vec{p}\,'_2$ sono invarianti per una qualsiasi simmetria assiale che abbia asse perpendicolare ai vettori stessi. In altre parole, si ha

$$\vec{p}\,'_1 = -\,\vec{p}\,'_2$$

Tale invarianza, come al solito, si manterrà anche dopo l'urto, di qualunque tipo esso sia. Perciò, dopo l'urto si avrà

$$\vec{p}_1'^{*} = -\vec{p}_2'^{*}$$

Se ne ricava, nel sistema di riferimento S', la relazione

$$\Delta\vec{p}_1' = -\Delta\vec{p}_2'$$

Visto da S', dunque, l'urto tra le due sfere provoca una variazione del vettore $\vec{p}_1'$ uguale e contraria a quella del vettore $\vec{p}_2'$.
E nel sistema S? Naturalmente vale la stessa proprietà! Infatti

$$\Delta\vec{p}_1' = 2\alpha\,\Delta\vec{v}_1' = 2\alpha\,\Delta\vec{v}_1 = \Delta\vec{p}_1$$

$$\Delta\vec{p}_2' = \alpha\,\Delta\vec{v}_2' = \alpha\,\Delta\vec{v}_2 = \Delta\vec{p}_2$$

e perciò anche in S abbiamo

$$\Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2$$

Questa relazione, valida in tutti i sistemi di riferimento, si annuncia davvero come una *nuova* legge degli urti, che sembra mettere in crisi quella da noi proposta precedentemente.
Che fare? Decidiamo che c'è una legge valida per gli urti tra corpi identici, e un'altra valida invece per gli urti tra corpi diversi? No di certo: ci metteremmo senz'altro su una brutta strada se incominciassimo a costruire una miriade di leggi e leggine valide ognuna in pochi casi particolari!
Proviamo, semmai, a tradurre la vecchia legge, $\Delta\vec{v}_1 = -\Delta\vec{v}_2$, nel nuovo linguaggio imparato recentemente. Sappiamo che essa vale per urti tra corpi identici, ossia per corpi che «contano» allo stesso modo. Ma allora, usando la nuova legge, $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ devono essere moltiplicate per uno stesso «coefficiente di rilevanza». Indicando con γ questo coefficiente, a ognuno dei due corpi viene a essere associato un vettore $\Delta\vec{p}$, il cui valore è, rispettivamente

$$\Delta\vec{p}_1 = \gamma\,\Delta\vec{v}_1$$

$$\Delta\vec{p}_2 = \gamma\,\Delta\vec{v}_2$$

Ma, poiché

$$\Delta\vec{v}_1 = -\Delta\vec{v}_2$$

sarà anche, qualunque sia il valore di γ,

$$\Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2$$

Come vedi, se raccontati con le parole giuste, anche gli urti più semplici (quelli tra corpi identici) obbediscono alla nuova legge.
Perciò, seppur grati per i servizi che ci ha reso in passato, licenziamo la nostra precedente legge, e al suo posto assumiamo definitivamente l'altra, di cui abbiamo ormai verificato la validità più generale.

Entrano in scena le masse

Potrebbe venirti un dubbio, anzi due.
Ecco il primo: si può essere davvero certi che questa legge è proprio quella buona, ovvero che non ci imbatteremo mai in situazioni in cui la dovremo sostituire con una più com-

plicata? In fondo, il dubbio è legittimo, visto che ci è già successo di affezionarci inutilmente a una legge degli urti (la vecchia) che sembrava tanto soddisfacente, e di doverla poi scartare.

Rassicurati: questa legge va proprio bene, e non ci sono alternative possibili. Parola d'onore! Comunque, discutiamola un po' insieme. La legge, in ultima analisi, dice che in un urto tra due corpi risulta sempre vera una relazione del tipo

$$\Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2$$

che può essere riscritta come

$$\alpha\Delta\vec{v}_1 = -\beta\Delta\vec{v}_2$$

dove α e β sono i due coefficienti che ci dicono quanto contano i due corpi, l'uno relativamente all'altro.

Dunque, si tratta di una legge che connette le variazioni di velocità provocate dall'urto nei due corpi. La cosa ci appare senz'altro convincente: il buon senso, infatti, suggerisce che tali variazioni non possano essere indipendenti tra loro. Ma, soprattutto, si tratta di una legge che contiene grandezze tutte invarianti per cambiamento di sistema di riferimento. Tali sono, come già sai, $\Delta\vec{v}_1$ e $\Delta\vec{v}_2$; ma tali sono anche i coefficienti α e β. Questi ultimi, infatti, sono degli «indicatori» di una proprietà intrinseca dei corpi che non varia certo in dipendenza dal sistema di riferimento scelto.

E, per finire, si tratta dell'unica relazione di carattere generale che è possibile stabilire tra i quattro invarianti α, β, $\Delta\vec{v}_1$, $\Delta\vec{v}_2$, e che sia valida in tutti i sistemi di riferimento. Questa affermazione potrebbe essere provata rigorosamente (anche se ti risparmiamo questa prova!); puoi comunque convincerti della sua validità costruendo altre combinazioni tra i nostri invarianti: ti accorgerai facilmente che esse o si riducono alla nostra legge, o si adattano solo ad alcune categorie di urti, o, infine, non sono invarianti per cambiamento di sistema di riferimento.

Veniamo ora al secondo dubbio: come è possibile stabilire quanto «conta» ognuno dei due corpi? In altre parole: come si determinano i coefficienti α e β? La cosa è facile, se i corpi sono dello stesso materiale, e hanno volume uno doppio, o triplo, dell'altro. Ma se, invece, sono di materiale diverso e hanno stesso volume? O se si tratta di una sferetta di acciaio che urta una palla di polistirolo?

La risposta è molto semplice: basta scegliere α e β in modo tale che sia verificata la legge $\alpha\Delta\vec{v}_1 = -\beta\Delta\vec{v}_2$.

Per ogni urto, però, ci sono infinite coppie di valori di α e di β che soddisfano la legge. Ad esempio, se per un determinato urto vanno bene i valori

$$\alpha = 1 \qquad \beta = 3$$

andranno altrettanto bene i valori (completa tu)

$$\alpha = 2 \qquad \beta = \dots$$
$$\alpha = \dots \qquad \beta = 9$$
$$\alpha = 4 \qquad \beta = \dots$$

Insomma, vanno bene tutti i valori per cui si abbia $\alpha/\beta = 1/3$. Del resto, dovevamo aspettarcelo: i coefficienti α e β dicono quanto contano i due corpi *l'uno relativamente all'altro*, e non in assoluto.

L'imbarazzo generato da questa eccessiva indeterminatezza è però facilmente superabile. Basta scegliere un corpo (uno qualsiasi) come *corpo campione*. Basta cioè decidere che un certo corpo A «conta 1» e associare ad esso, perciò, un coefficiente $\alpha = 1$. A questo punto, osservando l'urto tra il corpo campione e un altro corpo B_1 e avendo ormai fissato il valore di α, esisterà un solo valore β_1 che soddisfa la legge

$$\alpha\Delta\vec{v}_1 = -\beta_1\Delta\vec{v}_2$$

Assoceremo perciò al corpo B_1 il coefficiente β_1.
Con lo stesso metodo, potremo associare ad altri corpi $B_2, B_3, ..., B_n$ altrettanti coefficienti $\beta_2, \beta_3, ..., \beta_n$. In questo modo potremo abbinare, a ogni corpo, in via definitiva – oseremmo dire in assoluto – un coefficiente che lo caratterizza e lo individua. D'ora in poi, in altre parole, potremo parlare di urti tra un corpo che «conta β_1» e un altro corpo che «conta β_2».
I vantaggi sono sicuramente notevoli: non avremo più l'imbarazzo di dover scegliere, di fronte a ogni singolo urto, tra infinite coppie possibili di coefficienti che soddisfano la legge, visto che conosceremo tali coefficienti a priori; non avremo più la necessità di confrontare coppie di corpi per scoprire quanto contano l'uno rispetto all'altro.
L'operazione proposta non dovrebbe risultarti nuova, essendo identica a quella che facciamo quando, ad esempio, assumiamo come lunghezza unitaria quella di un corpo campione. L'«invenzione» del metro, ossia la decisione, arbitraria, di scegliere quella data lunghezza come unitaria, determina infatti gli stessi vantaggi visti poco fa: permette di associare, in modo definitivo, una lunghezza a ogni corpo. Non è dunque più necessario, per sapere che un corpo A è lungo il doppio di un corpo B, procedere a un confronto diretto tra i due: basterà sapere che, ad esempio, A è lungo 6 m e B è lungo 3 m.
Ma torniamo per un attimo ai nostri coefficienti $\alpha, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$.
Ormai sappiamo che a ogni corpo è possibile associare uno di tali coefficienti. Esso indicherà quanto «conta» quel corpo. E sarà perciò uno dei caratteri distintivi, un dato essenziale di un'ipotetica carta d'identità del corpo stesso.
Questo carattere, questo dato essenziale prende il nome di **massa** del corpo.
D'ora in poi, dunque, chiameremo massa del corpo A (m_A) il coefficiente α associato al corpo A, massa del corpo B (m_B) il coefficiente β associato al corpo B, e così via.
Allo stesso modo, riscriveremo la legge degli urti tra un corpo A e un corpo B nella forma

$$m_A\,\Delta\vec{v}_A = -m_B\,\Delta\vec{v}_B$$

Così, un po' in sordina, abbiamo introdotto una nuova grandezza fisica: la massa di un corpo, definita come il coefficiente associato al corpo in questione quando questo urta con il corpo campione.
Nutri qualche perplessità sul modo in cui essa è stata introdotta? Troppo astratto? Il fatto è che un po' astratta la fisica lo è davvero: inutile negarlo e meglio abituarcisi!
In fondo però ti stiamo proponendo solo una traduzione. Se fino a ora hai detto che un corpo conta più di un altro, ora dirai che la massa dell'uno è maggiore della massa dell'altro.
Torneremo comunque assai spesso a parlare di questa nuova grandezza con cui abbiamo fatto conoscenza. Avrai perciò modo di familiarizzare con essa.

