

# **Alle origini della fisica dei quanti: il significato della costante di Planck**

**Giovanni Battimelli**

**Dipartimento di fisica, Sapienza Università, Roma**



**Max Planck**



**Albert Einstein**



**Niels Bohr**



**Louis de Broglie**



**Erwin Schrödinger**



**Werner Heisenberg**

**Quantizzazione dell'energia degli oscillatori armonici (Planck)  $E = nh\nu$**

**Ipotesi dei quanti di luce (Einstein)  $\epsilon = h\nu$**

**Quantizzazione delle orbite elettroniche (Bohr)  $r_n = n^2h^2/4\pi^2mC$**

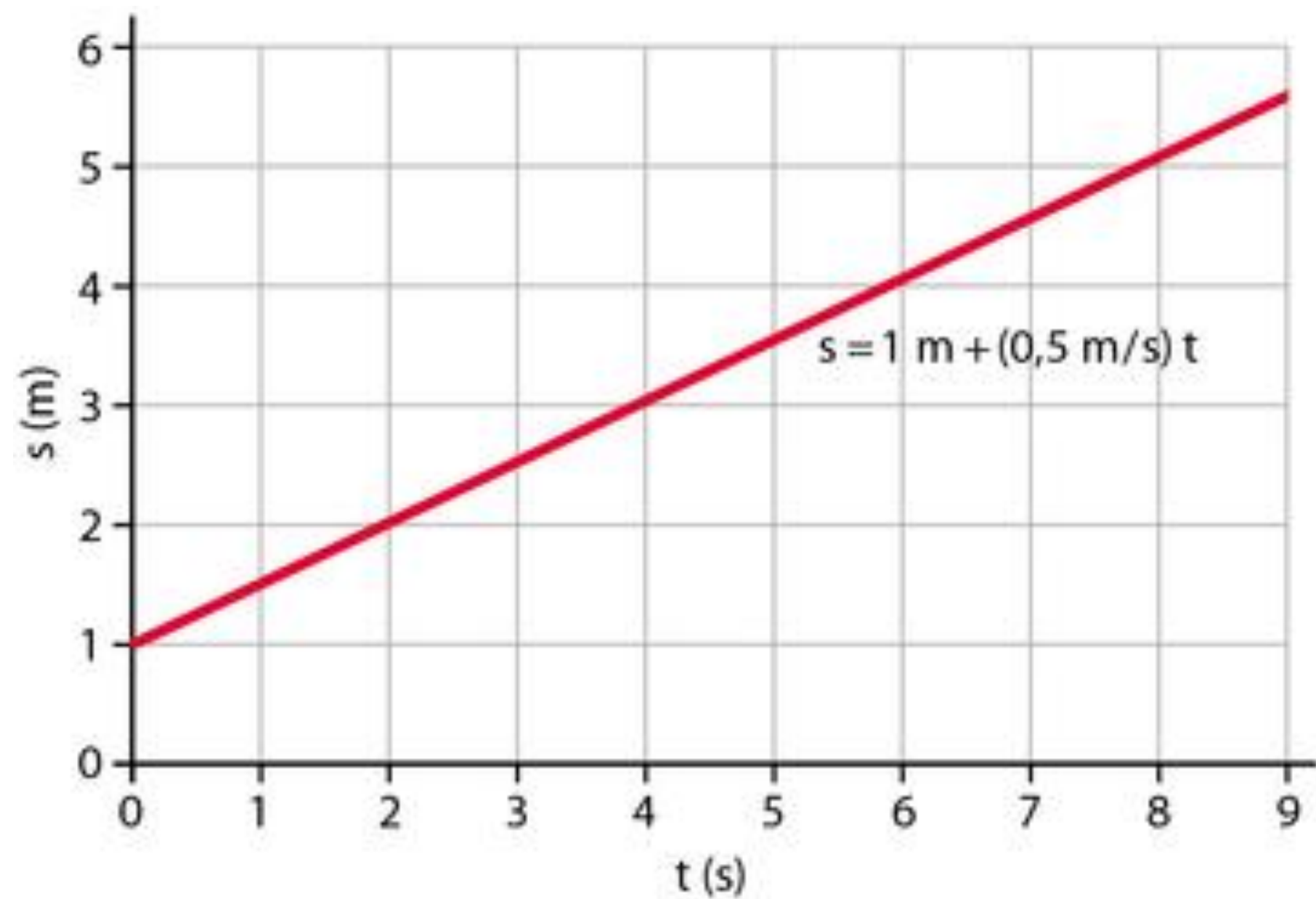
**Dualismo onda-corpuscolo (De Broglie)  $p = h/\lambda$**

