Nello spazio a tre dimensioni, per due sistemi S ed S' in moto relativo uniforme lungo l'asse x, le trasformazioni di Lorentz, così come le trasformazioni di Galilei, lasciano invariate le coordinate y e z: $y' = y$, $z' = z$

Che succede alle componenti v_y e v_z della velocità?

Nelle TG, niente: $v_y = \Delta y/\Delta t$ e $v_z = \Delta z/\Delta t$, e dato che $\Delta y' = \Delta y$, $\Delta z' = \Delta z$, e $\Delta t' = \Delta t$, si ha che $v_y' = v_y$ e $v_z' = v_z$

Nelle TL, invece, mentre è ancora $\Delta y' = \Delta y$ e $\Delta z' = \Delta z$, non è più vero che $\Delta t' = \Delta t$: dunque le componenti della velocità perpendicolari al moto relativo dei due SR vengono alterate dalla trasformazione, e questo ha come conseguenza che, se si mantiene la definizione classica di quantità di moto come $\underline{p} = m\underline{v}$, non risulta più valido il principio della conservazione della quantità di moto. Perché esso rimanga valido occorre ridefinire la quantità di moto coerentemente con le nuove proprietà di simmetria dello spazio-tempo relativistico.

L'espressione della quantità di moto relativistica, che lascia valida in tutti i SR la relativa legge di conservazione, è

$$\underline{p} = m\,\gamma\,\underline{v}$$

dove γ è il solito termine $1/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$, in cui v è la velocità del corpo di massa m. La quantità di moto (impulso) è ancora formata dal prodotto di una proprietà intrinseca del corpo (la massa) per un termine cinematico, ma quest'ultimo non è più la semplice velocità $\underline{v}$, ma è dato dal prodotto $\gamma\,\underline{v}$.
Come sempre, per piccole velocità ($v \ll c$), si ha che $\gamma \cong 1$ e si riottiene l'espressione classica dell'impulso $\underline{p} = m\,\underline{v}$.
N.B.: d'ora in avanti, i simboli delle grandezze la cui natura vettoriale non può essere ignorata saranno sottolineati: $\underline{p}$ è il vettore quantità di moto, p il suo modulo, etc.

La legge fondamentale della dinamica resta sempre la stessa: la presenza di una interazione produce una variazione dello stato di moto del corpo: $\underline{F} = d\underline{p}/dt$

Ora però si ha

$\underline{F} = d\underline{p}/dt = m\, d(\gamma \underline{v})/dt = m\, \gamma\, d\underline{v}/dt + m\, \underline{v}\, d\gamma/dt =$

$= m\, \gamma\, \underline{a} + m\, \underline{v}\, d\gamma/dv\, dv/dt = m\, \gamma\, \underline{a} + m\, \underline{v}\, (v/c^2\, \gamma^3)\, dv/dt$

Forza e accelerazione non sono più (in generale) parallele.

Casi particolari:

forza perpendicolare alla velocità: $dv/dt = 0$, resta $\underline{F} = m\, \gamma\, \underline{a}$

($m\gamma$ “massa trasversale”: la vecchia “massa elettromagnetica”

forza parallela alla velocità: $F = m\, (\gamma + v^2/c^2\, \gamma^3)\, dv/dt$;

$m\, (\gamma + v^2/c^2\, \gamma^3)$ “massa longitudinale”: l’inerzia cresce con la velocità come γ^3, e questo rende impossibile accelerare un corpo fino alla velocità della luce

Energia relativistica

$\gamma^2 = 1/(1 - v^2/c^2)$ ➔ $\gamma^2 - \gamma^2 v^2/c^2 = 1$

moltiplichiamo per $m^2 c^4$: $m^2 \gamma^2 c^4 - m^2 \gamma^2 v^2 c^2 = m^2 c^4$

$m \gamma v = p$ ➔ $(m \gamma c^2)^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4$

Abbiamo costruito un invariante ($m^2 c^4$) con un termine che contiene il quadrato dell'impulso e un altro che è il quadrato di una grandezza con le dimensioni di una energia

Energia $E = m \gamma c^2$?

Criterio generale: a basse velocità vorremmo che la nuova espressione dell'energia restituisse la forma classica $\frac{1}{2} m v^2$.
Per vederlo ricorriamo alla approssimazione, valida per $\alpha \ll 1$
$1/(1 - \alpha)^{1/2} \cong 1 + \alpha/2$ (+ potenze superiori di α trascurabili)

Allora si ottiene, per $v^2/c^2 << 1$
$\gamma = 1 + \frac{1}{2}\ v^2/c^2$ + potenze più elevate di v^2/c^2

$E = m\gamma c^2 \cong m c^2 (1 + \frac{1}{2}\ v^2/c^2) = mc^2 + \frac{1}{2} m v^2$

Energia cinetica = $mc^2 (\gamma - 1) \cong \frac{1}{2} m v^2$ per $v << c$
mc^2 è detta anche "energia di riposo", l'energia che un corpo ha per il solo fatto di avere una massa.