Il Sistema Internazionale di unità di misura

Un'ultima cosa: ogni volta che introduciamo una nuova grandezza, siamo tenuti a esplicitare le sue caratteristiche (si tratta di una grandezza fondamentale o derivata, scalare o vettoriale?) e a indicarne le unità di misura. Poiché non riusciamo a vedere nessun modo semplice per esprimere la massa in termini di lunghezze e di tempi, ossia delle dimensioni fondamentali fin qui introdotte, decidiamo di assumerla come una *nuova grandezza fondamentale*, le cui dimensioni indicheremo con M.

D'ora in poi, dunque, il nostro sarà un universo caratterizzato da *tre* dimensioni fondamentali: **lunghezza**, **tempo**, **massa**.

La massa è senz'altro una grandezza scalare (non ha infatti alcun senso assegnarle una direzione e un verso), e le sue unità di misura sono il chilogrammo, il grammo e tutti i multipli e sottomultipli di essi che ti sono noti fin dalla scuola elementare; il che ci fa fortemente sospettare che la massa, di cui abbiamo qui dato una definizione così complessa, sia, in ultima analisi, parente prossima di quella grandezza che viene misurata con la bilancia... Ma questa è un'altra storia, su cui ci soffermeremo più avanti.

Giacché siamo in tema di unità di misura, approfittiamo della circostanza per informarti del fatto che una convenzione internazionale stabilisce quali siano le unità di misura da utilizzare in ambito scientifico per le tre grandezze fondamentali lunghezza, massa e tempo. Esse sono rispettivamente il metro (m), il chilogrammo (kg) e il secondo (s). Queste unità di misura costituiscono quindi la base (da cui vengono poi ricavate le unità di misura delle grandezze derivate) di quello che è noto come **Sistema Internazionale di unità di misura**.

Domande di verifica

1 Due masse m_1 e m_2 si urtano frontalmente con velocità uguali e opposte, pari in modulo a 4 m/s. Dopo l'urto la massa m_2 rimbalza con velocità 3 m/s e m_1 rimbalza con velocità 2 m/s. Qual è il rapporto tra m_1 e m_2?

CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

UNITÀ II

7

Dove, con grande gioia dei tradizionalisti, si esaltano le virtù dei valori che si conservano nel tempo

Siamo infine riusciti a individuare la legge

$$m_1 \, \Delta\vec{v}_1 = - m_2 \, \Delta\vec{v}_2$$

cui obbediscono tutti gli urti, dal più semplice al più complicato.
Come hai visto, per raggiungere il nostro scopo abbiamo ampiamente sfruttato quella libertà di scelta del sistema di riferimento recentemente conquistata. Abbiamo infatti deciso di osservare i fenomeni d'urto dal sistema di riferimento in cui essi apparivano più semplici e prevedibili perché «simmetrici» rispetto allo scambio della destra con la sinistra. Questo sistema di riferimento particolarmente pregevole, in cui sono evidenti le proprietà di simmetria del fenomeno, prende il nome di **sistema del centro di massa** (o anche, talvolta, di sistema del baricentro). Abbiamo così individuato la legge cui gli urti obbediscono nel sistema del centro di massa, e ci siamo poi assicurati che tale legge conservasse la sua forma se sottoposta a trasformazioni galileiane, ovvero che fosse valida in *tutti* i sistemi di riferimento in moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro.

La quantità di moto

Ti sarà anche stato chiaro che, per individuare la legge giusta per tutti gli urti, abbiamo dovuto inventare un nuovo vettore, il vettore $\vec{p}$, attraverso cui abbiamo espresso, in un linguaggio matematico, il fatto che gli urti dipendono, contemporaneamente, da *chi è* ciascuno dei corpi che urta – ossia da quella sua proprietà che abbiamo chiamato massa – e da *quale è* la sua velocità.
Ovviamente, con il vettore $\vec{p}$ viene introdotta una nuova grandezza fisica. Essa prende il nome di **quantità di moto**.
A un corpo di massa m e velocità $\vec{v}$, dunque, possiamo d'ora in poi associare una quantità di moto $\vec{p}$ pari a

$$\vec{p} = m\,\vec{v}$$

Si tratta, come vedi, di una grandezza vettoriale, visto che è data dal prodotto di uno scalare (la massa) per un vettore (la velocità). La sua equazione dimensionale è, ricordando che la massa è una grandezza fondamentale,

$$[p] = [m]\,[v] = MLT^{-1}$$

dove, seguendo una notazione consueta, abbiamo indicato la frazione $\frac{1}{T}$ con il simbolo T^{-1}. D'ora in poi ricorreremo abitualmente a notazioni analoghe.
Lasciamo a te il compito di scoprire alcune possibili unità di misura della quantità di moto.

Massa	Lunghezza	Tempo	Quantità di moto
kg	m	s	...
g	cm	s	...

Diciamo le cose in un altro modo

Torniamo ora alla legge degli urti, per osservarla più da vicino e scoprirne qualche significato nascosto.
Per prima cosa riformuliamola in modo più sintetico: in un urto tra due corpi qualsiasi, la variazione della quantità di moto del primo corpo è uguale e opposta alla variazione della *quantità* di moto del secondo corpo

$$\Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2$$

Si ha cioè, chiamando $\vec{p}_1$ e $\vec{p}_2$ le quantità di moto dei due corpi *prima* dell'urto, e $\vec{p}_1^*$ e $\vec{p}_2^*$ le loro quantità di moto *dopo* l'urto,

$$\vec{p}_1^* - \vec{p}_1 = -(\vec{p}_2^* - \vec{p}_2)$$

o anche

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1^* + \vec{p}_2^*$$

Ecco una scrittura, assolutamente equivalente alle altre, che può però aiutarci a interpretare la legge in un nuovo modo. In essa si afferma che la *somma* delle quantità di moto prima dell'urto ($\vec{p}_1 + \vec{p}_2$) è uguale alla *somma* delle quantità di moto dopo l'urto ($\vec{p}_1^* + \vec{p}_2^*$).
All'inizio della nostra discussione sugli urti avevamo affermato che i due corpi che urtano costituiscono un *sistema isolato*, un sistema, cioè, che non interagisce con l'esterno. Ricordi? Se a tale sistema associamo una *quantità di moto totale*, data appunto dalla somma vettoriale delle quantità di moto dei corpi che lo costituiscono, possiamo allora esprimere la nostra legge nei seguenti termini: *un urto non provoca alcuna variazione della quantità di moto totale del sistema isolato formato dai corpi che urtano*. La quantità di moto totale del sistema è infatti la stessa prima e dopo l'urto

$$\vec{p}_{\text{tot}} = \vec{p}_{\text{tot}}^*$$

Certo, in conseguenza dell'urto ogni singolo corpo varia la sua quantità di moto, ma, per così dire, tali variazioni si compensano, in modo che la quantità di moto totale si mantiene costante. In fondo, però, questo già lo sapevamo! Dire infatti che

$$\Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2$$

significa in ultima analisi affermare che alla variazione di quantità di moto del primo corpo corrisponde una variazione uguale e opposta della quantità di moto del secondo, grazie alla quale si ha

$$\Delta\vec{p}_{\text{tot}} = \Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 = 0$$

A ben vedere, dunque, la legge degli urti si configura, da qualunque punto di vista la si osservi, come una **legge di conservazione della quantità di moto totale** del sistema isolato formato dai due corpi, nel senso che essa «predica» la conservazione, ossia la *costanza nel tempo*, del vettore quantità di moto totale del sistema.
Va da sé, naturalmente, che le caratteristiche del vettore $\vec{p}_{\text{tot}}$ (modulo, direzione, verso) dipendono dal sistema di riferimento scelto; resta però il fatto che, una volta fissato il sistema di riferimento, tale vettore rimane costante nel tempo. Al proposito, è importante osservare che la particolarità del sistema del centro di massa (cioè di quel sistema rispetto al quale l'urto appare simmetrico) si traduce nel fatto che, rispetto ad esso, la quantità di moto totale di un sistema isolato è per definizione sempre nulla.