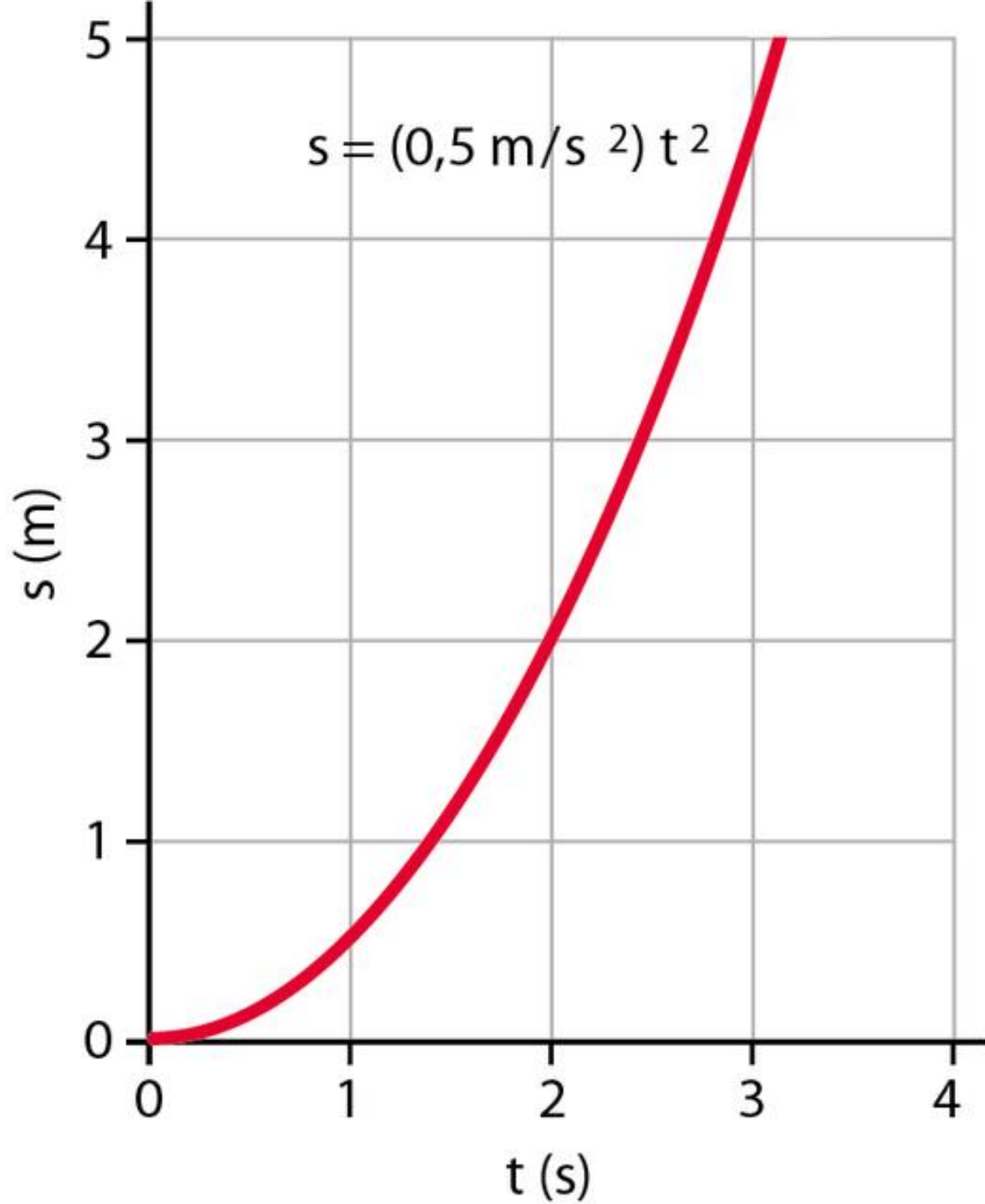
**Principio di indeterminazione (Heisenberg)  $\Delta p\Delta x \geq h/4\pi$**

