MOTI CASUALI

Dove, incredibilmente, si arriva a fare chiarezza perdendosi nei fumi dell'alcool

Sappiamo ormai bene (almeno in linea di principio) come ricostruire dettagliatamente il moto di un corpo, una volta che siano note le condizioni iniziali del moto e le forze agenti.

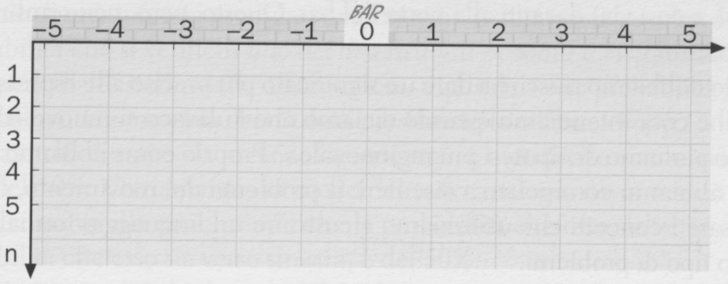
Esistono tuttavia un gran numero di situazioni in cui non è possibile ottenere la descrizione precisa del movimento attraverso gli strumenti e i metodi che abbiamo messo a punto finora; le cause di questa impossibilità possono essere diverse. Piuttosto che fare adesso un elenco dei vari motivi che possono condurre a questo tipo di difficoltà, preferiamo entrare direttamente in argomento proponendoti di riflettere su una situazione inedita quanto incresciosa.

Dunque, immaginiamo un ubriaco che, uscito (molto ubriaco) dalla porta del bar, fa ogni dieci secondi un passo lungo un metro sul marciapiede; ciascun passo può essere verso destra o verso sinistra, del tutto a caso. Sapresti dire dove si troverà l'ubriaco dopo dieci passi (cioè dopo cento secondi, o, se preferisci, dopo un minuto e quaranta secondi)?

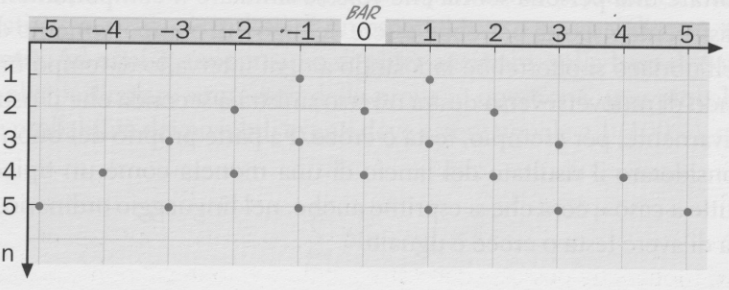
Non ci è difficile prevedere che avrai risposto negativamente. Per come è formulato il problema, non solo non è possibile determinare la posizione dell'ubriaco dopo cento secondi, ma nemmeno quella dopo dieci secondi, quando cioè ha fatto un passo solo! Già allora, infatti, è possibile che si trovi un metro a destra o un metro a sinistra della porta del bar. Dopo dieci passi, potrebbe trovarsi dieci metri a sinistra come dieci metri a destra, o in una quantità di posizioni intermedie.

La passeggiata dell'ubriaco

Ti proponiamo allora il seguente esercizio: determina le posizioni in cui l'ubriaco *potrebbe* trovarsi dopo uno, due, ..., dieci passi (cioè dopo dieci, venti, ..., cento secondi). Puoi dare una rappresentazione grafica del risultato usando il seguente schema, in cui in ascisse è riportata la posizione sul marciapiede (lo zero coincide con la porta del bar, punto di partenza dell'ubriaco), e in ordinate, crescenti verso il basso, il numero di passi fatti (o il tempo, in unità uguali a dieci secondi). Per ogni valore di n (da 1 a 10), segna allora i punti in cui l'ubriaco potrebbe trovarsi dopo n passi (ovvero dopo $10n$ secondi).



Avrai ottenuto (o almeno *dovresti* avere ottenuto) una figura di questo tipo.



Dunque, ad esempio, per $n = 5$ (cioè dopo 50 secondi) abbiamo 6 posizioni possibili (5 m o 3 m o 1 m a sinistra o, ancora, 5 m o 3 m o 1 m a destra della porta del bar). E, aumentando il numero dei passi (il tempo trascorso), cresce il numero delle posizioni che l'ubriaco potrebbe trovarsi a occupare, cosicché non è proprio possibile prevedere con sicurezza dove si troverà in quel momento il nostro amico.
Tuttavia, il fatto di non poter fare previsioni *certe* sul futuro del pover'uomo non significa che non si possano fare delle previsioni *ragionevoli*. Che cosa vogliamo dire? Converrai con noi che sembra poco verosimile, ad esempio, la prospettiva di trovare l'ubriaco, dopo cento secondi, a una distanza di dieci metri dall'ingresso del bar. Se infatti i suoi movimenti sono del tutto a caso, essi saranno, in genere, in parte verso destra e in parte verso sinistra, e sembra perciò ragionevole aspettarsi di trovarlo in qualche punto intermedio (diciamo a quattro o sei metri dal punto di partenza) piuttosto che a dieci metri, posizione raggiungibile solo con una sequenza di dieci spostamenti tutti nello stesso verso.
Seguendo questo tipo di indicazione, ti chiediamo ora di rispondere alla domanda iniziale, riformulata però nel modo seguente: dove è più ragionevole aspettarsi di trovare, dopo cento secondi, l'ubriaco del problema precedente?

Nutriamo qualche dubbio sul fatto che tu abbia saputo rispondere senza incertezze a questa domanda. Può darsi, però, che tu abbia fatto un ragionamento simile a quello che ora ti proponiamo: dire che l'ubriaco si sposta del tutto a caso significa che per lui è indifferente, a ogni passo, andare verso destra o verso sinistra; ma, allora, la cosa più ragionevole è supporre che, dopo un certo numero di passi, tanti saranno stati quelli verso destra quanti quelli verso sinistra, e che quindi l'ubriaco si troverà di nuovo al punto di partenza!
Sembra che funzioni, ma solo fino a un certo punto. Messo così, il ragionamento dovrebbe infatti valere per qualunque numero n di passi (più precisamente: per qualunque numero *n pari* di passi), e si dovrebbe dunque trarre la conclusione che l'ipotesi più ragionevole (almeno per un numero pari di passi) è che l'ubriaco si troverà sempre (dopo 2 passi,

4 passi, 6 passi, e così via) davanti alla porta del bar. Questo, però, *non* sembra molto convincente...
A questo punto dobbiamo riuscire a dare un significato più preciso alle espressioni che stiamo usando; che cosa intendiamo quando diciamo che l'ubriaco si muove «del tutto a caso»? E quando parliamo di «ipotesi più ragionevole»? Proprio come abbiamo fatto nel momento in cui abbiamo cominciato a discutere il problema del movimento, dobbiamo insomma precisare i concetti che utilizziamo e costruire un linguaggio formale adeguato a trattare questo tipo di problemi.
Torniamo perciò alla formulazione originale del nostro problema; tutto è detto in modo chiaro e non ambiguo, tranne l'espressione «del tutto a caso».
Per attribuire a essa un significato preciso, poniamoci la seguente domanda: come si potrebbe comportare una persona sobria che volesse simulare il comportamento dell'ubriaco? Una soddisfacente risposta potrebbe essere del tipo: un comportamento del tutto simile a quello dell'ubriaco si otterrebbe lanciando a ogni intervallo di tempo una moneta in aria e decidendo di muoversi verso destra o verso sinistra a seconda che il risultato del lancio sia rispettivamente, per esempio, testa o croce. Fa parte proprio del buon senso comune, infatti, considerare il risultato del lancio di una moneta come un tipico esempio di evento «del tutto a caso»; cosa che si esprime anche, nel linguaggio ordinario, dicendo che la **probabilità** di avere testa o croce è uguale.

Probabilità

Probabilità: ecco la parola nuova che sembra fare al caso nostro. Appena usciamo dal mondo rigorosamente determinato in cui il movimento si può prevedere e descrivere con certezza, dobbiamo infatti limitarci a considerazioni probabilistiche. Vale allora la pena, proprio come abbiamo fatto per altre parole del linguaggio comune (velocità, forza, ecc.) di analizzare l'uso che si fa della parola probabilità nella vita di tutti i giorni, per precisarne meglio il significato.
Vediamo, dunque: perché diciamo che c'è un'uguale probabilità di avere testa o croce? Sembra chiaro: perché non c'è nessuna particolare ragione per cui debba avvenire una cosa piuttosto che l'altra. Cioè – diciamolo diversamente – perché il fenomeno in esame (il lancio di una moneta) presenta un'intrinseca simmetria che autorizza ad attribuire *a priori* uguale probabilità ai suoi due diversi risultati (testa o croce).
Ma questa è anche la situazione nel caso del nostro problema dell'ubriaco. Destra e sinistra sono per lui del tutto equivalenti; invece di dire, allora, che l'ubriaco si muove «del tutto a caso», diremo piuttosto che la probabilità che egli faccia un passo verso destra è uguale alla probabilità che ne faccia uno verso sinistra.
Abbiamo quindi trovato una risposta al nostro primo problema: il risultato di una prova è «del tutto a caso» quando i diversi esiti hanno uguale probabilità. È così per il singolo passo dell'ubriaco – verso destra o verso sinistra –, è così per il lancio della moneta – testa o croce –, è così per molti altri «esperimenti».
Ma l'uso che si fa del termine probabilità nel linguaggio comune ci suggerisce un'ulteriore riflessione. Si dice infatti, ad esempio nel caso del lancio di una moneta, che ciascuno dei risultati (testa o croce) ha una probabilità del 50% (50 su 100). Analogamente, si potrebbe dire che la probabilità che il singolo passo dell'ubriaco sia verso destra è del 50%, così come è del 50% la probabilità che esso sia verso sinistra. Perché parliamo del 50%?
Un modo (il più istruttivo!) per giungere a questa conclusione è quello di riflettere sul fat-

to che il lancio di una moneta produce *comunque* un risultato (sia esso testa o croce); dunque la probabilità che si verifichi *uno dei due risultati possibili* è la certezza! E la certezza – dovresti saperlo dallo studio della matematica – equivale a una probabilità del 100% (100 su 100). Ma allora, *la simmetria dei risultati possibili* testa o croce ci porta a dire che la probabilità di ciascuno di essi è «la metà della certezza», e quindi che ciascun risultato ha una probabilità del 50%. Ovviamente, in modo del tutto analogo, davanti a un singolo passo dell'ubriaco, si arriva alla conclusione che la probabilità che esso sia verso destra, così come la probabilità che esso sia verso sinistra, è del 50%.

È giunto il momento di introdurre nel nostro discorso un minimo di formalizzazione, in modo da cominciare a costruire un linguaggio che vada bene non solo per ubriachi e lanci di monete, ma più in generale.

Supponiamo dunque di avere a che fare con un esperimento (o prova) A, che può dare luogo a N risultati $a_1, a_2, \ldots a_N$ (i risultati di un esperimento o prova si dicono, nel linguaggio tecnico, **eventi**). Ad ogni a_i supponiamo di poter associare, sulla base di considerazioni a priori legate alla particolare simmetria della prova in questione, una probabilità $p(a_i)$. La somma delle probabilità dei possibili eventi deve essere uguale a 1 (100%), cosa che si può scrivere così

$$\sum_{i=1}^{N} p(a_i) = 1$$

Troppo astratto e/o inutilmente complicato? No, soltanto molto generale. Traduciamo il tutto, per prendere familiarità con questo formalismo, in uno dei casi concreti che conosciamo, per esempio il lancio della moneta. L'esperimento A è il lancio della moneta, i possibili risultati a_i sono in questo caso solo due (testa o croce: dunque $N = 2$) e le probabilità $p(a_i)$ che associamo a priori agli a_i sono rispettivamente 0,5 e 0,5, in modo che

$$\sum_{i=1}^{2} p(a_i) = p(a_1) + p(a_2) = 0,5 + 0,5 = 1$$

Puoi allora completare molto facilmente la tabella che segue, relativa all'esperimento «un singolo passo dell'ubriaco».

esperimento A	numero di eventi possibili N	eventi possibili a_i	probabilità dei vari eventi $p(a_i)$
un passo dell'ubriaco			

Questo caso sarà stato senz'altro molto semplice da analizzare perché formalmente *identico* al precedente. Ma se hai capito come funziona il gioco, ti sarà (quasi) altrettanto facile riempire una tabella analoga, relativa stavolta all'evento «lancio di un dado».