Libertà vigilata

È la prima volta che, nello studio della fisica, ti imbatti in una **legge di conservazione**. Si tratta di un tipo di legge con cui spesso ti dovrai confrontare, visto che la fisica ne è piena. Questa è senz'altro una fortuna: ogni legge di conservazione, infatti, impone dei vincoli all'evoluzione di un sistema, e rende perciò in ultima analisi più facile prevedere tale evoluzione.
La cosa non ti risulta evidente? Pensa allora al ruolo che gioca la legge di conservazione della quantità di moto totale di un sistema isolato rispetto all'analisi di un fenomeno d'urto. Prima di individuarla, non sapevamo assolutamente prevedere quali velocità avrebbero potuto avere i due corpi dopo l'urto (a priori qualsiasi valore era possibile). Un bel pasticcio davvero, peggio che cercare un ago in un pagliaio! La legge ci permette invece di restringere drasticamente l'ambito di ricerca, poiché limita, vincola, i possibili risultati dell'urto: sono consentite, dopo l'urto, solo quelle velocità che garantiscono la costanza della quantità di moto totale del sistema. Grazie alla legge sappiamo perciò che c'è una zona di evoluzione assolutamente vietata, e ciò rende senz'altro più agevole prevedere la situazione dopo l'urto.

Generalizziamo il risultato

È ora tutto un po' più chiaro? Stai cominciando a renderti conto dell'utilità di quello strumento potente che sono le leggi di conservazione?
Affinché te ne convinca ulteriormente, abbiamo comunque intenzione di ampliare il campo di validità della legge di conservazione appena individuata. Vorremmo farti riflettere, per prima cosa, su un'ipotesi che, più o meno implicitamente, abbiamo assunto come vera in tutto il nostro discorso: la quantità di moto di ognuno dei due corpi che forma il sistema isolato varia solo in conseguenza di un urto. Abbiamo cioè supposto che $\vec{p}_1$ e $\vec{p}_2$, e quindi anche la loro somma (ossia la quantità di moto totale del sistema), siano costanti fintanto che non avvengono urti. Dunque, abbiamo *supposto* valida la conservazione della quantità di moto totale del sistema «lontano» dall'urto. Fin qui l'ipotesi a priori.
Niente invece sapevamo di che cosa sarebbe successo *con* l'urto: per nostra fortuna, abbia-

mo *scoperto* (questa sì che è stata una scoperta!) che *anche* in presenza di un urto la quantità di moto totale del sistema si conserva.

Possiamo a questo punto mettere insieme ipotesi a priori e scoperte successive, e perciò enunciare, in una forma più generale, la nostra legge di conservazione: *la quantità di moto totale di un sistema isolato si mantiene costante nel tempo*. Non servono ulteriori precisazioni su ciò che avviene, nel tempo, all'interno del sistema. Ormai sappiamo, infatti, che tale costanza è valida sia in assenza che in presenza di urti.

Abbiamo parlato di sistema isolato, senza specificare quanti sono i corpi che lo costituiscono. Questo perché in realtà la legge che noi abbiamo dedotto per un sistema di due corpi vale anche per sistemi formati da molti corpi, ma anche per un solo corpo.

Immagina infatti, ad esempio, un sistema isolato formato da tre, quattro o più corpi che possono o meno urtare tra loro. Inutile dire che i tre, quattro o più corpi manterranno, lontano dagli urti, la propria quantità di moto. E quando invece urtano? Facile: poiché la legge di conservazione vale *per ogni urto*, varrà anche *per l'insieme* degli urti.

Così, senza indugio, possiamo affermare che anche la quantità di moto totale di questo sistema più complesso, definita ovviamente come

$$\vec{p}_{\text{tot}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \ldots + \vec{p}_n$$

è un vettore che si conserva, cioè che rimane costante nel tempo.

E se il sistema isolato è invece formato da un solo corpo? La quantità di moto totale coincide in questo caso con la quantità di moto del corpo, ed essa si manterrà certamente costante nel tempo, poiché il corpo starà sempre lontano dall'urto, visto che non ha nulla contro cui urtare! La conservazione della quantità di moto totale corrisponde ora, banalmente, alla conservazione della velocità del corpo: la velocità di un corpo isolato, dunque, non muta nel tempo.

Cerca di tenere a mente questo risultato perché sarà oggetto di ampia discussione nella prossima unità.

Quantità di moto in due o tre dimensioni

Abbiamo – giustamente – scritto la legge di conservazione della quantità di moto in forma *vettoriale*. Quale sia il significato di questa scrittura nel caso di urti unidimensionali (gli unici che abbiamo sinora preso in esame) è evidente: in situazioni del genere tutte le caratteristiche vettoriali della grandezza quantità di moto totale sono riassunte da un numero relativo che individua l'unica componente del vettore diversa da zero. Si ha infatti, ipotizzando che il moto avvenga lungo l'asse x

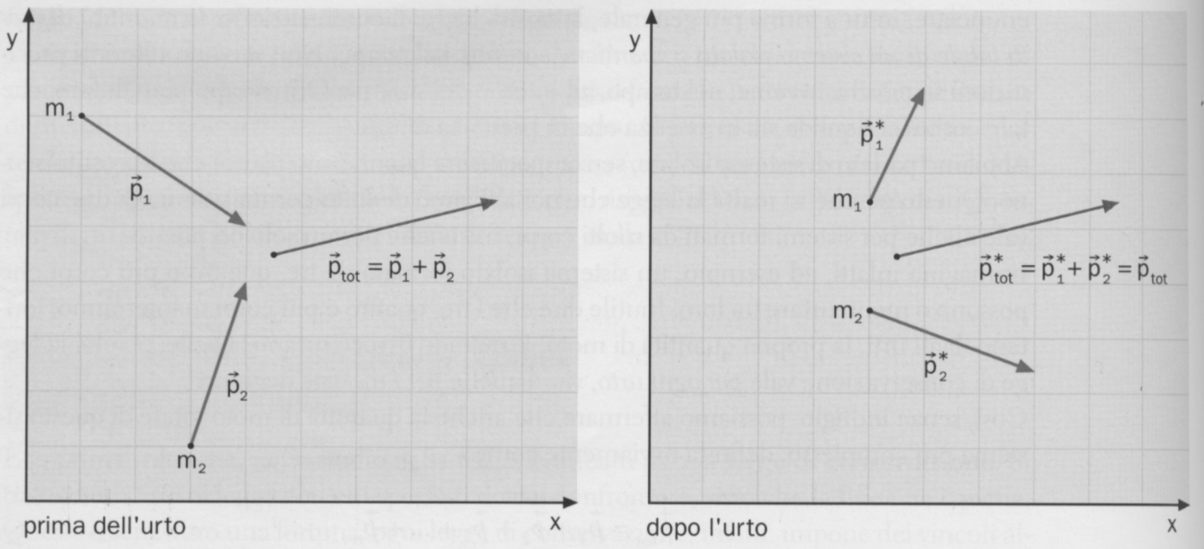
$$\vec{p}_{\text{tot}} \equiv (p_{\text{tot}_x}, 0, 0)$$

$$\vec{p}^{\,*}_{\text{tot}} \equiv (p^*_{\text{tot}_x}, 0, 0)$$

La richiesta che il *vettore* quantità di moto totale si mantenga costante nel tempo si traduce dunque nell'imporre che sia

$$p_{\text{tot}_x} = p^*_{\text{tot}_x}$$

Cosa succede se invece si ha a che fare con urti in due dimensioni, ad esempio come quello, che avviene nel piano *x-y*, indicato in figura?



In questo caso i vettori quantità di moto totale (sia prima che dopo l'urto) hanno *due* componenti diverse da zero. Sarà cioè

$$\vec{p}_{\text{tot}} \equiv (p_{\text{tot}x}, p_{\text{tot}y}, 0)$$
$$\vec{p}^{\,*}_{\text{tot}} \equiv (p^*_{\text{tot}x}, p^*_{\text{tot}y}, 0)$$

Poiché due vettori sono uguali solo se *tutte* le loro componenti lo sono, il rispetto della legge di conservazione della quantità di moto impone che siano rispettate, contemporaneamente, le due uguaglianze

$$p_{\text{tot}x} = p^*_{\text{tot}x}$$
$$p_{\text{tot}y} = p^*_{\text{tot}y}$$

Inutile dire, poi, che se anche la componente *z* del vettore quantità di moto totale è diversa da zero, ovvero se l'urto avviene in uno spazio tridimensionale, dovrà essere soddisfatta anche l'ulteriore uguaglianza

$$p_{\text{tot}z} = p^*_{\text{tot}z}$$

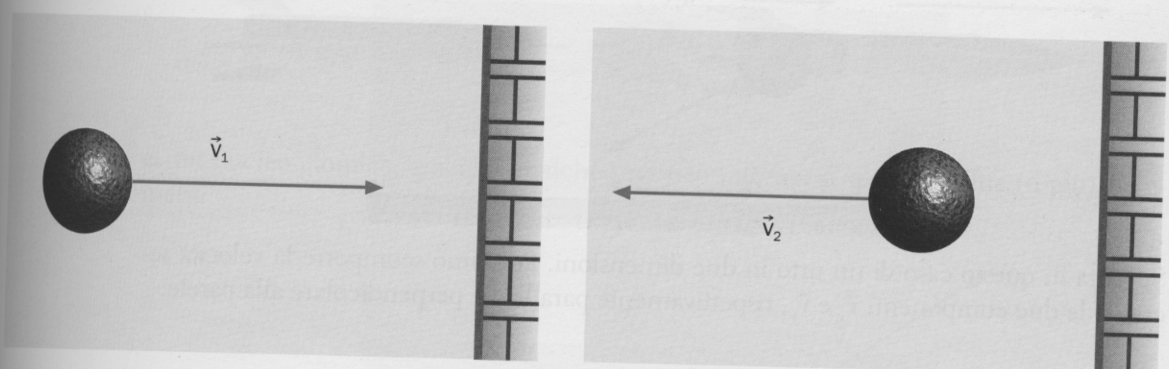
Cosa abbiamo fatto?