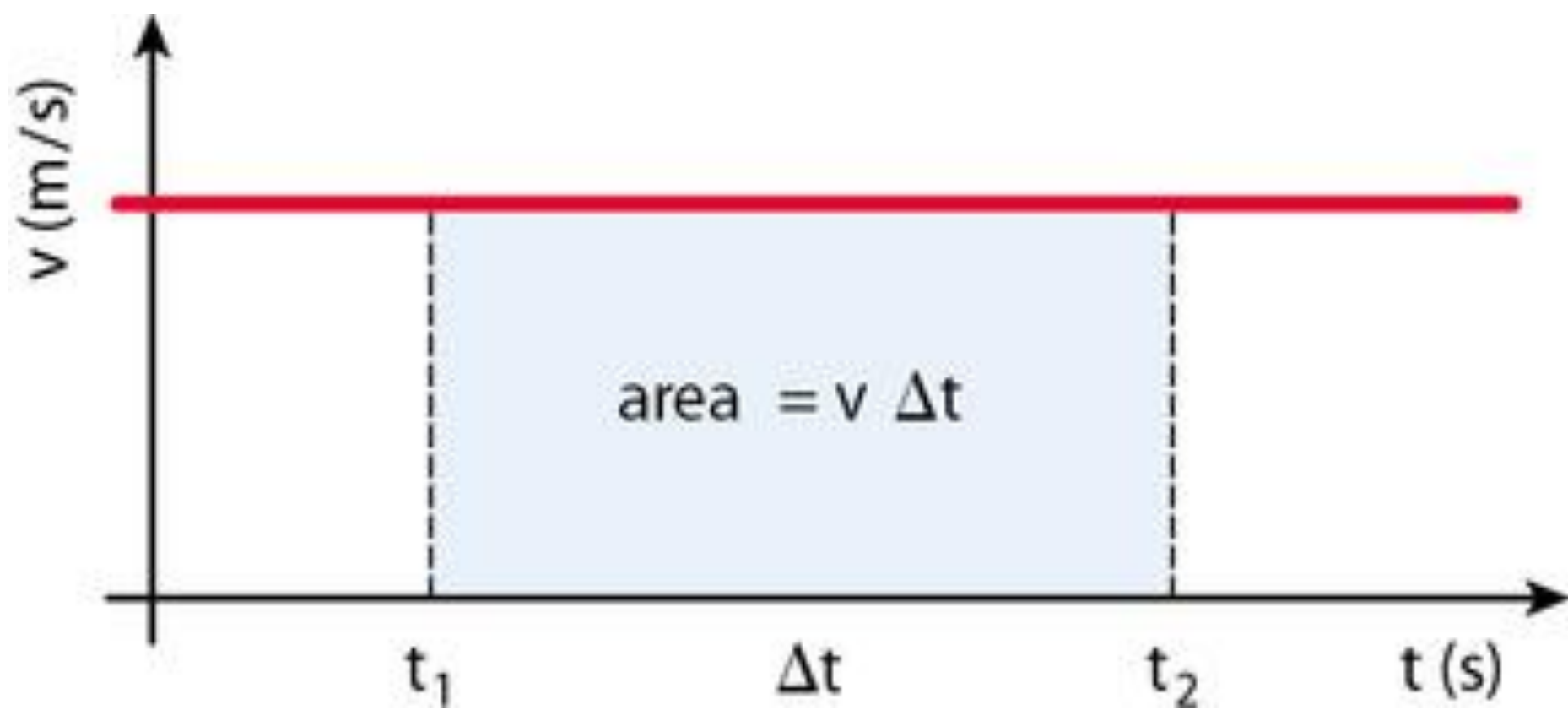
**Come il prezzemolo,  $h$  sta dappertutto**