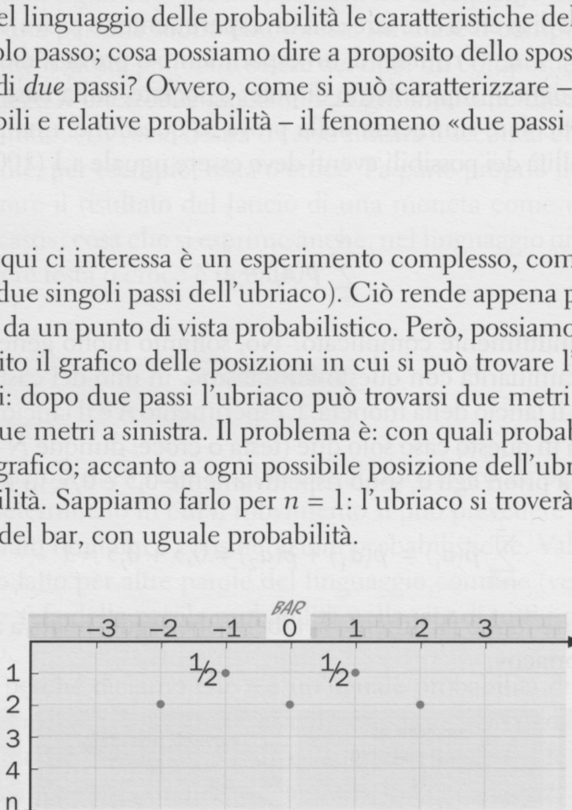
esperimento A	numero di eventi possibili N	eventi possibili a_i	probabilità dei vari eventi $p(a_i)$
lancio di un dado			

L'unica differenza, rispetto ai casi precedenti, è che qui il numero N dei risultati possibili è 6 (può uscire un numero qualunque tra uno e sei). Se il dado non è truccato, non c'è nessuna ragione per cui un particolare numero debba essere preferito rispetto agli altri; ma questo vuol dire che tutti gli eventi possibili nella prova «lancio di un dado» hanno uguale probabilità a priori, e siccome la somma delle probabilità deve essere uguale a 1, la probabilità che esca un numero particolare sarà uguale a 1/6.

La probabilità di eventi composti

Torniamo ora al nostro ubriaco. Ormai sappiamo calcolare la probabilità del singolo passo verso destra o verso sinistra; ma l'obiettivo che ci siamo posti, ben più ambizioso, è di riuscire a ragionare su n passi successivi (dieci, nel caso che avevamo fissato).
Non perdiamoci d'animo e procediamo (è proprio il caso di dirlo!) un passo per volta: sappiamo esprimere nel linguaggio delle probabilità le caratteristiche dello spostamento conseguente a un singolo passo; cosa possiamo dire a proposito dello spostamento conseguente a una sequenza di *due* passi? Ovvero, come si può caratterizzare – in termini di esperimenti, eventi possibili e relative probabilità – il fenomeno «due passi successivi dell'ubriaco»?

L'esperimento che qui ci interessa è un esperimento complesso, composto da due esperimenti elementari (due singoli passi dell'ubriaco). Ciò rende appena più complicata l'analisi della situazione da un punto di vista probabilistico. Però, possiamo basarci sul fatto che abbiamo già costruito il grafico delle posizioni in cui si può trovare l'ubriaco in funzione del numero di passi: dopo due passi l'ubriaco può trovarsi due metri a destra della porta, davanti ad essa, o due metri a sinistra. Il problema è: con quali probabilità?
Riprendiamo quel grafico; accanto a ogni possibile posizione dell'ubriaco indichiamo ora la rispettiva probabilità. Sappiamo farlo per $n = 1$: l'ubriaco si troverà un metro a destra o un metro a sinistra del bar, con uguale probabilità.

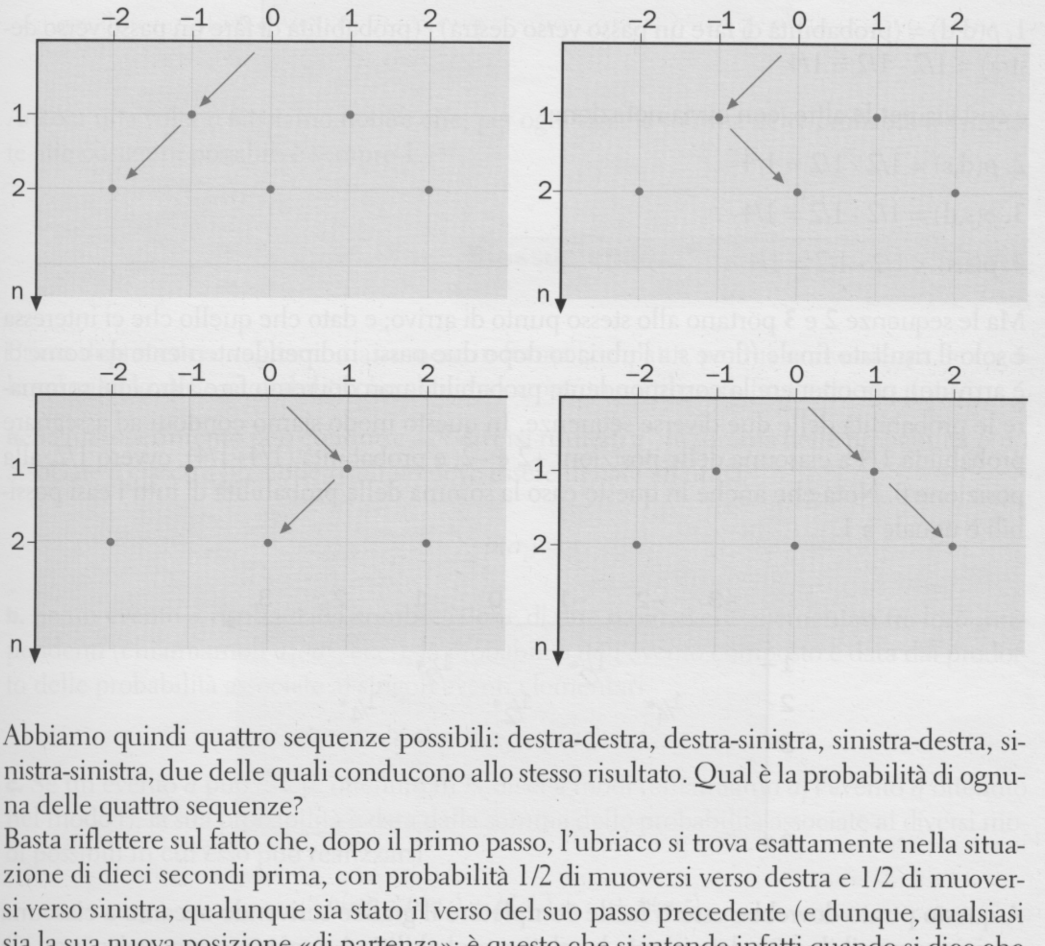


Una prima occhiata al grafico potrebbe indurti a pensare che, dato che per $n = 2$ ci sono tre risultati possibili, abbia senso assegnare a ciascuno di essi una probabilità $p = 1/3$. Cosa pensi di questa soluzione?

Se la soluzione non ti convince, hai ragione. Assegnare uguale probabilità ai tre possibili eventi conseguenti ai due passi dell'ubriaco sarebbe giustificato se non ci fossero motivi per ritenere che qualcuno di essi debba essere, in qualche senso, «preferito». Ma questa volta c'è un evento che è proprio in queste condizioni!
Proviamo infatti a calcolare in quanti modi diversi l'ubriaco può raggiungere le tre possibili posizioni finali. A questo scopo, usiamo una notazione più comoda: anziché continuare a dire destra e sinistra, scegliamo un verso positivo sull'asse delle x e diciamo che «verso destra» significa nel verso positivo delle x, e «verso sinistra» significa nel verso negativo.

Allora i tre possibili risultati dell'esperimento «due passi successivi dell'ubriaco» saranno $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = -2$.
In quanti modi l'ubriaco può essere giunto, dopo venti secondi, in $x_1 = 2$? E in $x_2 = 0$? E in $x_3 = -2$?

Vedi bene cosa intendevamo dire affermando che questa volta i tre risultati non sono equivalenti: mentre c'è *un solo* modo con cui l'ubriaco può arrivare in $x_1 = 2$ o in $x_3 = -2$ (e cioè, rispettivamente, facendo due passi consecutivi verso destra o verso sinistra), ci sono *due* modi diversi per arrivare in $x_2 = 0$: o prima un passo a destra seguito da uno a sinistra, o prima uno a sinistra e poi uno a destra.



Abbiamo quindi quattro sequenze possibili: destra-destra, destra-sinistra, sinistra-destra, sinistra-sinistra, due delle quali conducono allo stesso risultato. Qual è la probabilità di ognuna delle quattro sequenze?
Basta riflettere sul fatto che, dopo il primo passo, l'ubriaco si trova esattamente nella situazione di dieci secondi prima, con probabilità 1/2 di muoversi verso destra e 1/2 di muoversi verso sinistra, qualunque sia stato il verso del suo passo precedente (e dunque, qualsiasi sia la sua nuova posizione «di partenza»; è questo che si intende infatti quando si dice che «ogni spostamento successivo è del tutto a caso»). In modo più rigoroso, diciamo ora che il verso di un passo è *indipendente* dal verso del passo precedente; la probabilità che lo spostamento n-esimo sia, ad esempio, verso destra, *non dipende* perciò da quello che è accaduto nello spostamento $(n-1)$-esimo. Situazioni di questo tipo vengono anche descritte, facendo ricorso a un linguaggio pittoresco ed efficace, come situazioni in cui si ha a che fare con un sistema *senza memoria*: l'ubriaco non si ricorda cosa ha fatto nel passo precedente, e si muove ogni volta completamente a caso.
Dunque, poiché l'ubriaco ha una probabilità 1/2 di fare il primo passo verso destra e, a partire dalla posizione raggiunta, ha una probabilità che è ancora di 1/2 di procedere di nuo-

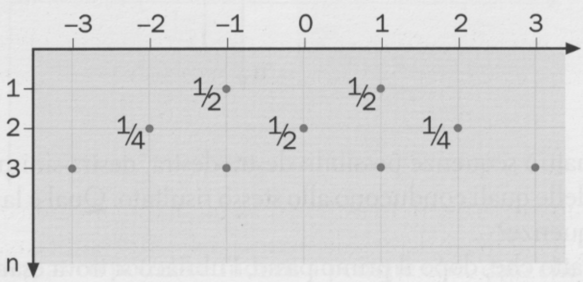
vo verso destra, allora la probabilità complessiva dell'evento «primo passo verso destra e secondo passo verso destra» è data semplicemente – come dovresti sapere dallo studio della matematica – dal prodotto tra le probabilità degli eventi elementari «primo passo verso destra» e «secondo passo verso destra», e quindi è $1/2 \cdot 1/2 = 1/4$.
Si tratta di una regola del tutto generale relativa agli **eventi composti** (quegli eventi il cui realizzarsi dipende dal verificarsi contemporaneo degli eventi elementari di cui si compongono): la probabilità di un evento composto da eventi indipendenti è data dal prodotto delle probabilità dei singoli eventi elementari. La probabilità di avere due teste (eventi indipendenti) lanciando due monete è perciò $1/2 \cdot 1/2 = 1/4$, la probabilità di ottenere due volte il numero 6 (eventi indipendenti) lanciando due dadi è $1/6 \cdot 1/6 = 1/36$, e così via.
Possiamo allora calcolare le probabilità delle quattro sequenze possibili per il nostro ubriaco:

1. $p(\mathrm{d,d})$ = (probabilità di fare un passo verso destra) · (probabilità di fare un passo verso destra) = $1/2 \cdot 1/2 = 1/4$

e così via per le altre, con ovvia notazione:

2. $p(\mathrm{d,s}) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$
3. $p(\mathrm{s,d}) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$
4. $p(\mathrm{s,s}) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$

Ma le sequenze 2 e 3 portano allo stesso punto di arrivo; e dato che quello che ci interessa è solo il risultato finale (dove sta l'ubriaco dopo due passi, indipendentemente da come ci è arrivato), per ottenere la corrispondente probabilità non dovremo fare altro che sommare le probabilità delle due diverse sequenze. In questo modo siamo condotti ad assegnare probabilità 1/4 a ciascuna delle posizioni +2 e –2, e probabilità (1/4+1/4), ovvero 1/2, alla posizione 0. Nota che anche in questo caso la somma delle probabilità di tutti i casi possibili è uguale a 1.

