Due sistemi di riferimento S e S' in moto relativo rettilineo uniforme

u = velocità di S' rispetto a S

Convenzione sulle condizioni iniziali: O = O' quando t = t' = 0

Trasformazioni galileane (TG)

1) $x' = x - ut$

2) $t' = t$

3) $v' = v - u$

Se vogliamo che sia $c' = c$ è necessaria una modifica delle TG (la 3) implica infatti che sia $c' = c - u$)

Proviamo a modificare la 1) nel modo più "indolore"

$$x' = \gamma\,(x - u\,t)$$

vediamo se è possibile determinare per la incognita γ una forma soddisfacente, che cioè trasformi l'equazione di un raggio di luce emesso in O a $t = 0$

$$x = c\,t$$

In un raggio di luce emesso in O' a $t' = 0$ e che viaggia in S' con la stessa velocità c

$$x' = c\,t'$$

Sappiamo (o possiamo ragionevolmente imporre) alcune proprietà di γ

deve dipendere da c (deve essere funzione di c)

deve essere priva di dimensioni fisiche (adimensionale)

quindi non può dipendere solo da c: è ragionevole che dipenda dal rapporto adimensionale u/c

anzi, dal quadrato del rapporto u/c, per non dipendere dal particolare segno di u e c ➔ $\gamma = f\,(u^2/c^2)$

per piccoli valori di u ($u \ll c$) le TG vanno bene, quindi vogliamo che quando $u/c \rightarrow 0$, $\gamma \rightarrow 1$

Allora, sostituendo in $x' = \gamma\,(x - u\,t)$

$x = c\,t$ e $x' = c\,t'$ si ottiene

$c\,t' = \gamma\,(c\,t - u\,t)$

e, dato che per noi è ancora $t' = t$,

$\gamma = c\,/\,(c - u) = 1/\,(1 - u/c)$

che ha tutte le proprietà richieste, salvo il fatto che dipende dal segno di u/c, il che non ci piace affatto

Ma allora, per mettere le cose a posto, bisogna modificare anche la 2) ($t' = t$)!

Proviamo allora per simmetria una cosa di questo tipo

$$x' = \gamma\,(x - u\,t)$$

$$t' = \gamma\,(t - \alpha\,x)$$

sostituendo $x = c\,t$ e $x' = c\,t'$ si ottiene

$$\gamma\,(c\,t - u\,t) = c\,\gamma\,(t - \alpha\,c\,t)$$

da cui $(c - u) = c\,(1 - \alpha\,c) \;\Rightarrow\; \alpha = u/c^2$

$$x' = \gamma\,(x - u\,t)$$

$$t' = \gamma\,(t - u/c^2\,x)$$

La trasformazione inversa (da S' ad S) è ovviamente

$$x = \gamma\,(x' + u\,t')$$

sostituendo le espressioni per x' e t' si ottiene

$$x = \gamma\,[\,\gamma\,(x - u\,t) + u\,\gamma\,(t - u/c^2\,x)\,]$$

da cui si ricava l'espressione esplicita per γ

$$\gamma = 1 / (\,1 - u^2/c^2\,)^{1/2}$$

che ha tutte le caratteristiche giuste

Trasformazioni di Lorentz (TL)

$x' = \gamma\,(x - u\,t)$

$t' = \gamma\,(t - u/c^2\,x)$

(con $\gamma = 1 / (1 - u^2/c^2)^{1/2}$; è sempre $\gamma > 1$)

legge di composizione delle velocità

$\Delta x' = \gamma\,(\Delta x - u\,\Delta t)$, $\Delta t' = \gamma\,(\Delta t - u/c^2\,\Delta x)$

$v' = \Delta x' / \Delta t' = (v - u)/(1 - uv/c^2)$

quando è $v << c$, $v' \rightarrow v - u$; ma quando è $v = c$, si ottiene ancora $v' = c$ …e noi siamo pienamente soddisfatti