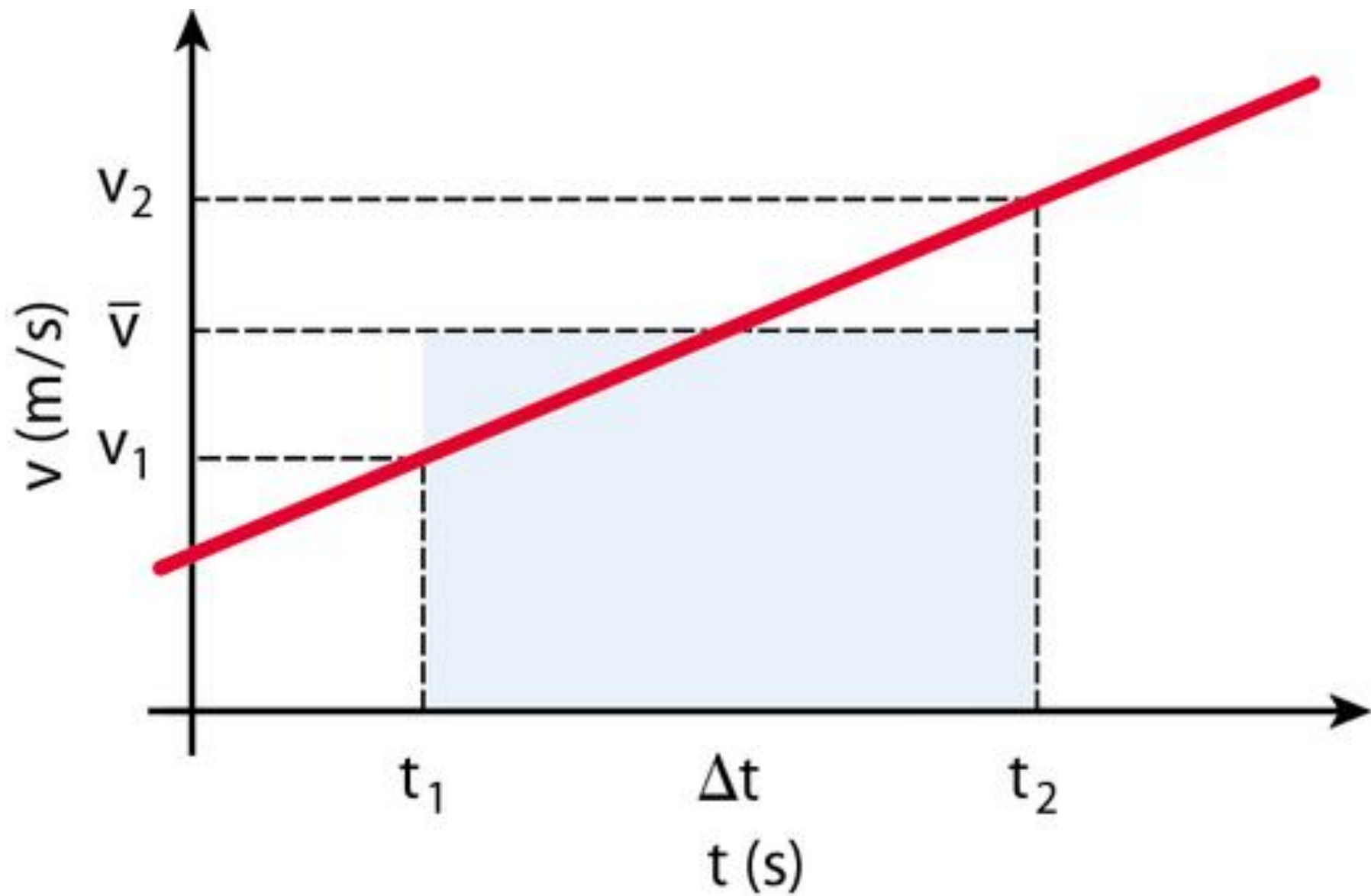
**Ma i nessi tra tutte queste relazioni rimangono oscuri**