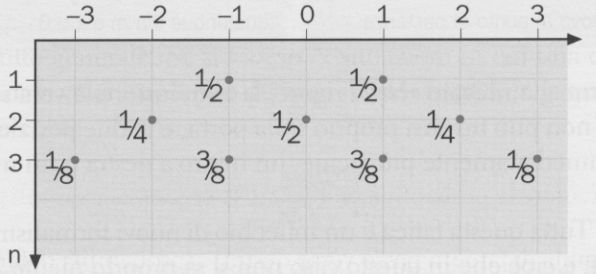


A questo punto dovrebbe esserti facile completare il grafico scrivendo accanto a ciascuna posizione possibile a un dato istante la relativa probabilità. A ogni passo successivo, non c'è da fare altro che applicare la stessa semplice ricetta che abbiamo appena usato per n=2. Ogni posizione possibile corrispondente a un dato valore di n può essere raggiunta da quelle, corrispondenti a n–1, situate nella riga immediatamente precedente subito a destra o a sinistra; e, ogni volta, da ciascuna delle possibili posizioni precedenti si può arrivare a quella che ci interessa con probabilità 1/2. Dunque la probabilità totale associata a ciascuna posizione sulla riga n è data dalla somma delle probabilità associate alle posizioni precedenti da cui essa è raggiungibile, ciascuna moltiplicata per 1/2.
Così, per $n = 3$, essendo le posizioni possibili $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, $x_4 = -3$, le rispettive probabilità sono

$p(3) = p(2) \cdot 1/2 = 1/4 \cdot 1/2 = 1/8$

$p(1) = p(0) \cdot 1/2 + p(2) \cdot 1/2 = 1/2 \cdot 1/2 + 1/4 \cdot 1/2 = 3/8$

e similmente per $p(-1)$ e $p(-3)$.



Ancora una volta ti facciamo notare che, per ogni riga, la somma delle probabilità associate alle posizioni possibili è sempre 1.

Riassumendo...

Prima di procedere vogliamo riassumere in forma compatta, per tua convenienza, le regole sul calcolo delle probabilità che abbiamo scoperto e utilizzato fino a questo punto.

a. Se un esperimento può condurre a N diversi risultati a_i, la somma delle probabilità $p(a_i)$ associate a ciascun possibile risultato deve essere uguale all'unità

$$\sum_{i=1}^{N} p(a_i) = 1$$

b. Se un evento a risulta dalla combinazione di due o più eventi elementari tra loro indipendenti (chiamiamoli a_1, a_2, ecc.), la probabilità dell'evento composto è data dal prodotto delle probabilità associate ai singoli eventi elementari

$$p(a) = p(a_1) \cdot p(a_2) \cdot ...$$

c. Se un evento a può essere ottenuto in N diversi modi (chiamiamo a_i l'evento a ottenuto nel modo i), la sua probabilità è data dalla somma delle probabilità associate ai diversi modi possibili in cui esso può realizzarsi

$$p(a) = p(a_1) + p(a_2) + ... + p(a_N)$$

Torniamo al nostro ubriaco (che nel frattempo si è scolato un'altra bottiglia e vaga lungo il marciapiede, completamente perso nei fumi dell'alcool) e al grafico che ne descrive le possibili posizioni con le relative probabilità. Avrai certamente notato che esso possiede una caratteristica particolare: le probabilità associate alle posizioni dell'ubriaco sono distribuite in modo simmetrico rispetto all'origine, e diminuiscono, per un dato valore di n, quanto più ci si allontana dalla porta del bar. Questa è una buona conferma delle nostre ragionevoli intuizioni; traduciamo allora le plausibili ipotesi e le sensate conclusioni formulate a suo tempo in un linguaggio più preciso, sostituendo alla vaga espressione «più ragionevole» quella, quantitativamente ben definita, di «più probabile»:

vecchia ipotesi	nuova ipotesi
è ragionevole supporre che l'ubriaco faccia tanti passi verso destra quanti verso sinistra	l'evento «stesso numero di passi verso destra e verso sinistra» è quello con probabilità più elevata
vecchia conclusione	**nuova conclusione**
la cosa più ragionevole è supporre che dopo n passi l'ubriaco sarà di nuovo al punto di partenza	la posizione più probabile dell'ubriaco dopo n passi (qualunque sia n) è $x = 0$

(Nota bene: abbiamo già rilevato che, a rigore, la conclusione è vera solo se n è pari; se n è dispari, l'ubriaco non può trovarsi proprio sulla porta, e le due posizioni più probabili sono allora quelle immediatamente più vicine, un metro a destra o un metro a sinistra della porta del bar).

Bel risultato, dirai. Tutta questa fatica e un mucchio di nuovi formalismi per scoprire quello che già si sapeva, e cioè che in questo caso non si sa proprio niente... Ancora un attimo di pazienza, e vedrai che da tutto questo si può cavare fuori qualcosa di più interessante relativamente al moto dell'ubriaco; qualcosa, soprattutto, che senza il nuovo formalismo non avremmo saputo prevedere.

Come non usare la probabilità

Se non si impara a maneggiarla per bene, con la probabilità si arriva facilmente a fare strane cose, come succede al signore di cui racconta il matematico americano **J.A. Paulos** nel suo libro *Gli snumerati*:

Un tizio, costretto a viaggiare molto per lavoro, era angosciato all'idea che sul suo aereo ci fosse una bomba. Così, dopo aver calcolato che la probabilità che ciò si avverasse era minima, ma non abbastanza per lui, adesso viaggia sempre con una bomba in valigia. Secondo lui, la probabilità che a bordo ci siano due bombe è infinitesimale.

[J.A. Paulos, *Gli snumerati*, Ed. Leonardo, Milano 1990, p. 31]

Valori medi e valori aspettati

Dobbiamo mettere a punto alcuni ulteriori strumenti che si riveleranno utili per proseguire. Cominciamo, come di consueto, partendo da una domanda (che, per il momento, non sembra avere alcuna relazione con le vicende del nostro ubriaco, a cui però torneremo presto): come calcoleresti l'altezza media dei componenti della tua classe?

Probabilmente avrai risposto senza difficoltà. La procedura, infatti, è del tutto analoga a quella utilizzata per determinare il valor medio di una serie di misure sperimentali: per trovare il valore medio delle altezze, basta addizionarle tutte e dividere il risultato per il numero totale degli alunni. In simboli, indicando con h_i l'altezza dell'i-esimo studente, e con N il numero di componenti della classe, il valor medio dell'altezza, che indichiamo con il simbolo $\bar{h}$, sarà

$$\bar{h} = \frac{h_1 + h_2 + \ldots + h_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} h_i}{N}$$

o anche

$$\bar{h} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} h_i$$

La «ricetta» è del tutto generale. Se si hanno N situazioni in cui una certa grandezza assume ogni volta un dato valore x_i, si può definire il valor medio della grandezza nelle N situazioni considerate come

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Così si può facilmente calcolare l'età media di un gruppo di persone, il numero medio di abitanti per chilometro quadrato di una certa regione, ecc.
Supponi allora di voler calcolare l'altezza media di un gruppo di dieci tuoi compagni: i singoli valori, misurati in centimetri, sono 160, 160, 164, 168, 168, 168, 171, 171, 175, 175. Per la definizione appena data, il valor medio si otterrà scrivendo

$$\bar{h} = \frac{1}{10}(160 + 160 + 164 + \ldots + 175) = 168$$

Sarai d'accordo con noi che il risultato non cambia se nell'espressione in parentesi si raggruppano i valori delle altezze che ricorrono più di una volta, e si scrive la somma come

$$\bar{h} = \frac{1}{10}(2 \cdot 160 + 164 + 3 \cdot 168 + 2 \cdot 171 + 2 \cdot 175) = 168$$

Questo ci suggerisce un modo leggermente diverso di dare l'espressione generale del valor medio. Se la grandezza che ci interessa può assumere k valori diversi, diciamo da x_1 a x_k, in N situazioni diverse avremo, in genere, n_1 volte il valore x_1, n_2 volte il valore x_2, ecc. fino a n_k volte il valore x_k. Ovviamente, sarà

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = N$$

Il valor medio si potrà allora scrivere, in modo del tutto equivalente a quanto fatto in precedenza, come

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i$$

Calcola, a titolo di esempio, il valor medio della grandezza «risultato del lancio di un dado», su una sequenza di dieci lanci in cui è uscito tre volte il numero 1, una volta il 2, mai il 3, due volte il 4, tre volte il 5 e una volta il 6, usando le due espressioni introdotte per il calcolo del valor medio e verificando che esse coincidono.

Non nutriamo alcun dubbio sul fatto che tu abbia ottenuto, in entrambi i casi, il valor medio 3,4, dal momento che $1+1+1+2+4+4+5+5+5+6$, così come $3 \cdot 1+1 \cdot 2+2 \cdot 4+3 \cdot 5+1 \cdot 6$, ha risultato 34.
Tornando ora, come promesso, al nostro problema di partenza, ti proponiamo di riflettere

sulla seguente questione: ha senso (e, se sì, che cosa vuol dire esattamente) chiedersi quale sia lo spostamento medio dell'ubriaco dopo dieci passi?