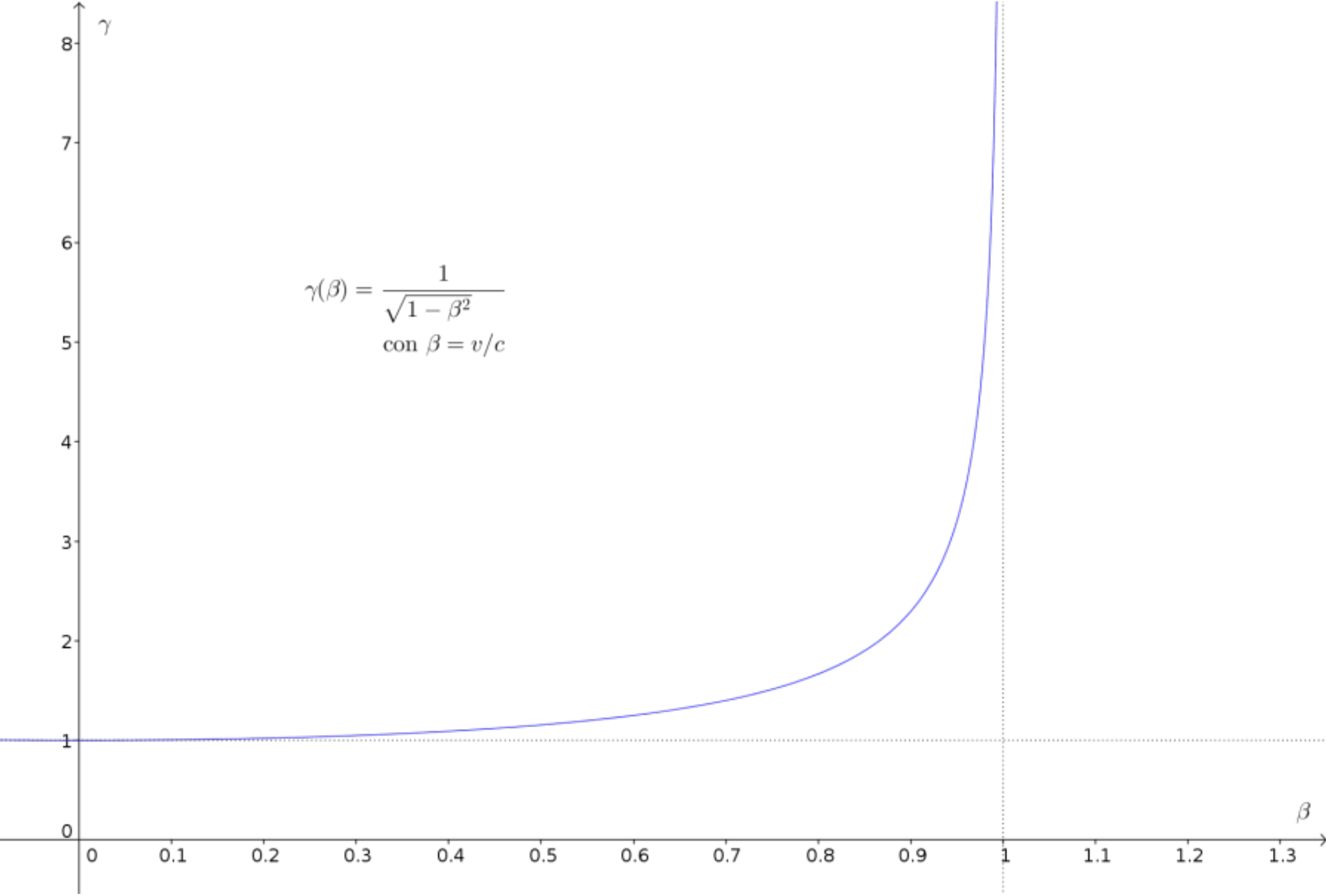

Grafico dell'andamento di γ in funzione di β = v/c

Evento = coppia di coordinate (x, t)
(nel punto x succede una certa cosa all'istante t)

due eventi simultanei in S: (x_1, t_1) e (x_2, t_2) con $t_1 = t_2$

In S'

$$t_1' = \gamma\,(t_1 - u/c^2\, x_1)$$

$$t_2' = \gamma\,(t_2 - u/c^2\, x_2)$$

e, poiché $t_1 = t_2$ ma $x_1 \neq x_2$, $t_1' \neq t_2'$

La simultaneità è un concetto relativo. Due eventi simultanei in S non lo sono in S'

Due eventi in S (x_1, t_1) e (x_2, t_2) nello stesso punto $(x_1 = x_2)$ separati da un intervallo temporale $\Delta t = t_2 - t_1$

In S'

$$t_2' = \gamma\,(t_2 - u/c^2\, x_2)$$

$$t_1' = \gamma\,(t_1 - u/c^2\, x_1)$$

e, poiché è $x_1 = x_2$, si ha $\Delta t' = t_2' - t_1' = \gamma\,(t_2 - t_1) > \Delta t$

Gli intervalli temporali (durate) non sono invarianti.
La misura di intervalli temporali tra eventi visti "in moto" è superiore alla misura effettuata in sistemi di riferimento In cui gli eventi sono "a riposo" (tempo proprio).
("dilatazione dei tempi")

Lunghezza = distanza tra due punti le cui coordinate sono fisse, o, se non lo sono, vengono rilevate allo stesso istante

Due punti fissi in S: (x_1, t_1) e (x_2, t_2) $L = x_2 - x_1$

La lunghezza L' in S' è la differenza tra x_2' e x_1' misurati <u>allo stesso istante di tempo in S'</u>. Dalle trasformazioni inverse

$x_1 = \gamma\,(x_1' + u\,t_1')$, $x_2 = \gamma\,(x_2' + u\,t_2')$ con $t_1' = t_2'$, si ha

$L' = x_2' - x_1' = (x_2 - x_1)/\gamma = L/\gamma < L$

Le lunghezze non sono invarianti. La misura di una lunghezza "in moto" è minore di quella della stessa lunghezza "a riposo" ("contrazione delle lunghezze")