**E soprattutto, non si sa che cosa sia  $h$**











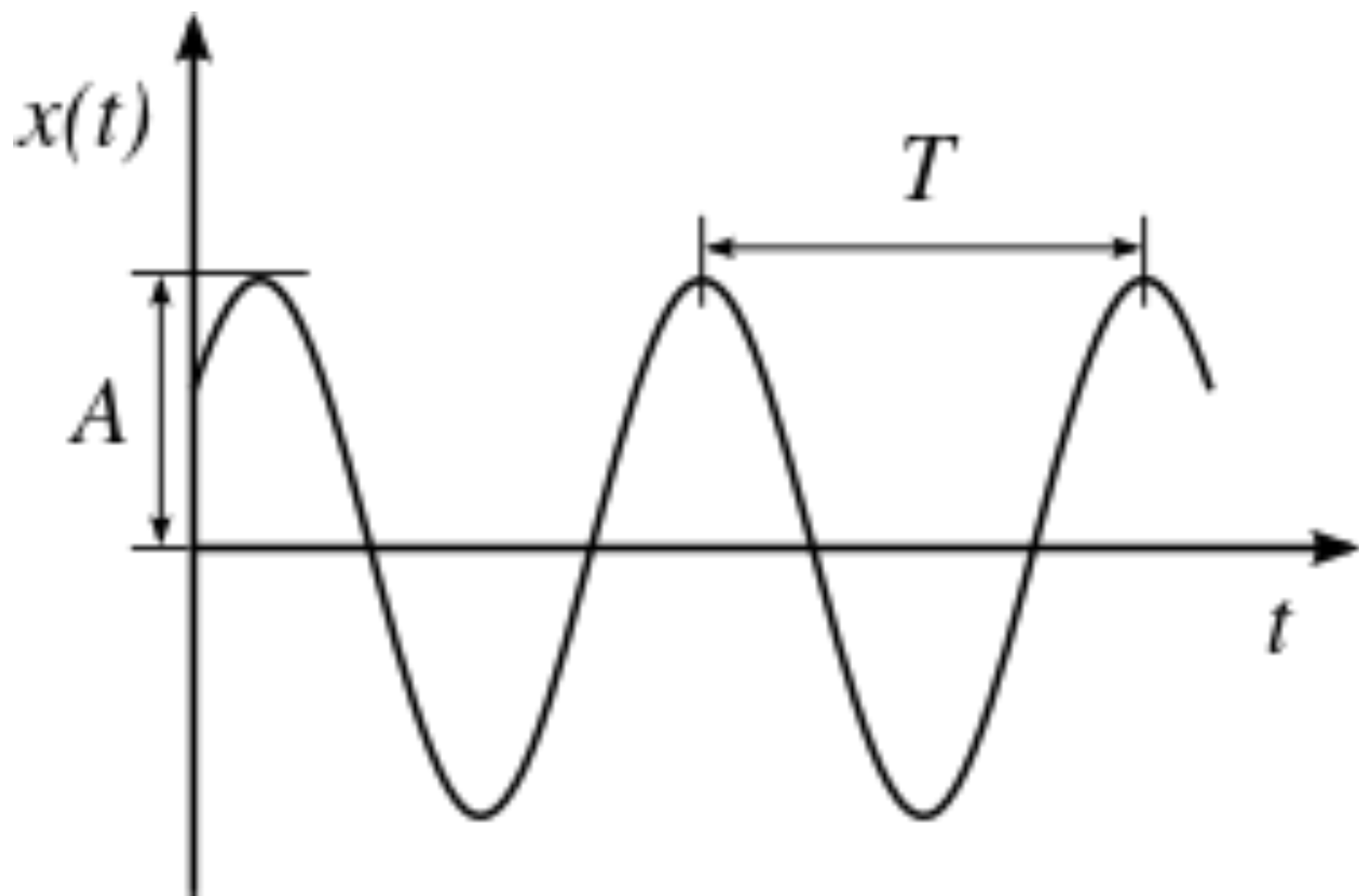