Siamo d'accordo: posta così, la domanda sembra non avere senso. Per poter parlare di valore medio abbiamo bisogno di un certo numero di valori su cui effettuare l'operazione di media, e in questo caso abbiamo invece un solo ubriaco e una sola passeggiata.
Possiamo però riformulare la domanda pensando al seguente «esperimento mentale»: supponiamo di avere *tanti* ubriachi, ognuno dei quali si muova a partire dalla porta del bar seguendo lo stesso procedimento casuale, e chiediamoci ora quale sarà il valor medio del loro spostamento dopo dieci passi (sarebbe la stessa cosa immaginare di far ripetere tante volte l'esperienza allo stesso ubriaco, riportandolo ogni volta, dopo dieci passi, al punto di partenza). Adesso la domanda ha senso: abbiamo N posizioni diverse dell'ubriaco dopo dieci passi, con valori che possono andare da -10 a $+10$, e possiamo usare la nostra formula per calcolarne il valore medio.
Quanto varrà questo valore medio? A priori, sembra difficile dirlo; bisogna vedere dove si troveranno gli N ubriachi dopo dieci passi, e fare il calcolo. Se N è piccolo (se ripetiamo l'esperimento quattro o cinque volte), essendoci una grande varietà di possibili posizioni finali, si possono avere valori medi anche molto diversi tra loro. Per esempio, con cinque ubriachi, potremmo trovarne, alla fine, due in $x = 0$, uno in $x = 4$, uno in $x = -2$ e uno in $x = -8$, distribuzione che darebbe un valor medio $\bar{x}$ pari a $-6/5$; mentre, se le posizioni finali fossero $x = -4$, $x = -4$, $x = -2$, $x = 0$, $x = 10$, il valor medio sarebbe 0.
Ma che succede se, invece di limitarci a ripetere la prova quattro o cinque volte, facciamo diventare N molto grande? C'è una qualche ragione per cui, al crescere di N, possiamo prevedere a priori quale sarà il valor medio?

Forse hai trovato la risposta, o più probabilmente ce l'hai, come si dice, sulla punta della lingua, ma non riesci a formularla in modo del tutto chiaro. In questa seconda ipotesi, accorriamo in tuo aiuto: al crescere del numero di prove, la distribuzione dei valori finali tenderà a essere proporzionale alle rispettive probabilità.
Un esempio semplice ti permetterà di mettere a fuoco questo risultato molto importante, e di fare conoscenza con un nuovo concetto che ad esso è legato. Sappiamo che la probabilità a priori di ottenere testa o croce lanciando una moneta in aria è, rispettivamente, di 1/2 e 1/2. Se facciamo dieci lanci successivi, comunque, nulla impedisce che esca, per esempio, tre volte croce e sette volte testa. Diremo che la **frequenza** ottenuta in quella particolare serie di lanci è di 3/10 per croce e di 7/10 per testa; definiamo cioè come frequenza f_i di un certo risultato x_i di un esperimento il rapporto tra il numero di volte n_i in cui si è ottenuto quel certo risultato e il numero totale N di realizzazioni dell'esperimento:

$$f_i = \frac{n_i}{N}$$

Frequenza e probabilità

Supponiamo ora di effettuare non dieci, ma mille lanci successivi della moneta. L'esperienza insegna – e se la cosa non ti convince, prova... – che in questo caso non si avrà praticamente mai trecento volte croce e settecento volte testa, ma che la distribuzione dei due risultati tenderà ad avvicinarsi molto più a valori simili; diciamo che avremo, per una data

serie di mille lanci, 450 croci e 550 teste. Le frequenze associate sono allora 450/1000 e 550/1000, cioè 0,45 e 0,55. E quanto più si aumenta il numero di lanci, tanto più ci aspettiamo di ottenere (e l'esperienza conferma la ragionevolezza di questa aspettativa) circa tante croci quante teste. Ci aspettiamo cioè che le relative frequenze tendano al valore 0,5, ovvero alle probabilità a priori associate ai due possibili risultati dell'evento. Questa proprietà è nota come **legge dei grandi numeri**, e si esprime anche dicendo che, su N realizzazioni di un particolare esperimento che può condurre a diversi risultati x_i, ognuno caratterizzato da una probabilità p_i, la frequenza f_i dell'i-esimo risultato tende, al crescere di N, a coincidere con la rispettiva probabilità.
Un'osservazione: è proprio la legge dei grandi numeri che permette di dare un senso ad affermazioni che altrimenti sarebbero di significato molto dubbio. Rifletti infatti sul senso di un'affermazione di questo tipo: «la probabilità che il prossimo 15 aprile piova a Roma è del trenta per cento».
Non c'è, evidentemente, nessuna ragione *a priori* che giustifichi quel valore 0,3 per la probabilità di avere brutto tempo in quel luogo in quel particolare giorno. Come si è ottenuto quel numero? Semplicemente, si è andati a vedere che tempo ha fatto a Roma il 15 aprile degli ultimi anni (e quanti più anni si sono presi in considerazione, tanto migliore sarà la previsione; diciamo allora che si è guardato lo stato del tempo degli ultimi cento anni); si è calcolata la frequenza con cui ha piovuto, scoprendo che su cento «15 aprile» passati ha piovuto trenta volte, e si è assegnato il valore della frequenza così ottenuto – dai dati sperimentali degli anni passati – come probabilità per l'evento futuro.
È in questo modo che si possono assegnare ragionevoli probabilità in situazioni in cui non ci sono, come è invece nel caso dell'ubriaco o del lancio dei dadi, motivi a priori per farlo: si calcola la frequenza dei possibili risultati dell'esperimento che interessa, su una sequenza sufficientemente lunga di prove ripetute (più è lunga e meglio è), si invoca la validità della legge dei grandi numeri (che, fino a prova contraria dell'esperienza, si prende per buona), e si assume la distribuzione delle frequenze dei vari risultati ottenuti come distribuzione delle probabilità ad essi associate. Capisci ora il senso di frasi come «la probabilità di un incidente aereo sulla rotta Napoli-Milano è di uno su diecimila»?
Gli strumenti che abbiamo appena definito ci permettono ora di fare un passo importante relativo al nostro ubriaco (o meglio, ormai, al nostro insieme di N ubriachi). Un ulteriore piccolo sforzo di formalizzazione e ci siamo!
Abbiamo dunque N ubriachi (N è ora un numero molto grande) distribuiti dopo dieci passi nelle varie posizioni possibili x_i. Le posizioni possibili vanno da $x = -10$ a $x = +10$, includendo tutti i valori pari di x, zero compreso, per un totale di undici; indichiamo in generale questo numero, che ci dice quanti sono i possibili diversi risultati dell'esperimento che ci interessa, con k. Diciamo cioè che l'indice i può variare da 1 a k. Indicando con n_i il numero di ubriachi che si trovano nella posizione x_i, il valore medio della posizione sarà dato da

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i$$

Questa espressione si può anche scrivere

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{N} x_i$$

Ora, n_i/N è la frequenza f_i dell'i-esimo risultato possibile, e dunque il valor medio si può scrivere come

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{k} f_i x_i$$

Ma, se N è abbastanza grande, la legge dei grandi numeri ci consente di sostituire alle frequenze f_i le probabilità p_i; possiamo quindi calcolare *a priori* quale sarà il valor medio della posizione degli ubriachi, dato che le relative probabilità ci sono già note. Avremo cioè

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{k} p_i x_i$$

Questa espressione ci permette (quando sono note le probabilità associate ai possibili risultati di un esperimento, o, come anche diremo, quando è nota la distribuzione di probabilità) di calcolare a priori il valor medio del risultato. Si usa talvolta parlare in questo caso di «valore aspettato» anziché di valore medio; noi useremo indifferentemente le due espressioni.

Facciamo subito un esempio per mostrarti come questo formalismo dall'apparenza complicata sia in realtà molto semplice da usare. Calcoliamo il valore aspettato della posizione dell'ubriaco dopo quattro spostamenti.

- I possibili risultati dell'esperimento sono:

$$x_1 = +4 \quad x_2 = +2 \quad x_3 = 0 \quad x_4 = -2 \quad x_5 = -4$$

(k è dunque uguale a 5).

- Le relative probabilità (le abbiamo già calcolate e sono ricavabili dal grafico) sono

$$p_1 = \frac{1}{16} \quad p_2 = \frac{4}{16} \quad p_3 = \frac{6}{16} \quad p_4 = \frac{4}{16} \quad p_5 = \frac{1}{16}$$

(come deve essere, si verifica che la somma delle probabilità di tutti i risultati è pari all'unità).

- Il valore aspettato si ottiene allora usando l'espressione

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{k} p_i x_i$$

Nel nostro caso la somma è fatta di cinque termini, e vale

$$\bar{x} = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_5 x_5 = \frac{1}{16}(+4) + \frac{4}{16}(+2) + \dots + \frac{1}{16}(-4) = 0$$

Il valore aspettato della posizione dell'ubriaco dopo quattro passi è dunque zero. Questo significa che, se effettivamente facessimo ripetere all'ubriaco molte volte la stessa esperienza (o se avessimo sotto mano molti ubriachi) ci dovremmo aspettare di trovare una distribuzione di posizioni finali con valor medio nullo. Nota che in questo caso il valore aspettato (o valore medio) coincide con il valore più probabile.

Domande di verifica

1 Prova che il valore aspettato della posizione dell'ubriaco è zero qualunque sia il numero di passi.

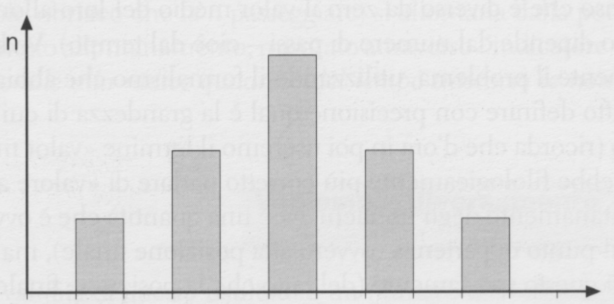
2 È sempre vero che il valore aspettato coincide con il valore più probabile?

LO SPOSTAMENTO QUADRATICO MEDIO

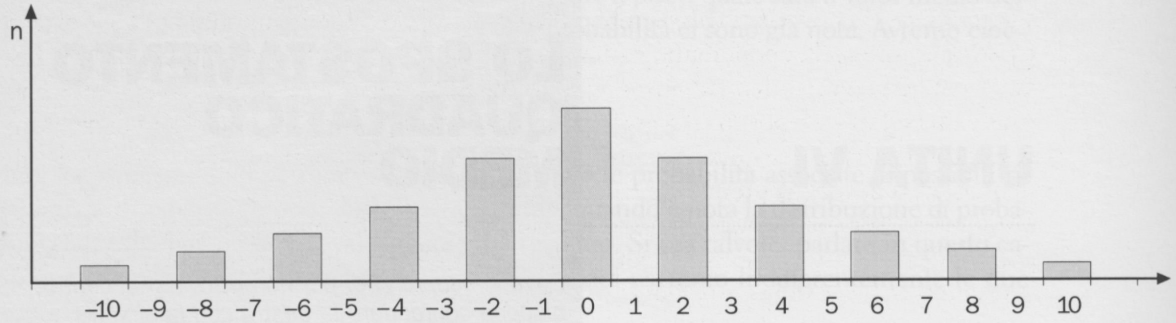
Dove si scopre che, per non ritrovarsi al centro, bisogna confondere la destra con la sinistra

Abbiamo ritrovato un risultato che ci era già familiare (il valore medio della posizione dell'ubriaco è zero), utilizzando però un formalismo più efficace, grazie al quale possiamo ora passare a rispondere a qualche domanda un po' più interessante.
Poniamoci dunque il seguente problema: di quanto si sarà allontanato l'ubriaco dalla porta del bar, in media, dopo n passi?
Sembra che stiamo riproponendo lo stesso problema con cui siamo partiti, vero? Non è così, però; per mostrarti che si tratta di un problema diverso, proviamo a vederlo in un altro modo. Invece di un ubriaco, immaginiamo nuovamente di avere sottomano tanti ubriachi (diciamo un centinaio) che partono contemporaneamente dalla porta del bar. Supponi ora di fissare le posizioni degli ubriachi sul marciapiede dopo che essi hanno effettuato quattro passi, e a un istante successivo, per esempio dopo dieci passi. Pensi che vedrai la stessa distribuzione degli ubriachi lungo il marciapiede?