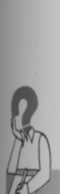
Prima di andare avanti, è opportuno riassumere i punti essenziali dell'itinerario seguito in questa unità.
Abbiamo per prima cosa scoperto, con Galileo, che alcune caratteristiche dei fenomeni fisici non dipendono dal sistema di riferimento da cui vengono osservati. In breve, abbiamo scoperto un *principio di invarianza*.
Di questo principio abbiamo fatto uso per ricavare una legge generale – valida per tutti i sistemi fisici isolati – che ha preso alla fine la forma di una *legge di conservazione*.
Siamo stati cioè guidati a costruire una nuova grandezza fisica, la quantità di moto, che ob-

bedisce a una legge di conservazione. E la nostra guida è stata proprio il principio di invarianza galileiano, che si è quindi «tradotto» in una legge di conservazione. Insomma, abbiamo constatato l'esistenza di una forte correlazione tra un principio di invarianza e una legge di conservazione.
Possiamo anticipare che questa circostanza è del tutto generale; avremo modo tra breve di registrare altre correlazioni di questo tipo.

Urti elastici contro una parete

Ci sono alcuni fenomeni, comunemente osservati, che presentano una parentela abbastanza stretta con gli urti, anche se non rientrano, a rigore, nella tipologia dei processi che abbiamo analizzato finora. Vogliamo esaminarli per capire quanto stretta sia la parentela; scopriremo così che anche in questi casi possiamo considerare valida la legge di conservazione della quantità di moto.
Immagina una pallina di gomma dura lanciata contro un muro; per fissare le idee, supponiamo di lanciare la pallina, appoggiata su un piano senza attrito, in direzione perpendicolare al muro. In figura sono rappresentate le velocità $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ della pallina prima e dopo l'impatto con il muro.





Poiché $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ hanno uguale modulo, viene naturale descrivere questo fenomeno come un urto elastico. Ma si tratta davvero di un urto così come noi lo abbiamo definito? Per rispondere alla domanda, chiediamoci se il processo descritto soddisfa la legge di conservazione della quantità di moto. A te la parola.

Sappiamo che la variazione di quantità di moto della pallina è

$$\Delta\vec{p}_P = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = m\,(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

Dato che $\vec{v}_2$ ha stesso modulo di $\vec{v}_1$, ma è diretta in verso opposto, si ha

$$\Delta\vec{p}_P = 2m\vec{v}_2$$

E quanto vale la variazione di quantità di moto $\Delta\vec{p}_M$ del muro? Il muro sta ben fermo sia prima che dopo aver interagito con la pallina, e quindi sembra proprio che sia $\Delta\vec{p}_M = 0$. La variazione della quantità di moto totale del sistema muro-pallina vale dunque

$$\Delta\vec{p}_{tot} = \Delta\vec{p}_M + \Delta\vec{p}_P = 2m\vec{v}_2 \neq 0$$

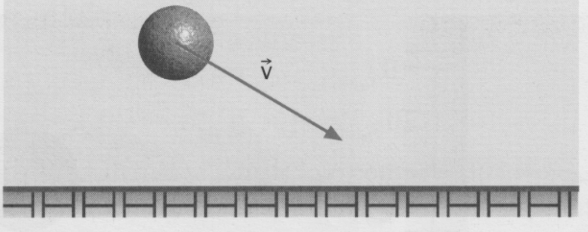
contrariamente a quanto dovrebbe verificarsi in un urto, dove si dovrebbe avere

$$\Delta \vec{p}_{\text{tot}} = 0$$

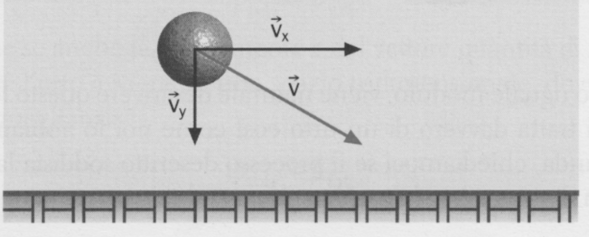
Siamo dunque costretti a concludere che non è possibile descrivere il fenomeno analizzato in termini di un urto? Una via di uscita, che ci permette di continuare a parlare di urto anche per un processo di questo tipo, ci è in verità offerta dalla considerazione che, per determinare la variazione di quantità di moto del muro, dobbiamo moltiplicare la sua variazione di velocità (che è certamente nulla) per la sua massa. Ma quanto vale la massa del muro?

La massa del muro è talmente grande rispetto a quella della pallina che esso si comporta, a tutti gli effetti, *come se* avesse una massa infinita. Ma il prodotto di una quantità infinita (la massa) per zero (la variazione di velocità) è del tutto indeterminato. Possiamo allora, con questa approssimazione, tranquillamente supporre che il muro, pur senza muoversi, assorba la giusta quantità di moto che serve a «far tornare i conti» con la legge di conservazione. Continueremo perciò a parlare di urto anche in questi casi, e diremo che un corpo effettua un urto elastico contro una parete quando ritorna indietro con velocità uguale in modulo e opposta in verso rispetto a quella iniziale.

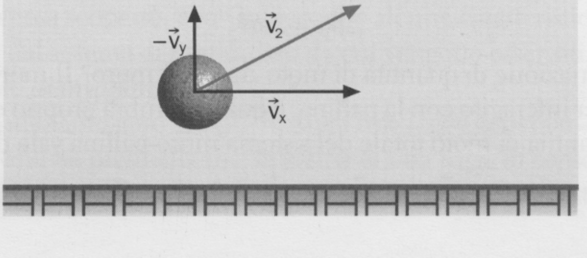
Che cosa succede invece se la direzione di moto iniziale della pallina non è perpendicolare al muro, ma è obliqua, come nella figura seguente?



Si tratta in questo caso di un urto in due dimensioni. Possiamo scomporre la velocità secondo le due componenti $\vec{v}_x$ e $\vec{v}_y$, rispettivamente parallela e perpendicolare alla parete.



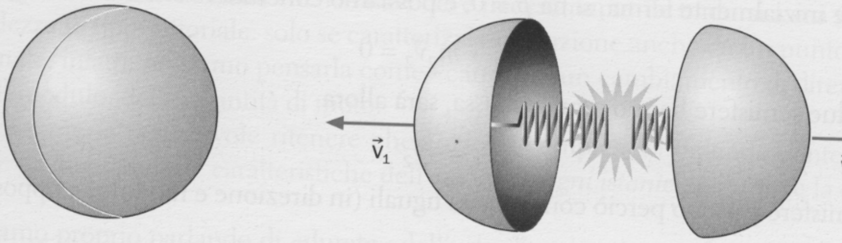
È evidente allora che l'urto non produce alcun effetto sulla componente $\vec{v}_x$, mentre produce sulla componente $\vec{v}_y$ un effetto identico a quello discusso poco fa. La velocità finale $\vec{v}_2$ avrà perciò componenti $\vec{v}_x$ e $-\vec{v}_y$ e sarà diretta così



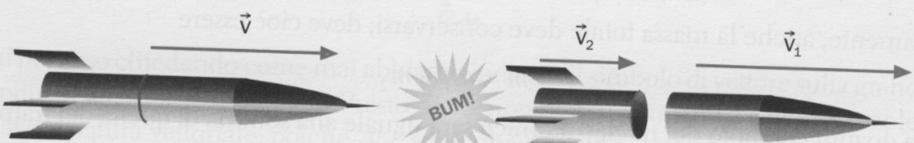
Urti e disintegrazioni

Considera i seguenti processi:

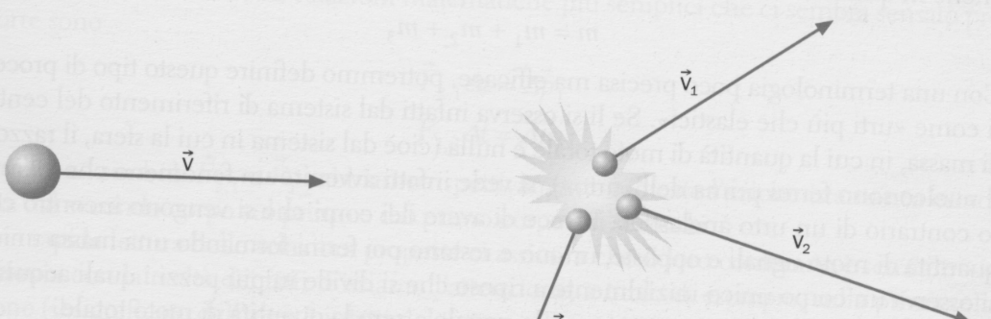
a. un oggetto sferico cavo è costituito da due semisfere tenute insieme da una molla compressa; a un certo istante la molla si rompe e le due semisfere schizzano in direzioni opposte



b. in un razzo a due stadi, in moto rettilineo uniforme nello spazio, i due stadi vengono separati da un'esplosione



c. un nucleo atomico, grazie a qualche processo interno, si spezza in due (o più) frammenti