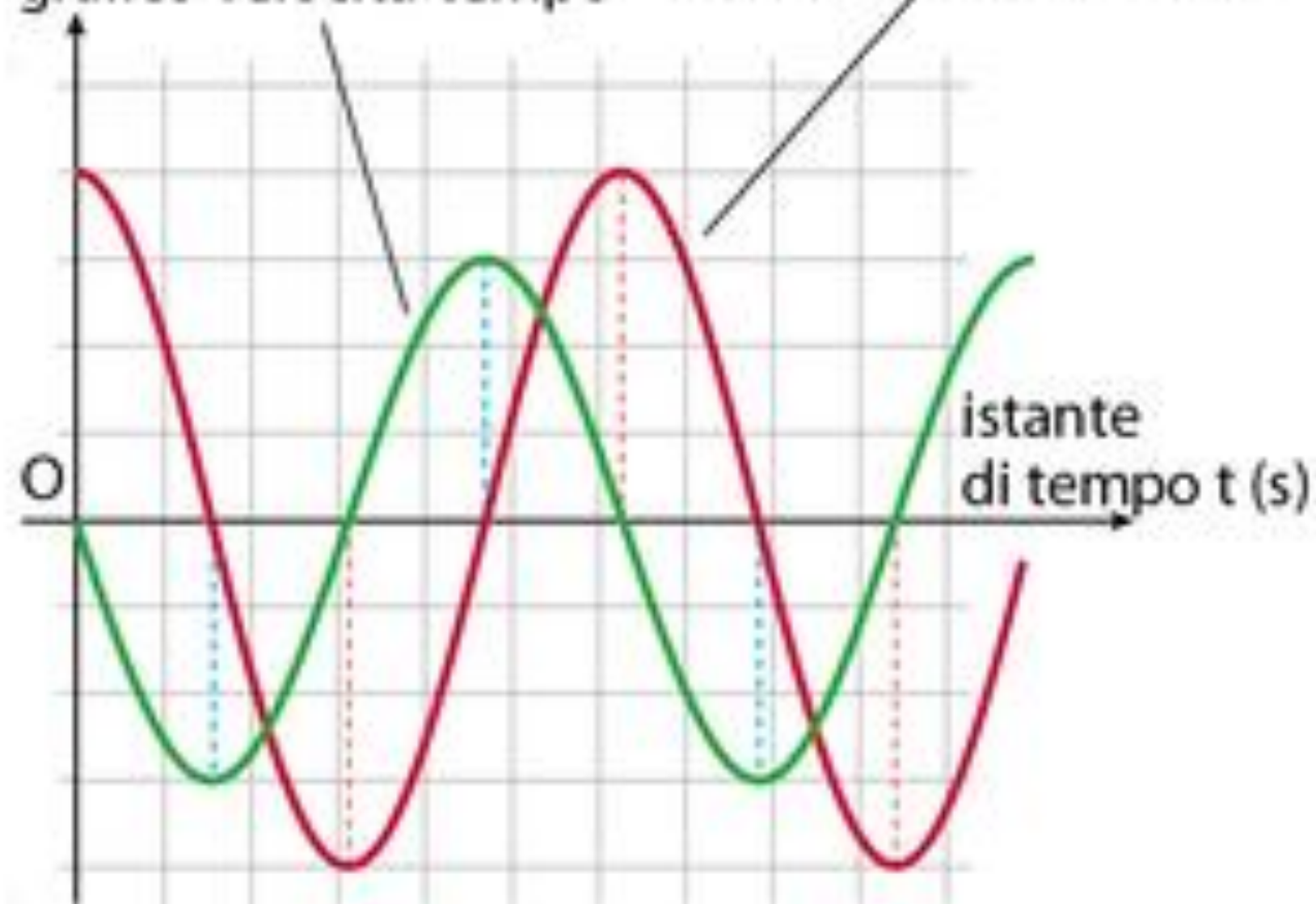
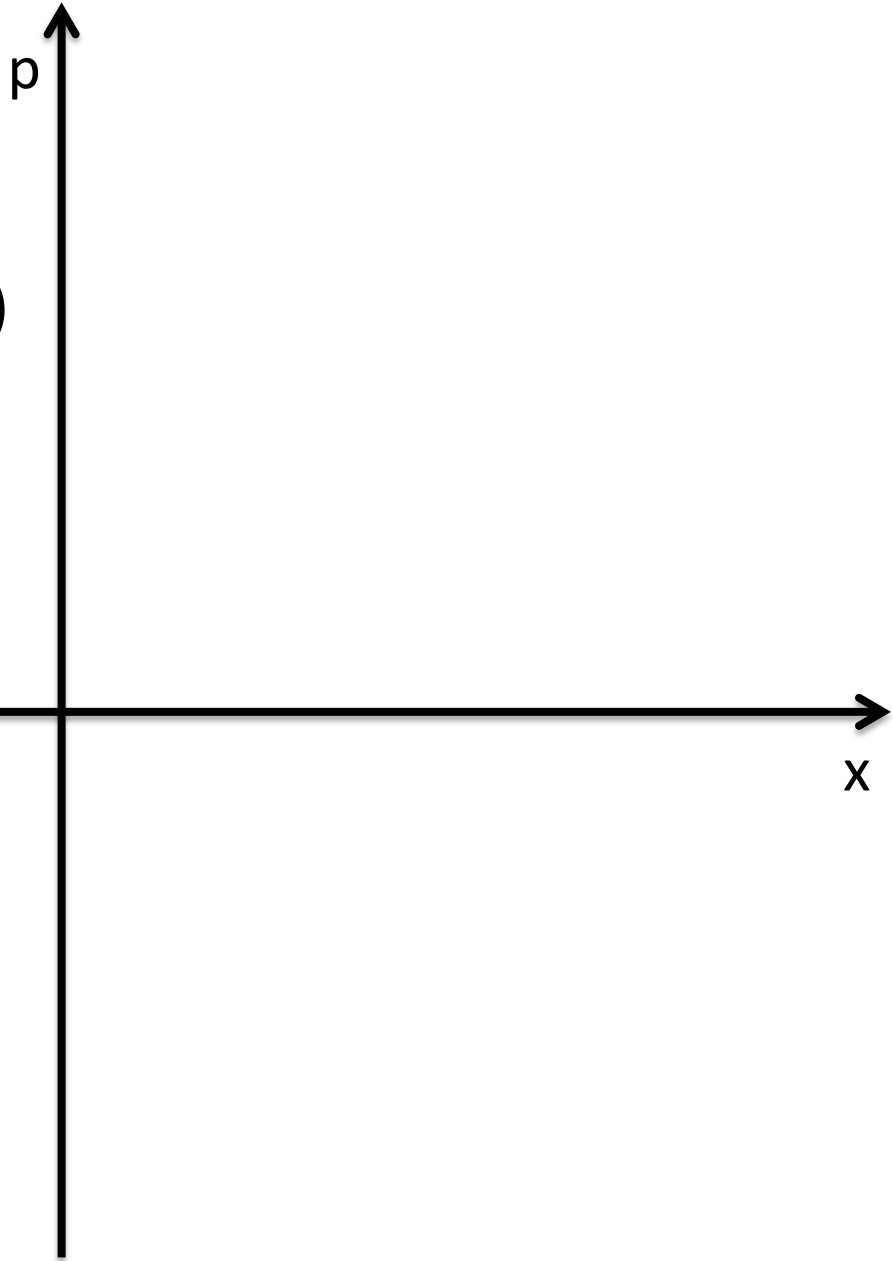