In entrambi i casi, ci aspettiamo di trovare gli ubriachi distribuiti in modo simmetrico a destra e a sinistra della porta del bar. È il risultato che conosciamo, suggerito dalla simmetria del problema, per cui a ogni istante la generica posizione x è altrettanto probabile che la posizione $-x$; come conseguenza, il valor medio della posizione risulterà uguale a zero, dopo quattro spostamenti come dopo dieci. Ma questo dato non ci dice nulla su come sono diversamente distribuiti gli ubriachi nei due casi. È chiaro, infatti, che all'aumentare del tempo essi tenderanno, in media, ad allontanarsi sempre più dalla porta del bar, a «sparpagliarsi» sempre di più lungo il marciapiede.
Possiamo visualizzare la cosa ricorrendo a un istogramma, in cui mettiamo in ascissa la posizione rispetto alla porta del bar e in ordinata il numero di ubriachi che si trovano in quella posizione all'istante fissato. Dopo quattro passi, avremo un risultato di questo tipo.



Dopo dieci passi, la figura assomiglierà piuttosto a questa.



Otteniamo comunque la caratteristica figura «a campana» che caratterizza anche la distribuzione delle misure sperimentali intorno al loro valor medio dovuta agli errori casuali. In entrambi i casi è $\bar{x} = 0$ (tutte e due le figure sono simmetriche rispetto alla posizione 0). Il valor medio della posizione, dunque, non è una grandezza utile per misurare il grado di sparpagliamento degli ubriachi.

Cerchiamo allora un'altra quantità, diversa dalla posizione ma ad essa legata, il cui valor medio sia adatto allo scopo di dar conto del grado di sparpagliamento. Riesci a individuare una grandezza adeguata?

Una misura dello sparpagliamento

Tutto sta nel ricordare che gli spostamenti sono grandezze vettoriali (nel nostro caso differiscono, oltreché in modulo, anche in verso), e che dunque c'è differenza tra chiedersi – come abbiamo fatto all'inizio – *dove stanno* dopo un certo intervallo di tempo gli ubriachi, o invece – come stiamo facendo adesso – *di quanto si sono allontanati* dal punto di partenza in quello stesso intervallo di tempo. Nel primo caso l'informazione che cercavamo era di carattere vettoriale, in quanto entrava in gioco anche il verso degli spostamenti (la posizione «tre metri a destra della porta del bar» è differente dalla posizione «tre metri a sinistra»). Ora è invece significativo solo il modulo dello spostamento («tre metri a destra» equivalgono, da questo punto di vista, a «tre metri a sinistra»).

E mentre nel primo caso la simmetria intrinseca del problema portava alla conclusione intuitiva (confermata dall'analisi formale) che in media gli ubriachi «non si spostano» (nel duplice senso che è nullo il valor medio della loro posizione e che è massima la probabilità di ritrovarli al punto di partenza), questa volta scopriremo che in media gli ubriachi «si spostano» (nel senso che è diverso da zero il valor medio del loro allontanamento, e che questo valor medio dipende dal numero di passi – cioè dal tempo). Vediamo allora di trattare quantitativamente il problema, utilizzando il formalismo che abbiamo costruito.

Dobbiamo anzitutto definire con precisione qual è la grandezza di cui ci interessa calcolare il valor medio (ricorda che d'ora in poi useremo il termine «valor medio» in generale, anche quando sarebbe filologicamente più corretto parlare di «valore aspettato»). Vogliamo stimare l'allontanamento degli ubriachi, cioè una quantità che è ovviamente legata allo spostamento dal punto di partenza (ovvero alla posizione finale), ma che non contiene traccia del verso di questo spostamento (del fatto che la posizione finale sia a destra o a sinistra della porta del bar, sia cioè un numero positivo o negativo).

Ci sono vari modi per costruire una grandezza con queste proprietà. Il modo più semplice e naturale sarebbe quello di scegliere come grandezza da «mediare» il modulo dello spostamento; per questa via si calcolerebbe il vero e proprio allontanamento medio. Diversa è però la nostra scelta: preferiamo partire – come si usa fare negli studi statistici – dalla media dei cosidetti «moduli quadrati», che sono i quadrati dei moduli degli spostamenti e che sono tutti certamente positivi. La grandezza così ottenuta ha però le dimensioni di una lunghezza al quadrato, e per ottenere una quantità che sia dimensionalmente l'equivalente di una distanza occorrerà prenderne la radice quadrata.
Dunque calcoliamo il valor medio del modulo quadro dello spostamento dopo n passi, e poi prendiamo la sua radice quadrata: ecco l'*indicatore* che abbiamo prescelto per stimare la distanza media a cui ci aspettiamo di trovare gli ubriachi.
In simboli, detto x il valore della posizione dopo n passi, calcoliamo il valor medio di x^2, cioè $\overline{x^2}$, e poi la sua radice quadrata, $\sqrt{\overline{x^2}}$ (che si chiama **valore quadratico medio** ed è la grandezza più spesso utilizzata per valutare gli scostamenti dal valor medio).
Ricordando la definizione di valor medio di una generica grandezza distribuita con una certa probabilità, e prendendo i valori delle probabilità associate alle varie posizioni possibili dal grafico che abbiamo costruito, è facile allora calcolare la quantità desiderata per un dato valore di n.
Per n=2, per esempio, abbiamo la seguente situazione:

- posizioni possibili: $x_1 = +2 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = -2$
- probabilità associate: $p_1 = \frac{1}{4} \quad p_2 = \frac{1}{2} \quad p_3 = \frac{1}{4}$
- valor medio di x^2: $\overline{x^2} = \sum_{i=1}^{3} p_i x_i^2 = \frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 4 = 2$
- valore quadratico medio: $\sqrt{\overline{x^2}} = \sqrt{2}$

Calcola allora, usando i dati del grafico degli spostamenti e delle relative probabilità, il valore quadratico medio dello spostamento degli ubriachi per un numero di passi pari a n=3 e n=4.

Noti una qualche interessante regolarità nei risultati ottenuti fin qui? Salta proprio agli occhi (se hai fatto i conti senza sbagliare): il valor medio di x^2, che abbiamo visto essere uguale a 2 per n=2, vale 3 per n=3 e 4 per n=4; ed è facile verificare che, in genere, vale k per n=k. Questo significa che lo spostamento quadratico medio è uguale alla radice quadrata del numero di passi, ed è quindi proporzionale alla radice quadrata del tempo trascorso dal momento della partenza (ciascun ubriaco fa infatti un passo a ogni intervallo di tempo fissato – nel nostro esempio, ogni dieci secondi).
Ecco un risultato interessante: in media, l'ubriaco (siamo tornati al singolare perché – ragionando di valori medi – non fa differenza considerare n ubriachi che fanno ciascuno una passeggiata o un solo ubriaco che fa n passeggiate) si allontana dalla porta del bar col passare del tempo, e questo allontanamento, misurato attraverso l'indicatore che abbiamo scelto, *risulta proporzionale alla radice quadrata del tempo trascorso (e non semplicemente al tempo trascorso)*.

Vediamola diversamente

L'estensione della validità di questo risultato a un numero qualunque di passi si potrebbe ottenere facilmente se sapessimo scrivere in modo generale l'espressione delle probabilità associate alle varie posizioni finali possibili per un generico valore di n. In effetti, un algoritmo che permette di trattare formalmente il problema esiste, e non è neanche molto difficile da ricavare. Ma non vogliamo appesantire il nostro discorso con un'ulteriore digressione formale; puoi discutere il problema con l'insegnante di matematica, o limitarti a verificare la bontà della nostra deduzione per successivi valori di n (5, 6, ecc.), «scendendo» lungo il grafico e calcolando le relative probabilità e i rispettivi valori quadratici medi.

Vogliamo piuttosto mostrarti come si possa arrivare allo stesso risultato, in modo del tutto generale, seguendo un procedimento apparentemente diverso, per convincerti ancora una volta del fatto che, purché un problema sia formulato con precisione, strategie risolutive diverse devono condurre allo stesso risultato.

Vediamola dunque così: a ogni intervallo di tempo τ (i dieci secondi del nostro esempio) l'ubriaco fa un passo verso destra o verso sinistra, cioè effettua uno spostamento (in corrispondenza al primo passo lo spostamento è x_1, in corrispondenza al secondo è x_2, e così via) che può valere $+ d$ o $- d$ (nel nostro esempio, d era uguale a un metro). Dopo n passi (cioè dopo che è trascorso un tempo $t = n\tau$) l'ubriaco si sarà spostato di una quantità X_n che è data dalla somma degli n spostamenti x_i

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} x_i = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$$

A noi interessa calcolare il valor medio di $\overline{X_n^2}$, e cioè

$$\overline{X_n^2} = \overline{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2}$$

Sviluppiamo il quadrato dell'espressione in parentesi; avremo n termini tutti uguali (gli n moduli quadri dei vari spostamenti x_i, che valgono tutti d^2), più tutti i termini dovuti ai doppi prodotti, come $2x_1x_2$, $2x_1x_3$, ecc.

$$\overline{X_n^2} = \overline{(nd^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + \ldots)}$$

Ora possiamo utilizzare un'ovvia proprietà dell'operazione di media: il valor medio di una somma è uguale alla somma dei valori medi dei suoi termini. Abbiamo allora

$$\overline{X_n^2} = \overline{nd^2} + \overline{2x_1x_2} + \overline{2x_1x_3} + \ldots$$

Il primo termine, $\overline{nd^2}$, è banalmente uguale a nd^2 (sia n che d sono dati, dunque abbiamo a che fare con il valor medio di un numero fissato, che è ovviamente uguale al numero in questione). Per quanto riguarda i vari termini legati ai doppi prodotti, basta vedere cosa succede a uno qualunque di essi. Calcoliamo per esempio $\overline{2x_1x_2}$: il ragionamento seguito, e dunque il risultato ottenuto, resterà lo stesso per qualunque coppia di spostamenti. Quali sono i possibili valori del prodotto x_1x_2? A te il solito spazio per lavorare

I valori *possibili* sono d^2 e $- d^2$, a seconda che i due spostamenti avvengano nello stesso verso o in verso opposto. Per l'esattezza, possiamo avere le combinazioni $(+ d, + d)$, $(- d, - d)$, $(+ d, - d)$ e $(- d, + d)$; le prime due danno come valore del prodotto $+ d^2$, e le seconde due danno $- d^2$. Per calcolare il valor medio dobbiamo «pesare» questi risultati possibili con le rispettive probabilità. Ma ognuna delle quattro sequenze possibili ha la stessa probabilità a priori, pari a 1/4: ricorda, infatti, che l'ubriaco si muove «del tutto a caso», cioè che gli spostamenti x_1 e x_2 sono indipendenti. Il valor medio è allora

$$\overline{x_1x_2} = \frac{1}{4}d^2 + \frac{1}{4}d^2 + \frac{1}{4}(-d^2) + \frac{1}{4}(-d^2) = 0$$

Dunque tutti i termini derivanti dai doppi prodotti danno un contributo nullo. Abbiamo cioè (per qualunque n)

$$\overline{X_n^2} = nd^2$$

Poiché $n = t/\tau$, dove t è il tempo totale trascorso, possiamo anche scrivere

$$\overline{X_n^2} = \frac{d^2}{\tau} \cdot t$$

Lo spostamento quadratico medio è allora

$$\sqrt{\overline{X_n^2}} = \sqrt{\frac{d^2}{\tau}} \cdot \sqrt{t}$$

Poiché $\sqrt{d^2/\tau}$ è una costante caratteristica del problema, ne consegue che l'indicatore spostamento quadratico medio, prescelto per stimare l'allontanamento dell'ubriaco dal punto di partenza, cresce proporzionalmente alla radice quadrata del tempo.

Fenomeni di diffusione

Fermiamoci un momento a illustrare i motivi per cui ci siamo tanto dilungati su questo argomento.