Siamo certi che di nessuno dei tre processi descritti diresti che si tratta di un urto. Li definiresti piuttosto delle esplosioni, oppure delle disintegrazioni. Quello che però è interessante dal nostro punto di vista è che comunque, anche in questi casi, sono soddisfatte tutte le condizioni con cui abbiamo caratterizzato un urto. Riassumiamo queste condizioni: abbiamo definito urto un'interazione tra due o più corpi che costituiscono nel loro insieme un sistema isolato, un sistema cioè che non risente di azioni esterne, ragione per cui le variazioni di velocità dei corpi che lo compongono possono essere dovute solo alle interazioni tra di essi.
Poiché, come abbiamo già detto, tali condizioni sono verificate anche nei tre processi che

stiamo ora prendendo in esame, è legittimo estendere anche ad essi la legge di conservazione valida per gli urti.
Grazie alla legge possiamo perciò prevedere che cosa succede nelle tre situazioni.

a. La quantità di moto iniziale $\vec{p}$ della sfera sarà uguale alla somma di quelle delle due semisfere, $\vec{p}_1 + \vec{p}_2$, dopo la rottura della molla

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

Se la sfera è inizialmente ferma, si ha $\vec{p} = 0$, e possiamo concludere che è anche

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = 0$$

Poiché le due semisfere hanno uguale massa, sarà allora

$$\vec{v}_1 = -\vec{v}_2$$

Le due semisfere partono perciò con velocità uguali (in direzione e modulo) e opposte (in verso).

b. La quantità di moto iniziale del razzo, di massa m, sarà uguale alla somma di quelle dei due stadi dopo l'esplosione

$$m\vec{v} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

Ovviamente, anche la massa totale deve conservarsi; deve cioè essere

$$m = m_1 + m_2$$

c. La quantità di moto del nucleo atomico sarà uguale alla somma di quella dei frammenti prodotti dalla disintegrazione. Se m è la massa del nucleo, e m_1, m_2 e m_3 le masse delle tre particelle in cui esso si divide, avremo dunque

$$m\vec{v} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3$$

Anche in questo caso dovrà essere

$$m = m_1 + m_2 + m_3$$

Con una terminologia poco precisa ma efficace, potremmo definire questo tipo di processi come «urti più che elastici». Se li si osserva infatti dal sistema di riferimento del centro di massa, in cui la quantità di moto totale è nulla (cioè dal sistema in cui la sfera, il razzo o il nucleo sono fermi prima dell'«urto»), si vede infatti avvenire un fenomeno che è l'esatto contrario di un urto anelastico. Invece di avere dei corpi che si vengono incontro con quantità di moto uguali e opposte, urtano e restano poi fermi formando una massa unica, si osserva un corpo unico inizialmente a riposo che si divide in più pezzi i quali acquistano velocità e si allontanano, mantenendo uguale a zero la quantità di moto totale.

Indaghiamo sulle interazioni

La legge di conservazione della quantità di moto totale, applicata al caso semplice di un sistema isolato formato da due corpi che urtano, ci permette, tra l'altro, di capire alcune caratteristiche dell'interazione che si stabilisce tra i due corpi *durante* l'urto. Sì, perché – lo abbiamo detto fin dall'inizio – i due corpi sono isolati rispetto a tutto ciò che li circonda, ma *interagiscono tra loro*; esattamente durante l'urto.
Le variazioni di quantità di moto $\Delta\vec{p}_1$ e $\Delta\vec{p}_2$, anzi, non sono altro che l'effetto, il risultato, di tali azioni reciproche; più in particolare, $\Delta\vec{p}_1$ può essere interpretata come l'effetto del-

l'azione del secondo corpo sul primo e $\Delta\vec{p}_2$ come l'effetto dell'azione del primo corpo sul secondo.

Naturalmente, il nostro primo problema è quello di tradurre in un'opportuna grandezza fisica ciò che abbiamo finora definito, in modo piuttosto vago, con l'espressione *azione di un corpo su un altro*. Per individuare le proprietà formali della nuova grandezza che dobbiamo «inventare», è utile intanto considerare che l'azione produce, sul corpo sul quale si esercita, una variazione di quantità di moto, ovvero una variazione di una *grandezza vettoriale*. Questo fatto ci assicura che l'azione deve necessariamente tradursi a sua volta in una grandezza di tipo vettoriale: solo se caratterizziamo l'azione anche da un punto di vista direzionale, infatti, possiamo pensarla come «causa» di un cambiamento di direzione, oltre che di modulo, della quantità di moto.

D'altra parte, è ragionevole ritenere che l'azione complessiva dipenda contemporaneamente da due fattori: le caratteristiche dell'azione *in ogni istante* dell'urto, e la *durata* dell'urto.

Sì, stiamo proprio parlando di «durata» dell'urto: l'urto avviene infatti in un intervallo di tempo Δt molto piccolo, ma comunque diverso da zero.

Supponendo che l'«azione istantanea», che indicheremo con il simbolo $\vec{F}$, sia costante nell'intero intervallo di tempo Δt, possiamo allora esprimere l'azione complessiva come

$$\vec{F}\Delta t$$

Ti stai per caso chiedendo come mai abbiamo indicato il simbolo di vettore sulla grandezza che individua l'azione istantanea? Presto detto: non dimenticare che l'azione complessiva deve avere natura vettoriale; poiché Δt è sicuramente una grandezza scalare, è necessario attribuire caratteristiche vettoriali all'azione istantanea.

Siamo ora pronti a compiere un ulteriore passo nel cammino di formalizzazione, passo che consiste nel tradurre in un linguaggio matematico l'idea che tra l'azione complessiva esercitata da un corpo su un altro e la variazione di quantità di moto di quest'ultimo esista un legame di causa-effetto. Le relazioni matematiche più semplici che ci sembra sensato proporre sono

$$\vec{F}_{2,1}\Delta t = \Delta\vec{p}_1$$
$$\vec{F}_{1,2}\Delta t = \Delta\vec{p}_2$$

dove con i simboli $\vec{F}_{2,1}$ e $\vec{F}_{1,2}$ abbiamo rispettivamente indicato l'azione istantanea esercitata dal secondo corpo sul primo e dal primo corpo sul secondo.

Una rapida lettura delle relazioni proposte ci assicura che il loro contenuto è senz'altro in sintonia con la realtà dei fatti. Fissiamo l'attenzione, a titolo di esempio, sulla prima relazione (il significato dell'altra è infatti del tutto analogo). Attraverso di essa si stabilisce che:

- esiste un legame di proporzionalità diretta tra il modulo di $\vec{F}_{2,1}\ \Delta t$ e il modulo di $\Delta\vec{p}_1$; in altre parole, si dice che quanto più «grande» è l'azione complessiva esercitata dal secondo corpo, tanto maggiore sarà l'entità della variazione della quantità di moto del primo corpo;

- la direzione e il verso di $\vec{F}_{2,1}\ \Delta t$ sono identici a direzione e verso di $\Delta\vec{p}_1$; in breve, si dice che l'azione del secondo corpo «perturba» il vettore quantità di moto del primo corpo proprio nella direzione e nel verso in cui si esercita tale azione.

In base alle due relazioni possiamo allora riscrivere la legge di conservazione della quantità di moto $\Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2$ nella nuova forma

$$\vec{F}_{2,1}\ \Delta t = -\vec{F}_{1,2}\ \Delta t$$

Ma gli intervalli di tempo che compaiono al primo e al secondo membro dell'uguaglianza sono tra loro uguali: il tempo nel quale si esercita ognuna delle due azioni è infatti lo stesso, visto che corrisponde alla durata dell'urto. Si ha dunque

$$\vec{F}_{2,1} = -\vec{F}_{1,2}$$

Così, grazie alla legge di conservazione della quantità di moto, sappiamo ora qualcosa di più intorno all'interazione che si stabilisce tra i due corpi durante l'urto: l'azione complessiva, e anche quella istantanea, esercitate dal primo corpo sul secondo sono uguali e contrarie a quelle esercitate dal secondo corpo sul primo. Insomma, ora sappiamo che le due azioni sono perfettamente simmetriche.

La forza

Non ti sarà sfuggito che, nell'indagare sulle caratteristiche delle interazioni tra due corpi che urtano, abbiamo in ultima analisi introdotto una nuova grandezza fisica, l'*azione istantanea di un corpo su un altro*, che abbiamo indicato con il simbolo $\vec{F}$. Ad essa viene dato il nome di **forza**. Ripetiamo che si tratta di una grandezza vettoriale, visto che per mezzo di essa vogliamo indicare non solo il *valore numerico* dell'azione istantanea, ma anche le sue caratteristiche *direzionali*.