La relazione fondamentale è $E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$

In fisica delle particelle si usa dare i valori delle masse direttamente in energia equivalente mc^2 (usando come unità di misura l'eV e i suoi multipli ($1\ eV = 1{,}6\ 10^{-19}\ J$)
massa dell'elettrone $m_e = 0{,}911\ 10^{-30}\ kg$
$m_e c^2 = 0{,}911\ 10^{-30}\ 9\ 10^{16}\ J = 5{,}1\ 10^5\ eV = 0{,}51\ MeV$
massa del protone $m_p = 1{,}673\ 10^{-27}\ kg$
$m_p c^2 = 1{,}673\ 10^{-27}\ 9\ 10^{16}\ J = 9{,}38\ 10^8\ eV = 938\ MeV \cong 1\ GeV$

Che vuol dire "alte energie"?

Confrontiamo ordini di grandezza delle energie cinetiche

protone del fascio di LHC $E_c \cong 1$ TeV (10^{12} eV)

palla da tennis $E_c \cong m\,v^2 \cong 10^{-1}\,10^2$ J $\cong 10$ J $\cong 10^6$ TeV !

Il valore assoluto dell'energia non significa nulla. Il confronto va fatto tra l'energia cinetica e l'energia di riposo del corpo.

protone ($mc^2 \cong 1$ GeV) $E_c \cong 10^{12}$ eV $\cong 10^3$ GeV $\gg mc^2$

palla da tennis ($mc^2 \cong 10^{16}$ J $\cong 10^{35}$ eV $\cong 10^{23}$ TeV)

$$E_c \cong 10^6 \text{ TeV} \ll mc^2$$

"Alta energia" vuol dire energia grande in confronto all'energia di riposo

Trasformazioni di energia e impulso

Come cambiano i valori di E e p nel passaggio da un sistema di riferimento S ad S' in moto con velocità u rispetto ad S?
L'intervallo di tempo proprio (invariante) è $\Delta\tau = \Delta t/\gamma$

$$E = m\,\gamma\,c^2 \;\Rightarrow\; E/c^2 = (m/\Delta\tau)\;\Delta t$$

$$p = m\,\gamma\,v = m\,(\Delta t/\Delta\tau)\,(\Delta x/\Delta t) = (m/\Delta\tau)\,\Delta x$$

A meno del termine invariante $(m/\Delta\tau)$ si vede che p ed E/c^2 cambiano esattamente come Δx e Δt. Le trasformazioni di E e p si ottengono immediatamente dalle TL sostituendo p a x ed (E/c^2) a t:

$$p' = \gamma\,(p - u/c^2\,E) \qquad\qquad E' = \gamma\,(E - u\,p)$$

Meccanica classica $p = m\,v$ $E = \frac{1}{2}\,m\,v^2 = p^2/2m$

Ora è $p = m\,\gamma\,v$ $E = m\,\gamma\,c^2$ $E = p\,c^2/v$

Ipotetici "oggetti" in moto con velocità c dovrebbero quindi avere energia $E = p\,c^2/c = p\,c$. Ma allora, dalla relazione

$$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$$

si vede che dovrebbero avere massa nulla (il che è coerente col fatto che, essendo, per $v = c$, $\gamma = \infty$, per avere energia e quantità di moto finiti deve appunto essere $m = 0$)

Questi "oggetti" sono i quanti di luce ipotizzati da Einstein nel 1905 e in seguito battezzati "fotoni"

La relazione

$$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4$$

è valida per una singola particella come per un sistema di corpi, intendendo con E l'energia totale del sistema, con p il modulo della sua quantità di moto totale, e con m la sua massa (invariante). Da qui segue che la massa di un sistema di corpi non è uguale alla somma delle masse dei suoi costituenti, ma è una proprietà collettiva che dipende dal loro stato di moto relativo (dal valore della quantità di moto totale). In particolare, la massa del sistema è uguale alla sua energia totale calcolata nel sistema di riferimento in cui la quantità di moto totale è uguale a zero (sistema del centro di massa)

Digressione linguistica   (la "massa relativistica")

In molte presentazioni della relatività si usa scrivere le espressioni dell'impulso e dell'energia così

$p = m\,v$, $E = m\,c^2$,   con $m = m_0\,\gamma$

(chiamando cioè m_0 quella che per noi era semplicemente m, e introducendo il concetto di "massa a riposo" m_0 e di "massa relativistica", che dipende dalla velocità $m = m_0\,\gamma$)
Questo modo di presentare le relazioni fondamentali della dinamica relativistica ha origini storiche (ed è per questa ragione ancora molto diffuso), ma è fuorviante dal punto di vista concettuale e rischia di condurre a considerazioni non solo ambigue ma fondamentalmente errate.