Costanti fondamentali e dimensioni caratteristiche

(G. Battimelli)

	numero di atomi	massa	dimensioni lineari
atomo	1	μ	a
essere vivente	n	$m = n\mu$	$\ell \simeq n^{1/3} a$
pianeta	N	$M = N\mu$	$L \simeq N^{1/3} a$

ordini di grandezza: $\mu \simeq 10^{-27}$ Kg, $a \simeq 10^{-10}$ m

meglio: "qualche" 10^{-26}

Quali sono i valori "ragionevoli" di M e L?
E di ℓ e m?

Tutto si gioca sul bilancio delle due interazioni fondamentali (su scala superiore a quella atomica)

<u>interazione gravitazionale</u> costante caratteristica $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ $N m^2 Kg^{-2}$

<u>interazione elettromagnetica</u> costante caratteristica e^2

(N.B. qui e^2 è l'usuale $\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}$) $\qquad e^2 = 2.3 \cdot 10^{-28}$ $N \cdot m^2$

Energia di legame gravitazionale tra due atomi vicini

$$E_{gr} \simeq G \frac{\mu^2}{a}$$

Energia di legame elettromagnetica tra due atomi vicini

$$E_{em} \simeq \frac{e^2}{a}$$

$$\frac{E_{em}}{E_{gr}} = \frac{e^2}{G\mu^2} \simeq 10^{34}$$

Alla scala atomica, domina l'interazione elettromagnetica

Per un sistema di N atomi, al crescere di N

- le forze gravitazionali (solo attrattive) sono sempre efficaci
- per le forze e.m. (attrattive e repulsive) interviene un effetto di schermo: le forze e.m. "saturano"

$\Rightarrow$ L'energia di legame totale e.m. è approssimativamente lineare in N (ogni atomo interagisce solo con i vicini prossimi)

$$U_{em} \simeq N E_{em}$$

$\Rightarrow$ L'energia di legame totale gravitazionale è data dalle energie di tutte le coppie di atomi, distribuiti in un volume di dimensioni lineari $\approx L$. Le coppie sono $\frac{1}{2} N(N-1) \approx N^2$

$$U_{gr} \approx N^2 \frac{G\mu^2}{L} \approx N^2 \frac{G\mu^2}{N^{1/3} a} \approx N^{5/3} E_{gr}$$

Al crescere di N, nonostante sia $E_{gr} \ll E_{em}$, tende a diventare dominante U_{gr} su U_{em}. Quando $U_{gr} > U_{em}$, diventa energeticamente proibitivo "separare" pezzi di materia. Ma "separare" (scambiare) pezzi di materia è condizione per la possibilità di forme viventi. Dunque un pianeta in grado di ospitare la vita non può essere troppo grosso. Un limite superiore è dato dalla condizione che sia $U_{em} \gtrsim U_{gr}$

cioè
$$N E_{em} \gtrsim N^{5/3} E_{gr}$$

$$\Rightarrow \quad N \lesssim \left(\frac{E_{em}}{E_{gr}} \right)^{3/2}$$

D'altra parte, un pianeta abitabile deve poter trattenere una atmosfera → non può essere troppo piccolo.

Condizione: l'energia termica media (che è dell'ordine di grandezza dell'energia atomica caratteristica E_{em}) deve essere inferiore alla profondità della buca di potenziale gravitazionale, che è

$$\approx G \frac{M\mu}{L}$$

Dunque $$E_{em} \lesssim \frac{GM\mu}{L} \approx \frac{NG\mu^2}{N^{1/3}a} \approx N^{2/3} E_{gr}$$

$$\Rightarrow \qquad N \gtrsim \left(\frac{E_{em}}{E_{gr}}\right)^{3/2}$$

Pertanto per un pianeta abitabile deve essere

$$N \approx \left(\frac{E_{em}}{E_{gr}}\right)^{3/2} \approx 10^{54}$$

Quindi $$M \approx 10^{25}\ \mathrm{kg}, \qquad L \approx 10^{7}\ \mathrm{m}$$

[un pianeta un po' "grosso", ma risultato soddisfacente come ordine di grandezza] OK

Quanto può essere grande un essere vivente alla superficie di un pianeta così?

Non <u>troppo</u> grande: se è troppo grande, cadendo si rompe.

$E_{rup} = n' E_{em}$, con n' = numero di atomi di una sezione del corpo, cioè $n' \approx \frac{\ell^2}{a^2} = n^{2/3}$

$$E_{rup} \approx n^{2/3} E_{em}$$

Deve essere $E_{rup} \gtrsim mg\ell = n\mu \frac{GM}{L^2}\ell = n^{4/3} N^{1/3} E_{gr}$

$$\Rightarrow \qquad n \lesssim N^{1/2}$$

da cui la "taglia" massima di un essere vivente

$$n \approx 10^{26} \qquad m \approx 1\ \mathrm{Kg} \qquad l_0 \approx 10\ \mathrm{cm}$$

Tutto è legato quindi ai valori di G, e^2, μ, a

Ma perchè a è proprio 10^{-10} m?

→ Ancora una costante fondamentale:

$$a = \frac{h^2}{e^2 m_e} \qquad (m_e = \text{massa dell'elettrone})$$

< è la costante di Planck che fissa la scala atomica >