Abbiamo visto un primo esempio di situazione di movimento in cui, pur non potendo fare previsioni esatte sull'evoluzione del fenomeno, che si svolge in maniera intrinsecamente casuale, è possibile avanzare ipotesi sensate e quantitative di carattere probabilistico, e dunque calcolare valori aspettati delle grandezze significative. I concetti messi a punto per trattare questo primo problema (probabilità, valori medi) si riveleranno preziosi per affrontare tutta una serie di situazioni dinamiche caratterizzate da un qualche tipo di «indeterminazione».

Il problema discusso può apparirti piuttosto futile: a chi interessa discutere dei probabili spostamenti di un avvinazzato incosciente? In effetti, abbiamo posto la questione in termini di «problema dell'ubriaco» solo perché in questa forma è più «leggera» e immediatamente comprensibile.

Ma attenzione: la natura delle difficoltà intrinseche al trattamento del fenomeno, legate al suo carattere casuale (o, come si dice, *aleatorio*), è comune a una grande varietà di situazioni; e il modello che abbiamo costruito per discutere dell'ubriaco può essere utilizzato per studiare tutti quei fenomeni che possono essere schematizzati come una sequenza di spostamenti successivi dovuti a cause del tutto irregolari (cioè per studiare fenomeni rispetto ai quali si possono ritenere valide le stesse ipotesi di natura probabilistica che abbiamo adottato per il nostro bevitore).

La semplicità del problema discusso, in cui il moto si svolge lungo una retta anziché nel piano o in tre dimensioni, ci ha consentito di illustrare con particolare facilità le caratteristiche essenziali dei **fenomeni di diffusione**, cioè di quei fenomeni in cui si assiste, in seguito a un gran numero di singoli eventi casuali, a uno «sparpagliamento» dei valori di una certa grandezza, sparpagliamento che cresce in proporzione con la radice quadrata della durata del fenomeno.

Un tipico esempio di fenomeno di diffusione è fornito dal comportamento di uno sciame di api, inizialmente concentrate in un punto, che si spostano su un prato muovendosi «del

tutto a caso» di fiore in fiore. Si tratta, come è facile vedere, di un'estensione del problema dell'ubriaco a una situazione in due dimensioni.
L'esempio più classico di fenomeni che vengono trattati in modo analogo al problema dell'ubriaco è offerto dal cosiddetto **moto browniano**, cioè dal movimento irregolare e caotico, che si osserva al microscopio, di minuscole particelle poste in sospensione in un liquido. I dettagli del fenomeno sono leggermente più complessi di quelli previsti dal nostro modello, ma gli «ingredienti» e le tecniche che si utilizzano per trattare quantitativamente le proprietà del moto browniano sono esattamente quelli che abbiamo appena imparato seguendo la vicenda dell'ubriaco.

Domande di verifica

1 Disegna l'istogramma relativo alla posizione di 100 ubriachi dopo 5 passi, mettendo in ascissa la posizione rispetto alla porta del bar e in ordinata il numero di ubriachi che si trovano in quella posizione dopo 5 passi.

2 Esaminiamo il problema della passeggiata dell'ubriaco nel paese dei Vatussi (dove ogni passo è di due metri) e nel paese dei Pigmei (dove ogni passo è invece di mezzo metro). Qual è, nei due paesi, la posizione più probabile dopo quattro passi? E qual è, sempre dopo quattro passi, il valore quadratico medio dello spostamento?

UNITÀ VI

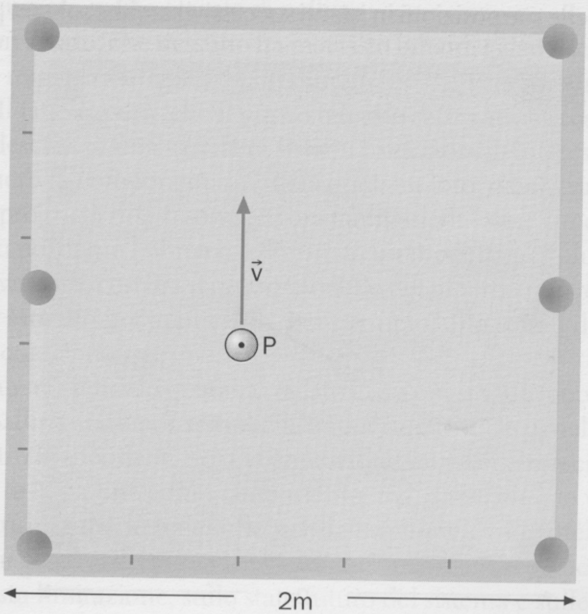
SISTEMI CON GRAN NUMERO DI COMPONENTI

Dove, giunti alla fine,
non si sa più dove andare a sbattere

Abbiamo studiato alcune situazioni di movimento (o, più in generale, di evoluzione nel tempo) caratterizzate dall'impossibilità di definire una legge che permettesse, una volta note le condizioni iniziali, di determinare senza ambiguità l'evoluzione successiva del sistema, ovvero il suo stato in un qualsiasi istante futuro. La natura intrinsecamente casuale dei fenomeni in gioco ci ha costretto a ricorrere ai concetti e alle tecniche del calcolo delle probabilità: non potendo fare previsioni esatte, ci siamo rassegnati a inventare strumenti che ci permettessero almeno di fare previsioni con una certa probabilità.
Esistono tuttavia situazioni in cui il ricorso alle tecniche probabilistiche si impone, o diventa conveniente, anche se in linea di principio l'evoluzione del sistema è perfettamente determinata. Chiariremo la cosa ricorrendo a un semplice esempio.

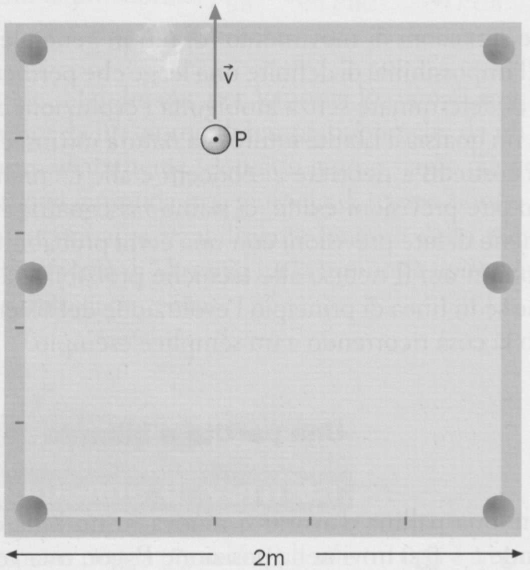
Una partita a biliardo

Supponiamo dunque che una pallina d'avorio si muova su un biliardo quadrato di lato $L = 2$ metri e che all'istante $t = 0$ si trovi nella posizione P, con una velocità diretta come indicato in figura, pari in modulo a 0,8 m/s. Supponiamo inoltre che non ci sia attrito col piano del biliardo, e che gli urti della pallina con le sponde siano perfettamente elastici.

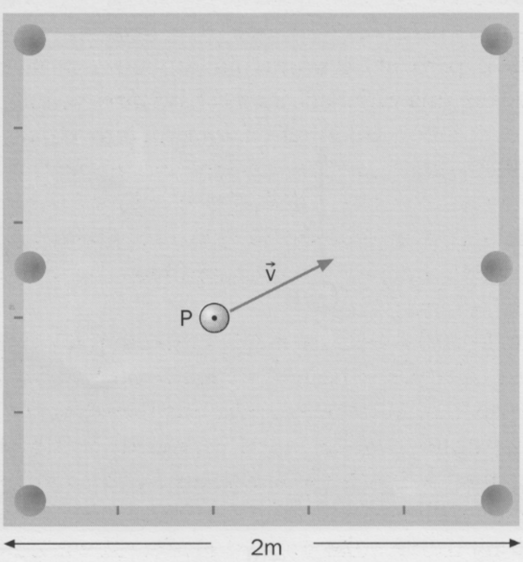


Come vedi la situazione è perfettamente determinata, e se ti chiedessimo di individuare dove si troverà la pallina, e con quale velocità, al tempo $t = 6$ secondi, non avresti di certo alcuna difficoltà.

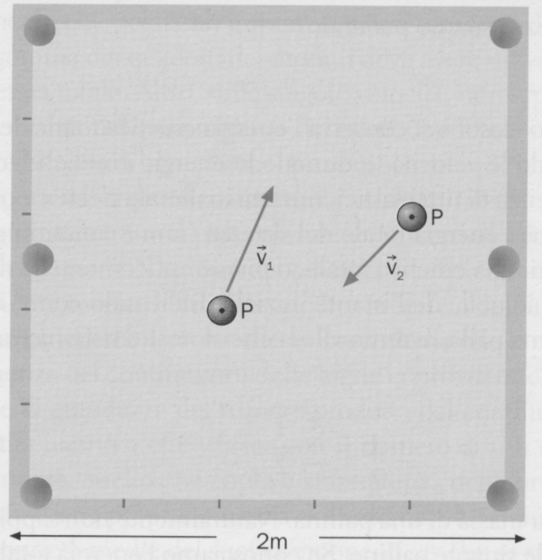
Il problema, in effetti, si presenta abbastanza semplice. L'urto della pallina contro le sponde non fa altro che invertire il verso della sua velocità, mantenendone inalterato il modulo; dunque la pallina si muoverà avanti e indietro lungo una linea retta, rimbalzando contro le sponde e coprendo in ogni secondo una distanza di ottanta centimetri, pari a due unità della scala della nostra figura. Dopo sei secondi essa avrà viaggiato per quattro metri e ottanta centimetri, urtando due volte contro le sponde, e si troverà nella posizione indicata in figura, con la stessa velocità dell'istante di partenza.



Non ci sarebbero particolari difficoltà a risolvere un problema analogo neanche se la condizione iniziale fosse del tipo rappresentato nella figura seguente: la ricostruzione della traiettoria della pallina e delle sue posizioni in istanti successivi sarebbe solo un po' meno immediata.



Supponiamo ora di avere non una, ma due palline sul biliardo, in una condizione iniziale come quella mostrata in figura.



In questo caso dovremo tenere conto anche del fatto che, a seconda delle velocità iniziali, prima o poi le palline si scontreranno. Supponiamo pure che, così come gli urti con le sponde, anche quelli tra le palline siano perfettamente elastici. Il calcolo delle traiettorie diventa ora più complicato, ma, con un po' di pazienza e un uso accorto delle leggi degli urti, si può ancora pensare di venirne a capo.

Ma se le palline sono tre, quattro, cento? Forse cominci a capire dove stiamo andando a finire. Siamo in presenza di un problema in cui le condizioni iniziali determinano esattamente, in linea di principio, l'evoluzione del sistema, perché tutte le leggi del moto sono note; abbiamo a che fare con moti rettilinei uniformi interrotti da urti elastici, che sappiamo trattare con precisione. Ma la determinazione concreta delle traiettorie di tutte le palline è praticamente impossibile; forse ci si potrebbe provare con un calcolatore molto potente, ma in ogni caso l'impresa rischia di diventare disperata se ipotizziamo un biliardo molto grande e un numero molto elevato di palline.

Potresti obiettare, non a torto, che nessuno ha mai visto biliardi giganteschi e perfettamente lisci su cui rotolano migliaia di biglie, e che dunque non si vede proprio dove stia l'interesse del problema. Il fatto è, però, che il nostro biliardo senza attrito costituisce un ottimo modello ideale per descrivere una varietà di sistemi fisici *davvero* interessanti, caratterizzati da un grande numero di componenti in interazione tra loro; e ha il vantaggio, rispetto a questi sistemi le cui proprietà non ti sono ancora familiari, di essere un esempio facilmente comprensibile. Un po' come l'ubriaco è diventato un modello per illustrare le proprietà tipiche del moto browniano, così ora il nostro modello del biliardo può tornare utile per arrivare a risultati che saranno poi applicabili, per esempio, allo studio delle proprietà dell'insieme delle molecole di un gas.