Come sempre succede quando fa la sua comparsa una nuova grandezza, è d'obbligo una rapida digressione utile a definirne le dimensioni fisiche e le unità di misura ad essa associate.

Possiamo ricavare l'equazione dimensionale della forza a partire da una delle relazioni appena costruite in cui essa compare, ad esempio dalla relazione

$$\Delta\vec{p}_1 = \vec{F}_{2,1}\,\Delta t$$

Scritta in funzione di $\vec{F}_{2,1}$ questa diventa

$$\vec{F}_{2,1} = \frac{\Delta\vec{p}_1}{\Delta t} = m_1\,\frac{\Delta\vec{v}_1}{\Delta t}$$

Si ha dunque

$$[F] = \frac{[m]\,[v]}{[t]} = M\,L\,T^{-2}$$

Come al solito, nell'equazione dimensionale abbiamo eliminato tutti gli indici: in questo caso, infatti, ci interessa soltanto la natura della forza, di *tutte* le forze, e non di una in particolare.

Se poi desideri conoscere qualche unità di misura della nuova arrivata, non ti serve altro che completare la tabella qui di seguito proposta.

Massa	Lunghezza	Tempo	Forza
kg	m	s	....
g	cm	s	....

Sappi che l'unità di misura della forza nel Sistema Internazionale, che è ovviamente kg · m/s^2, prende il nome di *newton*, e si indica con il simbolo N; l'unità di misura della forza g · cm/s^2 si chiama invece *dyne*, e si lascia scritto proprio così.

URTI ELASTICI

8

Dove si scopre che non sempre c'è un solo verso giusto per guardare le cose

Alcune proprietà dello spazio e del tempo ci sembrano talmente ovvie che le utilizziamo sistematicamente senza nemmeno rendercene conto, o senza sentire il bisogno di esplicitarle.

Sembra del tutto naturale ritenere che lo stesso esperimento (per esempio un urto tra due sfere), effettuato nelle stesse condizioni, dia lo stesso risultato in due luoghi diversi, o ripetuto a distanza di qualche giorno. Questa convinzione istintiva, radicata nell'esperienza, traduce alcune proprietà importanti dello spazio e del tempo che potremmo esplicitare con frasi del tipo: «tutti i punti dello spazio sono equivalenti», o «tutti gli istanti di tempo sono equivalenti». Un matematico direbbe sinteticamente che lo spazio (o il tempo) è *omogeneo*.

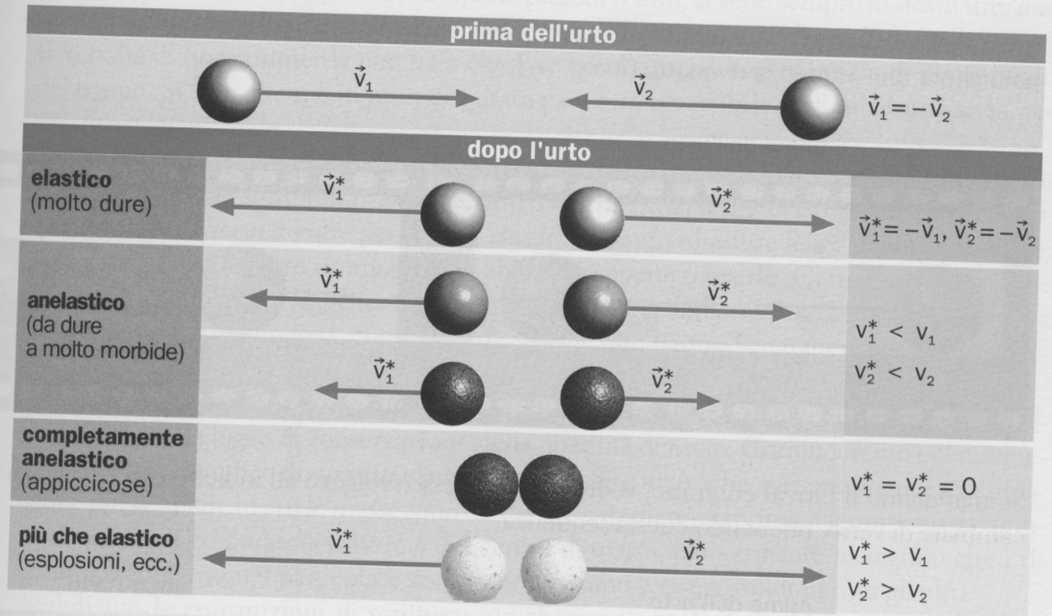
Siamo inoltre certamente convinti del fatto che il risultato di un processo d'urto unidimensionale non dipende dalla particolare orientazione della retta lungo cui avviene il moto dei corpi che urtano, oppure che il tempo impiegato da una pallina a rotolare lungo un piano inclinato non dipende dal fatto che il piano sia orientato verso sud o verso est; potremmo dire allora che «tutte le direzioni dello spazio sono equivalenti», o, per soddisfare il matematico, che lo spazio è *isotropo*.

Insomma, usiamo tutta una serie di proprietà di invarianza senza le quali non sarebbe neanche possibile cominciare a guardare i fenomeni sperando di scoprirvi una qualche regolarità. Nei capitoli precedenti abbiamo fatto uso in modo del tutto immediato di una di queste proprietà «intuitive» dello spazio quando abbiamo deciso (o concluso?) che due sfere identiche che si vengono incontro con velocità uguali e opposte non possono far altro che rimbalzare ancora con velocità uguali e opposte. Ogni altra possibilità, infatti, violerebbe quella che ci appare una ovvia proprietà di simmetria, che possiamo esprimere in modo efficace dicendo che destra e sinistra sono equivalenti.

È stata quindi proprio la considerazione delle proprietà di simmetria dello spazio la mossa iniziale che ci ha condotto all'identificazione della grandezza quantità di moto, a proposito della quale siamo poi arrivati a enunciare una legge di conservazione valida per tutti i sistemi isolati (quali sono, ad esempio, le nostre coppie di sfere che interagiscono in un urto). Per giungere a questo risultato, abbiamo sfruttato, insieme alla simmetria spaziale appena ricordata, un'altra proprietà di invarianza, ancora legata a trasformazioni nello spazio: il fatto che un cambiamento di sistema di riferimento non deve influenzare la nostra descrizione dei fenomeni analizzati. Abbiamo constatato cioè – e lo abbiamo debitamente sottolineato – che c'è una stretta correlazione tra l'esistenza di una legge di conservazione e la soddisfazione di princìpi di simmetria e invarianza: nel nostro caso, la conservazione della quantità di moto risulta strettamente legata alle proprietà di simmetria dello spazio e all'invarianza per trasformazioni galileiane.

Nella nostra deduzione abbiamo fatto largo uso, approfittando dell'arbitrarietà nella scelta

del sistema di riferimento, di quel particolare sistema in cui gli urti appaiono «più semplici», o «simmetrici», cioè del sistema di riferimento del centro di massa. Ti ricordiamo che il sistema del centro di massa è quel particolare sistema di riferimento rispetto al quale la quantità di moto totale del sistema è nulla, vale a dire quello rispetto a cui due corpi che urtano hanno quantità di moto uguali e opposte, sia prima che dopo l'urto.
Abbiamo anche operato una classificazione degli urti: quelli completamente anelastici (in cui i due corpi restano uniti dopo l'urto), quelli parzialmente anelastici, quelli elastici, fino agli «urti più che elastici» che sono in realtà delle esplosioni, o disintegrazioni. Utilizziamo qui di seguito un tipo di tabella che abbiamo già proposto in passato, nella quale sono descritte (con la terminologia che abbiamo nel frattempo messo a punto) le diverse possibilità di urto tra due sfere identiche – cioè di uguale massa – nel caso in cui l'urto sia osservato dal sistema del centro di massa (rispetto al quale, quindi, le velocità delle due sfere sono sempre uguali in direzione e modulo e opposte in verso). Ricorda che in questo caso, dato che le masse sono uguali, parlare di quantità di moto equivale a parlare di velocità.

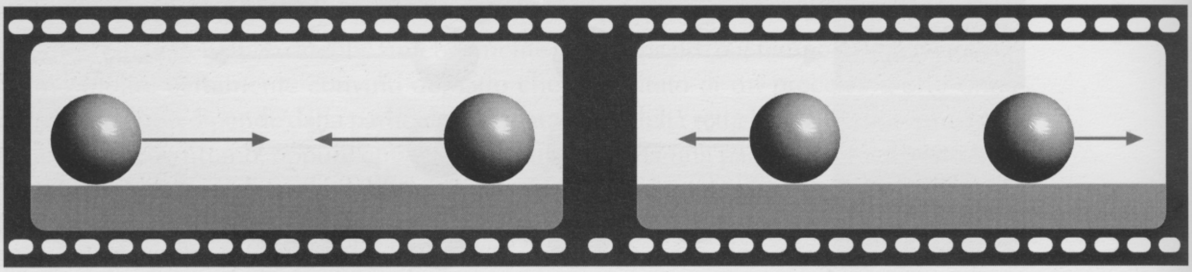


In tutti questi casi la quantità di moto totale delle due sfere rimane la stessa, prima e dopo l'urto. Le cose stanno diversamente, però, per quanto riguarda i valori delle quantità di moto delle singole sfere. Da questo punto di vista, infatti, il caso dell'urto elastico mostra una caratteristica tutta particolare, che è facile scoprire con un rapido sguardo alla tabella. L'urto elastico è l'unico caso in cui il valore assoluto della quantità di moto di *ciascuna* delle due sfere non cambia in seguito all'urto: esse si vengono incontro con velocità uguali e opposte, e rimbalzano con velocità ancora uguali e opposte, e per di più uguali in modulo a quelle che avevano prima di scontrarsi. Negli altri casi, le velocità delle due sfere dopo l'urto sono ancora uguali e opposte, ma il loro modulo è minore di quello delle velocità prima dell'urto se l'urto è anelastico, mentre è maggiore nel caso «più che elastico» di disintegrazioni.
Sembra dunque che l'urto elastico goda, oltre che delle proprietà comuni a tutti i fenomeni d'urto, di una speciale simmetria. Di che tipo di simmetria si tratta? Proviamo a caratterizzarla meglio. Useremo a questo scopo un esempio familiare.