Consideriamo dunque un biliardo quadrato di lato L, su cui si muovono N palline (con N molto grande). Le palline (che per semplicità supporremo tutte uguali) urtano elasticamente tra loro e contro le sponde. È nota la condizione iniziale: conosciamo cioè posizione e velocità di tutte le N palline ad un certo istante, ma, dato l'elevato valore di N, è fuori di questione ricostruire tutte le traiettorie per determinare con esattezza lo stato del sistema a un istante successivo. Ci poniamo allora la domanda: c'è qualcosa che possiamo dire, nonostante questa limitazione, sullo stato futuro del sistema e sulle sue proprietà?

Cominciamo, intanto, con una prima osservazione. Esiste, per il moto delle palline sul biliardo, una grandezza caratteristica di cui possiamo dire qualcosa con certezza, tenendo conto del fatto che lo stato del sistema è modificato solo da una serie di urti elastici. Riesci a vedere di quale grandezza stiamo parlando?

Sappiamo che in un urto elastico si conserva l'energia cinetica totale dei corpi che urtano. Poiché nel nostro biliardo le velocità (e dunque le energie cinetiche) delle singole biglie variano solo in conseguenza di urti elastici, rimarrà inalterata nel tempo la somma delle loro energie cinetiche, cioè l'energia totale del sistema (non è infatti in gioco alcun tipo di energia potenziale). L'energia cinetica totale, o più semplicemente l'energia totale E, sarà dunque sempre uguale a quella dell'istante iniziale. Indicando con v_i il modulo della velocità iniziale della i-esima palla, avremo allora che al nostro sistema è associata una quantità conservata

$$E = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m v_i^2$$

dove m è, ovviamente, la massa di una pallina. Naturalmente non sappiamo dire nulla sulle energie cinetiche delle singole palline. Se conosciamo l'energia totale E e il numero totale di palline N, possiamo però definire agevolmente il valor medio dell'energia cinetica di una pallina, che indicheremo con $\bar{\varepsilon}$. Sarà infatti

$$\bar{\varepsilon} = \frac{E}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m v_i^2$$

Ciò ci conduce, in modo naturale, a definire un valore medio v_{M} del modulo della velocità tale che sia

$$\frac{1}{2} m v_{\mathrm{M}}^2 = \bar{\varepsilon}$$

Come è correlata la grandezza v_{M} con i moduli v_i delle velocità iniziali (tutte diverse) delle singole palline? Sostituendo nella relazione precedente l'espressione di $\bar{\varepsilon}$ si ottiene

$$\frac{1}{2} m v_{\mathrm{M}}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{1}{2} m \cdot \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} v_i^2$$

È perciò

$$v_{\mathrm{M}}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} v_i^2$$

Ma l'espressione che compare a secondo membro è proprio, per definizione, il valor medio $\overline{v^2}$ dei quadrati dei moduli delle velocità: dunque v_{M} è uguale a $\sqrt{\overline{v^2}}$, ovvero è il *valore quadratico medio delle velocità*.

C'è quindi un'analogia con quanto abbiamo già fatto discutendo il moto dell'ubriaco. Allora avevamo a che fare con uno spostamento quadratico medio, adesso abbiamo una velocità quadratica media. D'ora in avanti, per semplicità di linguaggio, parleremo anche direttamente di «velocità media» anziché di «velocità quadratica media» (come sarebbe più giusto) ogni volta che ciò non dia luogo a equivoci.

Dunque, per quanto riguarda l'energia del sistema, tutto avviene come se ogni biglia si muovesse con la stessa velocità di modulo v_{M}. È ovvio che questa descrizione è molto poco credibile: ci saranno palline con velocità minore e palline con velocità maggiore di v_M, e per di più la velocità di ogni singola pallina varierà continuamente, a seguito degli urti con le altre palline e con le sponde. Ci sarà, come si dice, una certa distribuzione delle velocità; e l'unico vincolo che possiamo imporre a priori sui valori delle velocità delle singole palline è che la somma dei quadrati dei moduli deve avere un valore che soddisfi la conservazione dell'energia totale. Altro, sulle singole velocità, non sappiamo dire; la complessità del sistema, derivante dal gran numero dei corpi che lo compongono, ci preclude la possibilità di seguire la storia di ogni particolare corpo, e dunque anche di determinare esattamente, a un dato istante, la distribuzione delle velocità.

Per il momento, non siamo tuttavia particolarmente interessati a stabilire il modo in cui sono distribuite le velocità tra le N palline del biliardo; quello che vogliamo è ricavare, attraverso il comportamento medio delle palle, alcune proprietà dell'insieme complessivo. Per esempio, potremmo chiederci: quanto vale la forza media che si esercita sulle sponde del biliardo in conseguenza dei continui urti delle biglie contro di esse? Oppure potremmo voler valutare l'ordine di grandezza del rumore prodotto dal continuo succedersi degli urti. Entrambe le quantità hanno a che vedere con il numero di urti che si verificano nel biliardo (più precisamente, quello che conta è la frequenza degli urti, cioè il numero di urti al secondo); e questa è una proprietà media del sistema, che si può pensare di mettere in relazione con le proprietà medie dei suoi componenti, anche se se ne ignora il comportamento esatto.

Prendiamo dunque sul serio l'ipotesi che tutte le palline si muovano con una velocità il cui modulo sia sempre v_M; sappiamo che si tratta di una semplificazione assolutamente non credibile ai fini di una descrizione dello stato reale dei vari componenti del sistema, ma confidiamo nel fatto che sia un'utile guida per studiarne alcune proprietà di insieme.

Valori medi e proprietà collettive

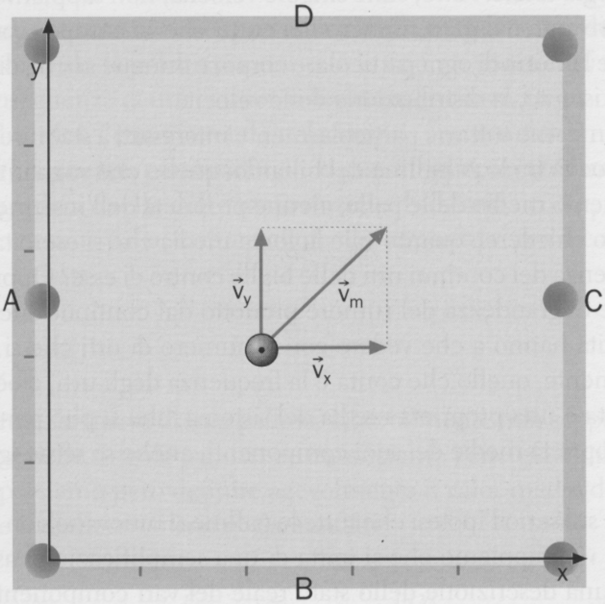
Poniamoci allora il problema di determinare la forza che si esercita su una delle sponde del biliardo; per far questo, dobbiamo «contare» quanti urti al secondo avvengono contro quella sponda, in un biliardo-modello su cui N palline rotolano con velocità di stesso modulo v_M. Possiamo dire qualcosa sulle *direzioni* delle varie velocità?

Al solito, non possiamo dire nulla di esatto. Ma, proprio grazie al fatto che gli oggetti in movimento sono molto numerosi, è ragionevole ipotizzare che a un istante generico essi si muovano «in tutte le direzioni»; ovvero che non esista, in media, nessuna direzione lungo cui si abbia un'agitazione particolarmente violenta.

Avrai forse riconosciuto che stiamo estendendo al caso del biliardo (ossia a un movimento in due dimensioni) l'ipotesi già fatta per il moto dell'ubriaco (in una dimensione): quella cioè per cui le direzioni possibili sono tutte equivalenti. Mentre lì, però, l'equivalenza delle direzioni era un'immediata conseguenza del fatto che l'ubriaco si muoveva «del tutto a caso», qui essa viene giustificata dal fatto che una distribuzione «del tutto a caso» delle direzioni delle velocità delle palline è la più naturale che si possa ipotizzare in assenza di un'informazione più dettagliata. Ed è proprio il grande numero dei componenti del sistema – causa dell'impossibilità di una descrizione dettagliata – l'elemento che rende plausibile la nostra ipotesi: se ci sono tante palline, la situazione più probabile che possiamo immaginare è che esse se ne vadano in giro in misura equivalente in tutte le direzioni.

Possiamo formalizzare l'ipotesi in questo modo: indicando, al solito, con x e y le due direzioni parallele alle sponde del biliardo, la velocità $\vec{v}_M$ di una *singola* palla avrà componenti, lungo le due direzioni, $\vec{v}_x$ e $\vec{v}_y$ tali che sia

$$v_x^2 + v_y^2 = v_M^2$$



L'ipotesi che tutte le direzioni di moto siano equivalenti implica in particolare che, in media, ci si muova tanto lungo la direzione x quanto lungo la direzione y: deve essere pertanto, facendo la media delle componenti v_x e v_y delle velocità di tutte le palline,

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2}$$

e, poiché $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = v_M^2$, si ha

$$v_x^2 = \frac{v_M^2}{2}$$

Il valore quadratico medio della velocità in una direzione parallela a una delle sponde, per esempio la direzione x, sarà perciò

$$v_{Mx} = \sqrt{v_x^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, v_M$$

Ora possiamo «contare» il numero di urti che, in media, ogni palla effettua, nell'unità di tempo, contro una sponda, per esempio la sponda A della figura. Una pallina che si muove in direzione x con velocità v_{Mx} coprirà in un tempo Δt una distanza pari a $v_{Mx}\,\Delta t$; se L è la lunghezza del lato del biliardo, nello stesso intervallo urterà contro le due sponde A e C un numero di volte pari alla distanza totale percorsa divisa per la distanza tra le sponde. È dunque

$$\textit{numero di urti con le sponde nel tempo } \Delta t = v_{Mx}\,\frac{\Delta t}{L}$$

Gli urti contro la sponda A saranno la metà del numero appena ottenuto

$$\textit{numero di urti contro una sponda nel tempo } \Delta t = v_{Mx}\,\frac{\Delta t}{2L}$$

Per sapere quale sia il numero di urti effettuati in media da una palla contro una sponda nell'unità di tempo, numero che indichiamo con n, basterà dividere la quantità precedente per Δt. Si ottiene così

$$n = \frac{v_{Mx}}{2L}$$

Sai calcolare allora la forza che, in media, una biglia esercita su una sponda del biliardo? (È un problema simile a uno che ti abbiamo proposto alla fine della seconda unità...)