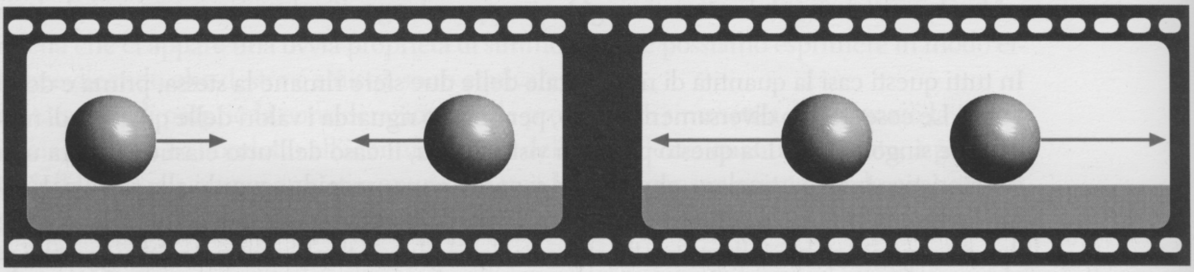
Un film a rovescio

Hai mai visto un film proiettato a rovescio? Un film, cioè, in cui si fanno andare le cose «all'indietro nel tempo»? In genere si ottiene in questo modo un effetto comico di sicuro successo, perché si vedono ogni sorta di fenomeni bizzarri che non possono accadere realmente, come pezzi di un vaso andato in frantumi che si riuniscono a comporre spontaneamente l'oggetto intero, o un liquido che da un bicchiere risale dentro la brocca, e così via. Insomma, in situazioni del genere – questa è la cosa che ci interessa – è possibile, senza equivoci, stabilire qual è il verso «vero» del film, ossia individuare un verso di scorrimento del tempo.
Immagina allora di filmare alcuni processi d'urto e di proiettare poi il film nei due sensi. Sapendo di che tipo di urto si tratta, potresti sempre stabilire qual è il verso giusto in cui la pellicola deve essere vista?

Supponiamo di sapere che è stato filmato un urto anelastico. La pellicola avrà impressionato allora una sequenza di questo tipo.

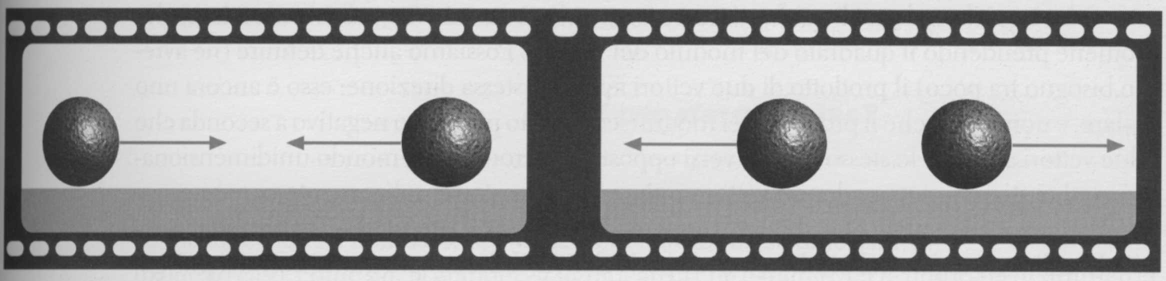


Se mandiamo il film al contrario, vedremo il processo svolgersi all'indietro con le velocità cambiate di verso, ottenendo questa sequenza.



Ma questo secondo urto non è certamente un urto anelastico! Lo si vede immediatamente dal fatto che le velocità delle sfere sono, in modulo, più grandi dopo l'urto che prima di esso. È chiaro dunque che, se sappiamo che la pellicola ha registrato un urto anelastico, possiamo immediatamente concludere che la sequenza corretta non può che essere la prima.
È facile convincersi che, con le opportune modifiche, lo stesso discorso vale nel caso di un'esplosione: ancora una volta è possibile determinare il verso giusto della proiezione, che in questo caso è quello che porta a una crescita del modulo delle velocità dopo l'urto.

Ma che succede se filmiamo un urto elastico?



In questo caso, la sequenza che si ottiene mandando il film all'indietro è esattamente la stessa di quella che si è avuta filmando il processo reale. In altre parole, non c'è modo di stabilire qual è il verso vero del film, o, per dirla altrimenti, non si può determinare un verso di scorrimento del tempo. Comunque si proietti il film, si vede sempre lo stesso urto elastico. Ecco dunque illustrata la natura della particolare simmetria di cui godono questi urti: si tratta di una simmetria che ha a che fare con l'equivalenza del verso di scorrimento del tempo. Si dice che si è in presenza di un **processo reversibile**, o di una **invarianza per inversione temporale**.

Nello studio degli urti, partendo dall'esistenza di una proprietà di invarianza (o, come anche si dice, di una simmetria), siamo giunti a definire una legge di conservazione. È dunque legittimo il sospetto che per gli urti elastici valga un'ulteriore legge di conservazione, collegata alla particolare simmetria che abbiamo appena scoperto. Ci metteremo dunque alla ricerca della nuova legge tentando di rispondere alla domanda: qual è la grandezza che si conserva in quei processi, come gli urti elastici, che hanno la caratteristica di essere reversibili, cioè di godere della proprietà di invarianza per inversione temporale?

Seguiremo, per questa ricerca, una strategia del tutto analoga a quella che ci ha portato alla scoperta della legge di conservazione della quantità di moto. Cominceremo col discutere il caso più semplice di un urto elastico tra due sfere identiche, per passare poi alla situazione più generale in cui le masse sono differenti; e studieremo prima il fenomeno dal punto di vista, più comodo, del sistema del centro di massa, per verificare in seguito che i risultati ottenuti in quel particolare sistema continuano a essere validi in tutti gli altri.

Stabiliamo le convenzioni di scrittura: indicheremo con S il generico sistema di riferimento, e con S' il sistema del centro di massa, in moto con velocità $\vec{u}$ rispetto a S. Chiameremo $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, in S, e $\vec{v}'_1$ e $\vec{v}'_2$, in S', le velocità delle due sfere prima dell'urto; indicheremo invece con i simboli $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$ (in S) e $\vec{w}'_1$ e $\vec{w}'_2$ (in S') quelle dopo l'urto.

Urti elastici tra sfere identiche

Nel caso di sfere identiche (cioè aventi masse uguali), per qualunque tipo di urto valgono in S' le seguenti relazioni

$$\vec{v}'_1 = -\vec{v}'_2 \qquad \vec{w}'_1 = -\vec{w}'_2$$

La reversibilità che caratterizza gli urti elastici si esprime nel fatto che per questi urti è anche vero che

$$\vec{v}'_1 = -\vec{w}'_1 \qquad \vec{v}'_2 = -\vec{w}'_2$$

In un urto elastico, insomma, resta costante il modulo della velocità di ciascuna sfera.
A questo punto abbiamo bisogno di una breve digressione per definire l'operazione matematica di elevamento al quadrato di un vettore. La regola è semplice: il quadrato di un vettore – che è poi il prodotto di quel vettore per se stesso – è un numero, cioè uno scalare, che si ottiene prendendo il quadrato del modulo del vettore. Possiamo anche definire (ne avremo bisogno tra poco) il prodotto di due vettori aventi la stessa direzione: esso è ancora uno scalare, e non è altro che il prodotto dei moduli, con segno positivo o negativo a seconda che i due vettori abbiano lo stesso verso o versi opposti. D'altronde, nel mondo unidimensionale in cui ci stiamo muovendo, un vettore può essere pensato semplicemente come un numero relativo; e le regole che abbiamo appena definito per il prodotto tra vettori sono proprio le ordinarie regole del prodotto tra numeri relativi. Vedremo più avanti come si può generalizzare l'operazione di prodotto tra vettori al caso in cui essi abbiano direzioni diverse.
La definizione di queste nuove operazioni vettoriali ci permette di manipolare in un modo che si rivelerà particolarmente efficace le relazioni matematiche relative all'urto elastico che abbiamo scritto poco sopra. Cominciamo con l'elevarle al quadrato e poi addizioniamole tra loro membro a membro. Si ottiene

$$v_1'^2 + v_2'^2 = w_1'^2 + w_2'^2$$

Vediamo dunque che, almeno nel caso in cui l'urto elastico viene descritto dal sistema del centro di massa S', possiamo costruire una quantità conservata, pari alla somma dei quadrati delle velocità prima e dopo l'urto.
Per essere una buona legge, la relazione tra i quadrati delle velocità che abbiamo trovato rispetto a S' deve rimanere valida anche rispetto a ogni altro sistema di riferimento S: un urto è elastico o non lo è indipendentemente dal sistema di riferimento in cui viene osservato. Per vedere se questa condizione è soddisfatta, esprimiamo le velocità che compaiono nella legge in funzione delle corrispondenti velocità rispetto al sistema di riferimento S. Dalle trasformazioni galileiane si ha

$$\vec{v}_1' = \vec{v}_1 - \vec{u} \qquad \vec{v}_2' = \vec{v}_2 - \vec{u}$$

$$\vec{w}_1' = \vec{w}_1 - \vec{u} \qquad \vec{w}_2' = \vec{w}_2 - \vec{u}$$

La legge di conservazione

$$v_1'^2 + v_2'^2 = w_1'^2 + w_2'^2$$

diventa allora

$$(\vec{v}_1 - \vec{u})^2 + (\vec{v}_2 - \vec{u})^2 = (\vec{w}_1 - \vec{u})^2 + (\vec{w}_2 - \vec{u})^2$$

Effettuando gli elevamenti al quadrato si ha

$$v_1^2 + u^2 - 2\vec{v}_1\vec{u} + v_2^2 + u^2 - 2\vec{v}_2\vec{u} = w_1^2 + u^2 - 2\vec{w}_1\vec{u} + w_2^2 + u^2 - 2\vec{w}_2\vec{u}$$

Eliminiamo ora i termini in u^2 (che compaiono in entrambi i membri), e mettiamo in evidenza, dove possibile, il fattore comune $\vec{u}$

$$v_1^2 + v_2^2 - 2\vec{u}\,(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = w_1^2 + w_2^2 - 2\vec{u}\,(\vec{w}_1 + \vec{w}_2)$$

La legge di conservazione della quantità di moto ci assicura del resto che, per masse uguali, è senz'altro

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$$

La nostra uguaglianza diventa dunque

$$v_1^2 + v_2^2 = w_1^2 + w_2^2$$

Come vedi, c'è da stare tranquilli: la relazione cui ci siamo ridotti, infatti, ci dice che anche rispetto a S la somma dei quadrati delle velocità prima dell'urto è uguale a quella dopo l'urto. Possiamo perciò concludere che la legge di conservazione degli urti elastici che avevamo individuato in S' rimane valida anche in S.

E per sfere diverse?

Tutto bene, dunque, finché le sfere sono identiche. Come cambia la situazione se questa condizione viene a mancare, se cioè le sfere hanno masse differenti?
In questo caso, come sai, la grandezza significativa che caratterizza le proprietà di simmetria dell'urto non è più semplicemente la velocità, ma la quantità di moto. Per ogni urto la quantità di moto totale rispetto a S' è zero, e questo si può anche scrivere così (usiamo il simbolo $\vec{p}$ per indicare le quantità di moto prima dell'urto, e il simbolo $\vec{q}$ per quelle dopo l'urto)

$$\vec{p}_1' = -\vec{p}_2' \qquad \vec{q}_1' = -\vec{q}_2'$$

ovvero

$$m_1\vec{v}_1' = -m_2\vec{v}_2' \qquad m_1\vec{w}_1' = -m_2\vec{w}_2'$$

L'urto elastico è caratterizzato dalla particolare simmetria

$$\vec{p}_1' = -\vec{q}_1' \qquad \vec{p}_2' = -\vec{q}_2'$$

cioè

$$m_1\vec{v}_1' = -m_1\vec{w}_1' \qquad m_2\vec{v}_2' = -m_2\vec{w}_2'$$

Come possiamo generalizzare a questo caso la nostra legge di conservazione valida per urti elastici tra corpi identici? Senza andare troppo per le lunghe, ecco cosa faremo, utilizzando una tecnica analoga a quella seguita per la conservazione della quantità di moto. Lì avevamo una legge per le velocità, valida per masse uguali; ne abbiamo ricavato una valida in generale «pesando» le velocità con le masse. Ora abbiamo, per gli urti elastici tra sfere di massa uguale, una legge per i quadrati delle velocità; cerchiamo allora la legge valida in generale «pesando» ancora una volta con le masse i quadrati delle velocità. Proviamo cioè a vedere se è valida una legge di conservazione del tipo

$$m_1v_1^2 + m_2v_2^2 = m_1w_1^2 + m_2w_2^2$$

È facile verificare che la nostra (per il momento ipotetica) legge è soddisfatta per gli urti elastici in S'. Abbiamo infatti già ricordato che rispetto a questo sistema di riferimento si ha

$$m_1\vec{v}_1' = -m_1\vec{w}_1' \qquad m_2\vec{v}_2' = -m_2\vec{w}_2'$$

Dunque rispetto a S', anche con masse diverse, sono ancora verificate le uguaglianze

$$\vec{v}_1' = -\vec{w}_1' \qquad \vec{v}_2' = -\vec{w}_2'$$

Elevando al quadrato, moltiplicando la prima espressione per m_1 e la seconda per m_2, e infine addizionandole tra loro membro a membro, si ottiene proprio la legge di conservazione

$$m_1v_1'^2 + m_2v_2'^2 = m_1w_1'^2 + m_2w_2'^2$$

Dobbiamo ora controllare che la stessa relazione resti valida in altri sistemi di riferimento. Analogamente a quanto fatto in precedenza, esprimiamo le velocità che compaiono nella legge di conservazione in funzione delle corrispondenti velocità rispetto a S. La legge di conservazione

$$m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2 = m_1 w_1'^2 + m_2 w_2'^2$$

si traduce allora nella forma

$$m_1(\vec{v}_1 - \vec{u})^2 + m_2(\vec{v}_2 - \vec{u})^2 = m_1(\vec{w}_1 - \vec{u})^2 + m_2(\vec{w}_2 - \vec{u})^2$$

Effettuando gli elevamenti al quadrato si ha

$$m_1 v_1^2 + m_1 u^2 - 2m_1 \vec{v}_1 \vec{u} + m_2 v_2^2 + m_2 u^2 - 2m_2 \vec{v}_2 \vec{u} =$$
$$= m_1 w_1^2 + m_1 u^2 - 2m_1 \vec{w}_1 \vec{u} + m_2 w_2^2 + m_2 u^2 - 2m_2 \vec{w}_2 \vec{u}$$

Eliminiamo ora i termini in u^2 (che compaiono in entrambi i membri), e mettiamo in evidenza, dove possibile, il fattore comune $\vec{u}$

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 - 2\vec{u}\,(m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2) = m_1 w_1^2 + m_2 w_2^2 - 2\vec{u}\,(m_1 \vec{w}_1 + m_2 \vec{w}_2)$$

Dalla legge di conservazione della quantità di moto totale (espressa rispetto al sistema di riferimento S) si ha però

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{w}_1 + m_2 \vec{w}_2$$

La nostra uguaglianza diventa perciò

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 w_1^2 + m_2 w_2^2$$

Dunque, dal fatto che la nostra ipotetica legge di conservazione è soddisfatta in S' segue che essa è valida anche in ogni altro S, e per qualunque valore delle masse m_1 e m_2.

Una nuova legge di conservazione

Abbiamo così costruito una nuova legge, che ha la forma di un principio di conservazione, valida per quei particolari urti che non distinguono, per così dire, il verso di scorrimento del tempo. Soddisfatti per avere ulteriormente provato la connessione che esiste tra una proprietà di invarianza e una legge di conservazione, teniamoci per il momento la legge, valida per gli urti elastici, per i quali si ha

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = \text{costante}$$

Più avanti estenderemo questa linea di ragionamento ad altri processi che hanno le stesse caratteristiche di reversibilità degli urti elastici, ma per i quali la legge di conservazione relativa dovrà essere opportunamente riformulata.

Domande di verifica

1 Abbiamo visto che in S', anche con masse diverse, se l'urto è elastico si ha che

$$\vec{v}_1' = -\vec{w}_1' \qquad \vec{v}_2' = -\vec{w}_2'$$

Si potrebbe allora elevare al quadrato entrambi i membri delle due relazioni e moltiplicarli poi, anziché per le masse, come abbiamo fatto, per le masse al quadrato (o per qualunque altra potenza delle masse) e ottenere quindi, sommando, relazioni come la seguente

$$m_1^2 v_1'^2 + m_2^2 v_2'^2 = m_1^2 w_1'^2 + m_2^2 w_2'^2$$

Seguendo la strategia da noi utilizzata, dimostra che questa relazione (e tutte quelle che si possono costruire con diverse potenze delle masse) non è però soddisfatta se si passa da S' a un qualunque S, e che dunque l'unico modo giusto di «pesare» i quadrati delle velocità con le masse è quello che abbiamo scelto.