In ogni urto, la variazione di quantità di moto della palla vale in modulo (ricorda che l'urto è elastico)

$$\Delta p = 2mv_{Mx}$$

In un tempo Δt, allora, la variazione totale di quantità di moto negli urti contro una sponda sarà

$$\textit{variazione di quantità di moto in un urto} \cdot \textit{numero di urti in } \Delta t = 2mv_{Mx} \cdot v_{Mx}\frac{\Delta t}{2L}$$

Ma questa quantità, come sai, è proprio uguale alla forza media $\bar{f}$ esercitata dalla biglia durante l'urto, moltiplicata per l'intervallo di tempo Δt; avremo dunque

$$\bar{f}\,\Delta t = mv_{Mx}^2\frac{\Delta t}{L}$$

cioè

$$\bar{f} = m\frac{v_{Mx}^2}{L}$$

Questa è la forza media esercitata da *una* palla su una sponda: la forza totale F è dovuta al contributo di tutte le palle. Si ottiene allora, moltiplicando $\bar{f}$ per N

$$F = N\frac{mv_{Mx}^2}{L}$$

o anche, ricordando che $v_{Mx}^2 = v_M^2/2$,

$$F = \frac{1}{2}N\frac{mv_{Mx}^2}{L} = \frac{E}{L}$$

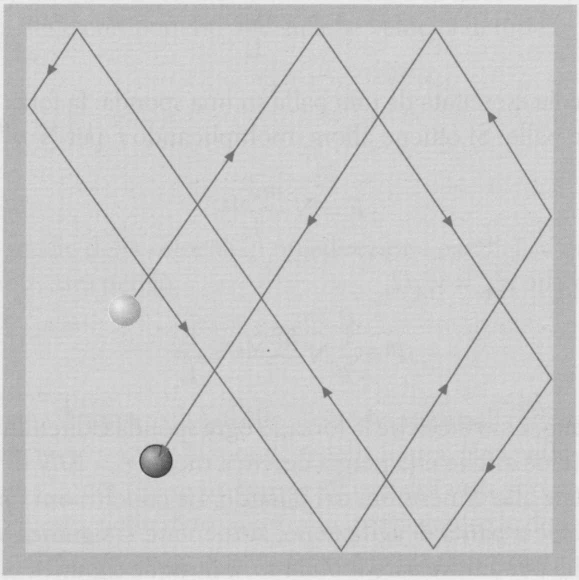
«Leggiamo» il risultato. Esso dice che la forza su ogni sponda è direttamente proporzionale all'energia totale E (cioè anche all'energia cinetica media $\bar{\varepsilon} = E/N$ di ogni palla), e inversamente proporzionale alle dimensioni del biliardo. Le conclusioni sono del tutto sensate: a parità di energia, cioè a parità di agitazione, aumentare L significa aumentare il tempo necessario a una palla per attraversare il biliardo, e dunque significa diminuire la frequenza degli urti.

Nota che la forza è proporzionale a E, e dipende quindi non dalla velocità media, ma dal quadrato della velocità. La cosa, almeno in termini qualitativi, può essere spiegata tenendo presente che un aumento della velocità comporta sia un aumento della variazione di quantità di moto Δp associata ad ogni urto (con un conseguente aumento del valore della forza media esercitata durante un singolo urto), sia un aumento globale del numero n di urti al secondo, perché diminuisce il tempo tra un urto e il successivo; è dunque naturale che la forza totale, che è proporzionale al prodotto di n e di Δp, dipenda dal quadrato della velocità.

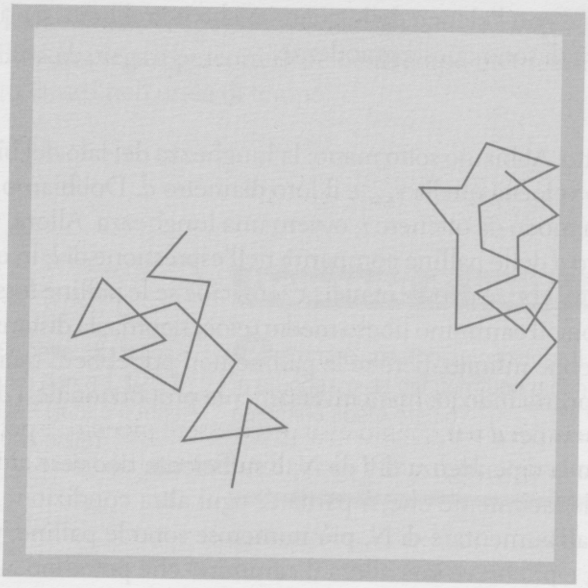
Il cammino libero medio

Fino a questo punto abbiamo ignorato completamente gli urti delle palline tra loro; abbiamo trattato il biliardo, insomma, come se le biglie fossero davvero dei punti materiali, privi di dimensioni, che quindi non possono scontrarsi, ma solo rimbalzare contro le sponde. In realtà, come è ovvio, le palline del biliardo hanno una dimensione precisa, individuata dal loro diametro d: e per quanto esso possa essere piccolo rispetto al lato del biliardo L, ci saranno comunque degli urti tra le palline, e tanto più numerosi quanto più grande è il numero N di palline.
Pensi che il fatto di non aver preso in considerazione gli urti tra le biglie abbia influenzato in modo rilevante il risultato che abbiamo ottenuto sulla forza esercitata su una sponda?

Francamente non sappiamo che risposta avrai dato. Ti diciamo comunque che, per quanto la cosa possa apparire strana a prima vista, la conclusione corretta (che si potrebbe dimostrare rigorosamente) è che gli eventuali urti delle biglie tra loro non influenzano il risultato che abbiamo ottenuto. In modo qualitativo lo si può «vedere» aiutandosi con una rappresentazione grafica del moto delle biglie. In assenza di urti tra di esse, la traiettoria di ogni pallina sarà qualcosa di simile.



La presenza di urti tra le palline avrà come conseguenza che le traiettorie descritte saranno molto più irregolari, e saranno caratterizzate da frequenti, bruschi cambiamenti di direzione; qualcosa del tipo illustrato in figura, dove sono rappresentati i percorsi seguiti da due palline, di cui una situata verso il centro del biliardo e l'altra in prossimità di una sponda.



Si intuisce dalla figura quello che succede: è vero che, a causa degli urti tra le palline, quelle che si trovano verso il centro del biliardo impiegheranno più tempo ad attraversarlo, e quindi a urtare contro una sponda, ma è anche vero che, proprio per lo stesso motivo, quelle situate più in periferia urteranno contro la sponda vicina con una frequenza maggiore di quella che abbiamo calcolato. In media, i due effetti si compensano.
La cosa cambia, però, nel caso in cui vogliamo usare il numero di urti al secondo che avvengono nel biliardo per stimare l'intensità del rumore da essi prodotto. In questo caso, ovviamente, non è più possibile ignorare il contributo dovuto agli urti tra le biglie! Il rumore prodotto sarà proporzionale al numero *totale* di urti al secondo: alla frequenza degli urti delle palline con le sponde, che abbiamo già calcolato, occorrerà aggiungere la frequenza degli urti tra le palline. Per calcolare questo ultimo numero seguiremo la seguente strategia: cercheremo un'espressione per la distanza l che una biglia percorre sul biliardo, in media, tra un urto con un'altra biglia e l'urto successivo; il numero di urti effettuati nell'unità di tempo da quella biglia sarà allora pari a v_M/l, e il numero totale di urti al secondo tra le biglie si otterrà moltiplicando il risultato per N (anzi, meglio, per $N/2$, perché moltiplicando semplicemente per N conteremmo ogni urto due volte!). Sarà cioè

$$\textit{numero totale di urti tra le biglie nell'unità di tempo} = \frac{v_M}{l} \cdot \frac{N}{2}$$

Il problema si riduce dunque a quello di determinare la distanza media l tra un urto e l'altro: questa quantità si chiama, con un termine il cui significato è immediatamente chiaro, **cammino libero medio**. «Libero» perché rappresenta il tratto di percorso in cui l'oggetto in movimento è appunto libero dall'azione di altri corpi (non ci sono urti); «medio» perché rappresenta una proprietà statistica dell'insieme degli oggetti, un valore ottenuto mediando i percorsi tra un urto e l'altro effettivamente seguiti dalle palline nel loro moto reale.
Per determinare il cammino libero medio, anziché ricorrere a procedure di calcolo rigorose ma complicate, useremo il buon senso e l'analisi dimensionale. In questo modo, come sai, potremo ottenere un'espressione che darà correttamente la dipendenza di l dalle altre grandezze caratteristiche del problema, a meno però di fattori numerici adimensionali. Tuttavia, non ci preoccuperemo più di tanto della mancanza, visto che quello che ci interessa è solo dare una stima sensata e dimensionalmente giusta.

Cominciamo dunque con l'elenco delle quantità che potrebbero, a priori, comparire nell'espressione di l. Quali sono queste grandezze?

L'elenco è presto fatto. Abbiamo sotto mano: la lunghezza del lato del biliardo L, il numero di palline N, la loro velocità media v_M, e il loro diametro d. Dobbiamo combinare tra loro queste grandezze in modo da ottenere l, ovvero una lunghezza. Allora, vediamo: intanto, è certo che il diametro d delle palline comparirà nell'espressione di l; in quale modo, è facile capirlo. Basta pensare che se d fosse uguale a zero, cioè se le palline fossero dei punti materiali senza dimensioni, il cammino libero medio (cioè, ricorda, la distanza media tra due urti tra le palline) sarebbe infinito, perché le palline non potrebbero mai urtare tra loro. Abbiamo dunque un primo indizio: l sarà inversamente proporzionale a d; così otteniamo infatti il caso limite $l = \infty$ per $d = 0$.
Per quanto riguarda la dipendenza di l da N, è sufficiente ricorrere al buon senso, in base al quale si conclude facilmente che, a parità di ogni altra condizione, il cammino libero medio diminuisce all'aumentare di N: più numerose sono le palline, più è probabile che esse urtino tra loro, e più breve sarà allora il cammino che potranno fare indisturbate. Perciò è sensato ammettere che l sarà inversamente proporzionale a N.
A questo punto, per chiudere la discussione, ci sarà di grande aiuto l'analisi dimensionale. In particolare, riesci a vedere, aiutandoti con l'analisi delle dimensioni delle grandezze in gioco, se e come l dipende da v_M?

Stiamo cercando di costruire una lunghezza (l) usando come ingredienti un numero puro (N), due quantità che sono a loro volta omogenee a una lunghezza (d e L) e una velocità (v_M), che dimensionalmente è una lunghezza diviso un *tempo*. Ma allora non c'è modo, comunque combiniamo d, L, e v_M, di far scomparire quel tempo per ottenere una grandezza che sia una lunghezza! Conclusione: il cammino libero medio *non* può dipendere da v_M.
Ci resta ancora da sistemare L. Abbiamo già deciso che l deve essere inversamente proporzionale a d: per costruire allora una lunghezza (l) con altre due lunghezze (L e d) di cui una, d, ha esponente meno uno, esiste una sola possibilità: bisogna, naturalmente, che L compaia con esponente uguale a due. L'espressione del cammino libero medio, a meno di eventuali fattori numerici, sarà perciò

$$l = \frac{L^2}{Nd}$$

L^2 è l'area del biliardo. Nota allora che N/L^2 rappresenta il numero di palline per unità di superficie; è il numero che dice quanto fitta è la distribuzione degli oggetti sul biliardo (si chiama anche, infatti, *densità superficiale*). Allora il nostro risultato diventa ancora più chiaro: il cammino libero medio è tanto maggiore quanto più piccole sono le palline e quanto più bassa è la loro densità sul biliardo. Esso è cioè inversamente proporzionale a queste quantità, e questo è esattamente quanto è scritto nell'espressione che abbiamo ottenuto.
Possiamo quindi concludere che sarà

$$\textit{numero totale di urti tra le palline nell'unità di tempo} = \frac{v_M}{l} \cdot \frac{N}{2} = v_M \frac{N^2 d}{2L^2}$$

Naturalmente, questa quantità dipende anche da v_M. All'aumentare della velocità media, infatti, il cammino libero medio (che non dipende da v_M) resta invariato, ma diminuisce il tempo che ogni pallina impiega a percorrerlo, cioè il tempo tra un urto e l'altro, e aumenta dunque il numero di urti nell'unità di tempo.

Domande di verifica

1 Su un biliardo si muovono 100 palle di massa $m = 300$ g. L'energia totale del sistema è pari a 1 125 J. Quanto vale la velocità media delle palle? Qual è il massimo valore possibile della velocità di una palla?

2 Perché non abbiamo incluso il tempo t nella lista delle grandezze da cui potrebbe dipendere esplicitamente il cammino libero medio?