grafico velocità-tempo

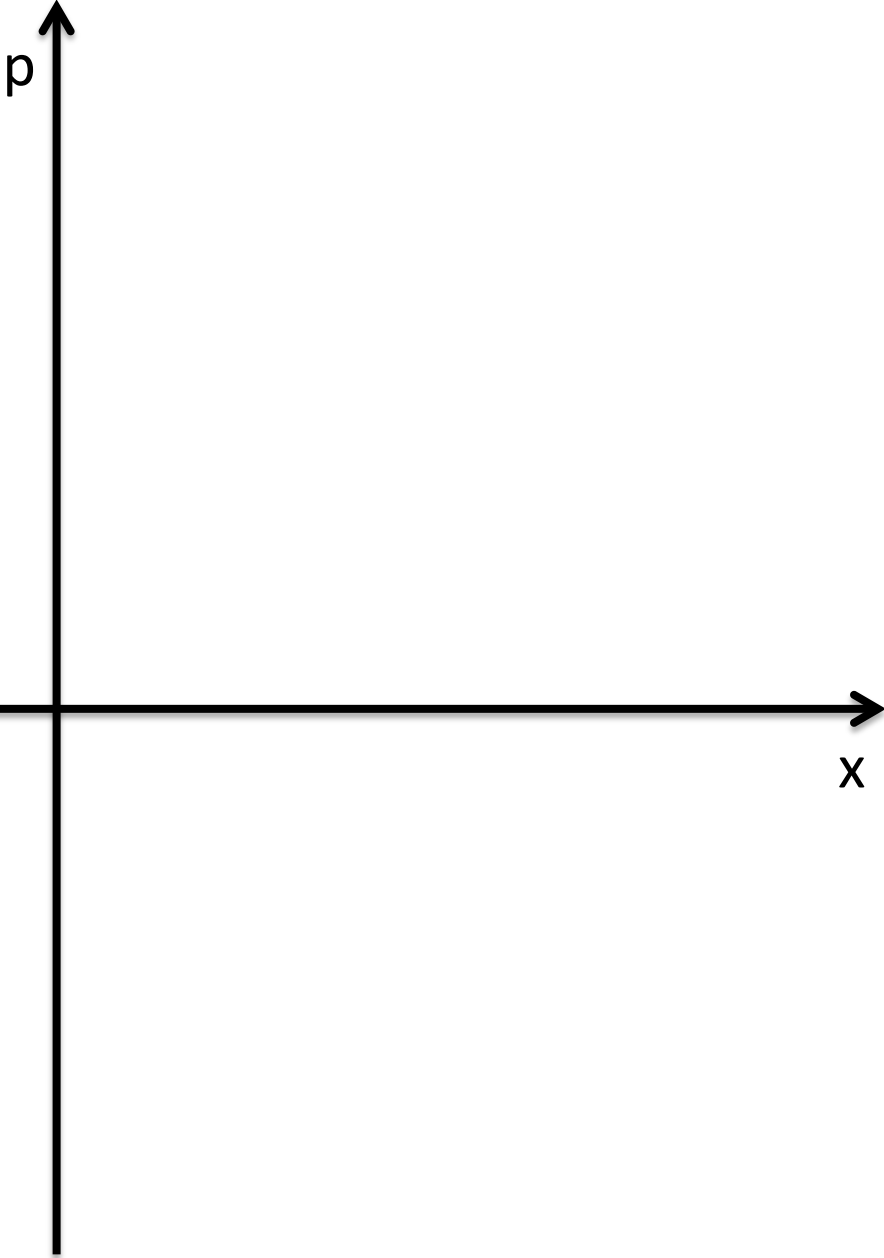
grafico spazio-tempo

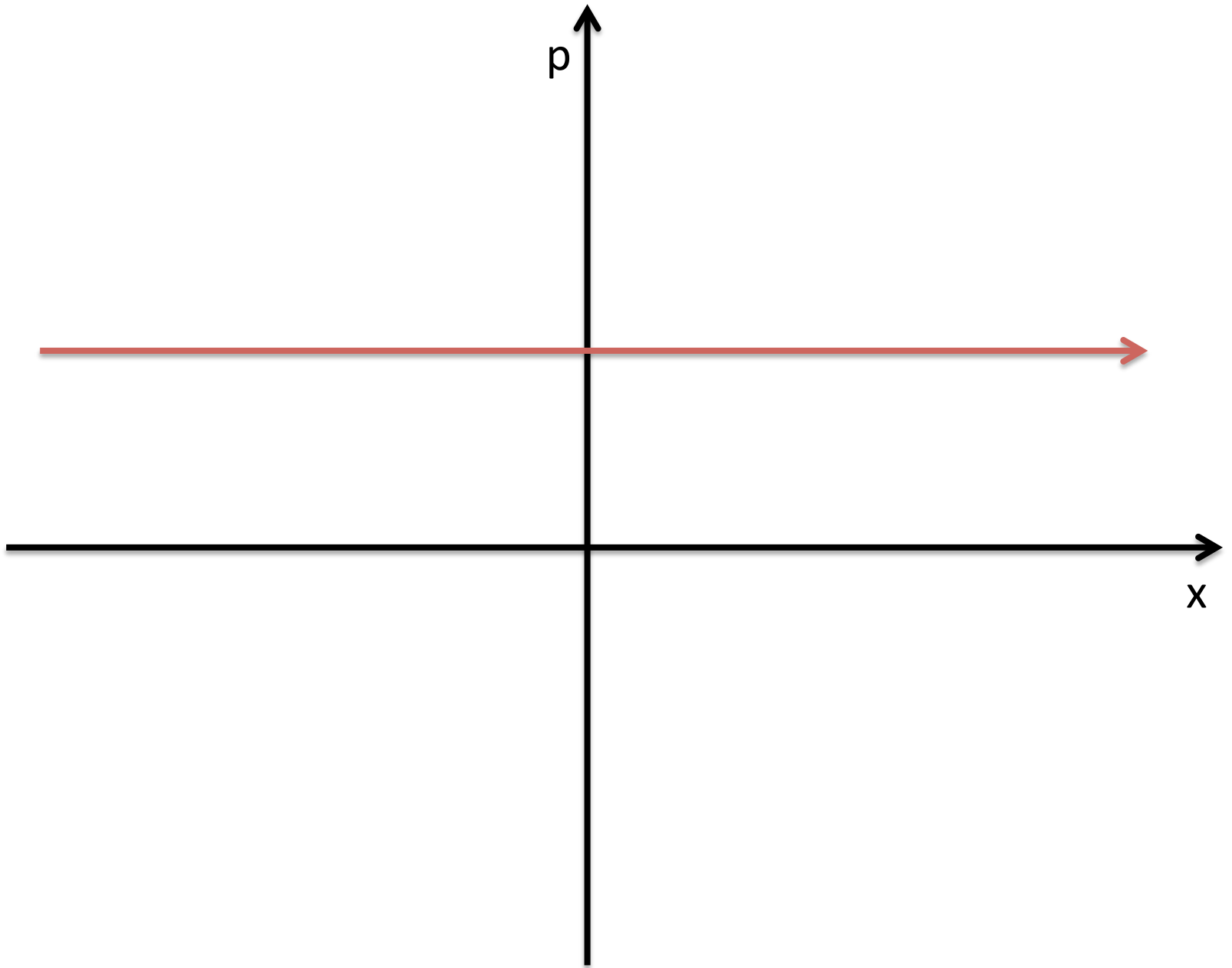




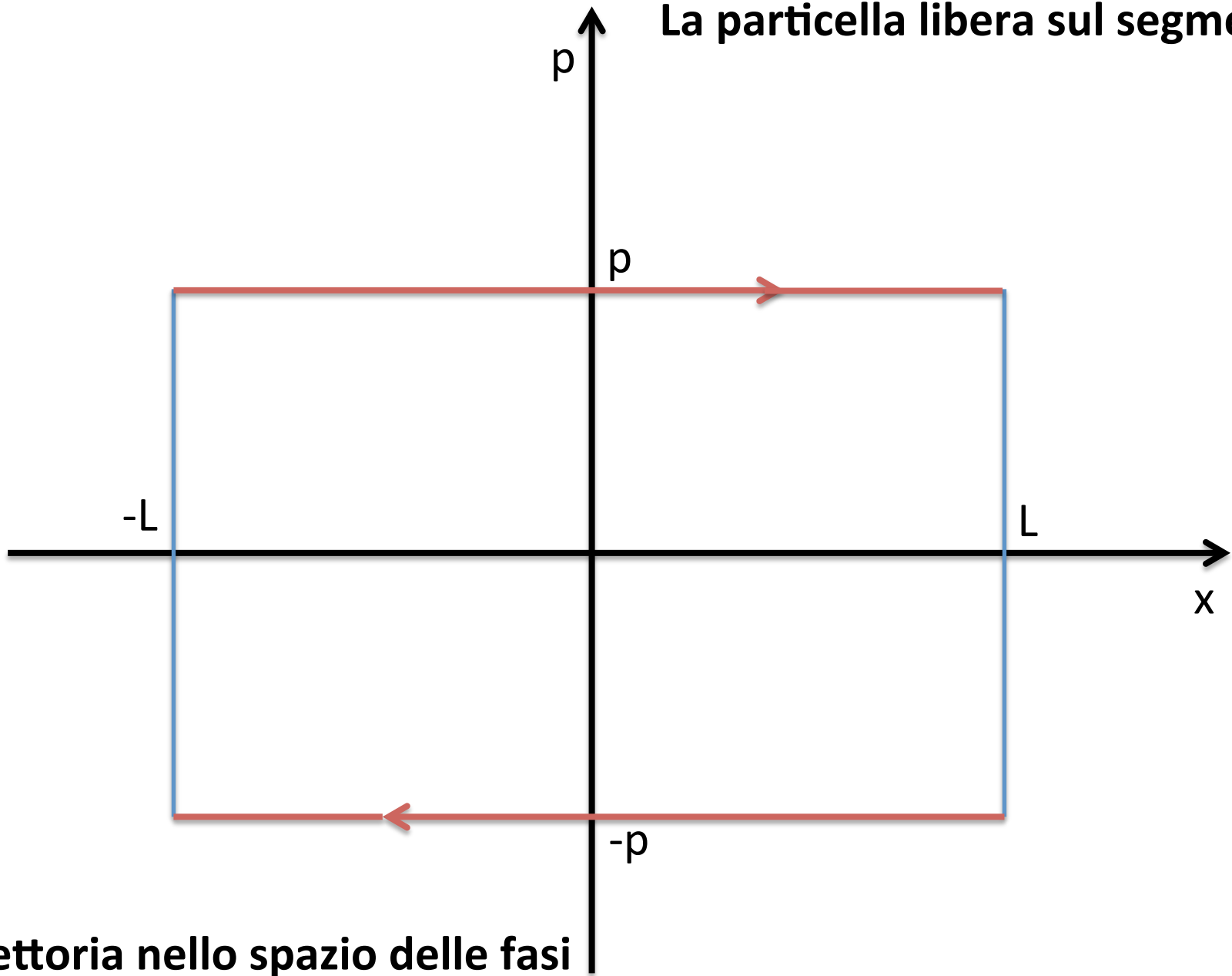
**E perché non rappresentare il moto, anziché in uno spazio  $(x,t)$  o  $(v,t)$ , in uno spazio  $(v,x)$ ? (Oppure  $(p,x)$ , usando la quantità di moto  $p = mv$ )?**

**Spazio delle fasi**





# La particella libera sul segmento



Traiettoria nello spazio delle fasi

**Definiamo una nuova grandezza fisica associata al moto**

**Azione (J) = area della traiettoria nello spazio delle fasi**

**Dimensioni dell'azione:  $M L^2 T^{-1}$**

**Unità di misura:  $Kg m^2 s^{-1}$  , o anche  $js$**

**Per la particella libera vincolata sul segmento  $(-L, +L)$**

**l'azione associata al moto è quindi  $J = 4 p L$**

**o anche, essendo  $E = \frac{1}{2} m v^2 = p^2/2m$ , e  $T = 4mL/p$ ,  $J = 2 E T$**

**E l'oscillatore armonico?**

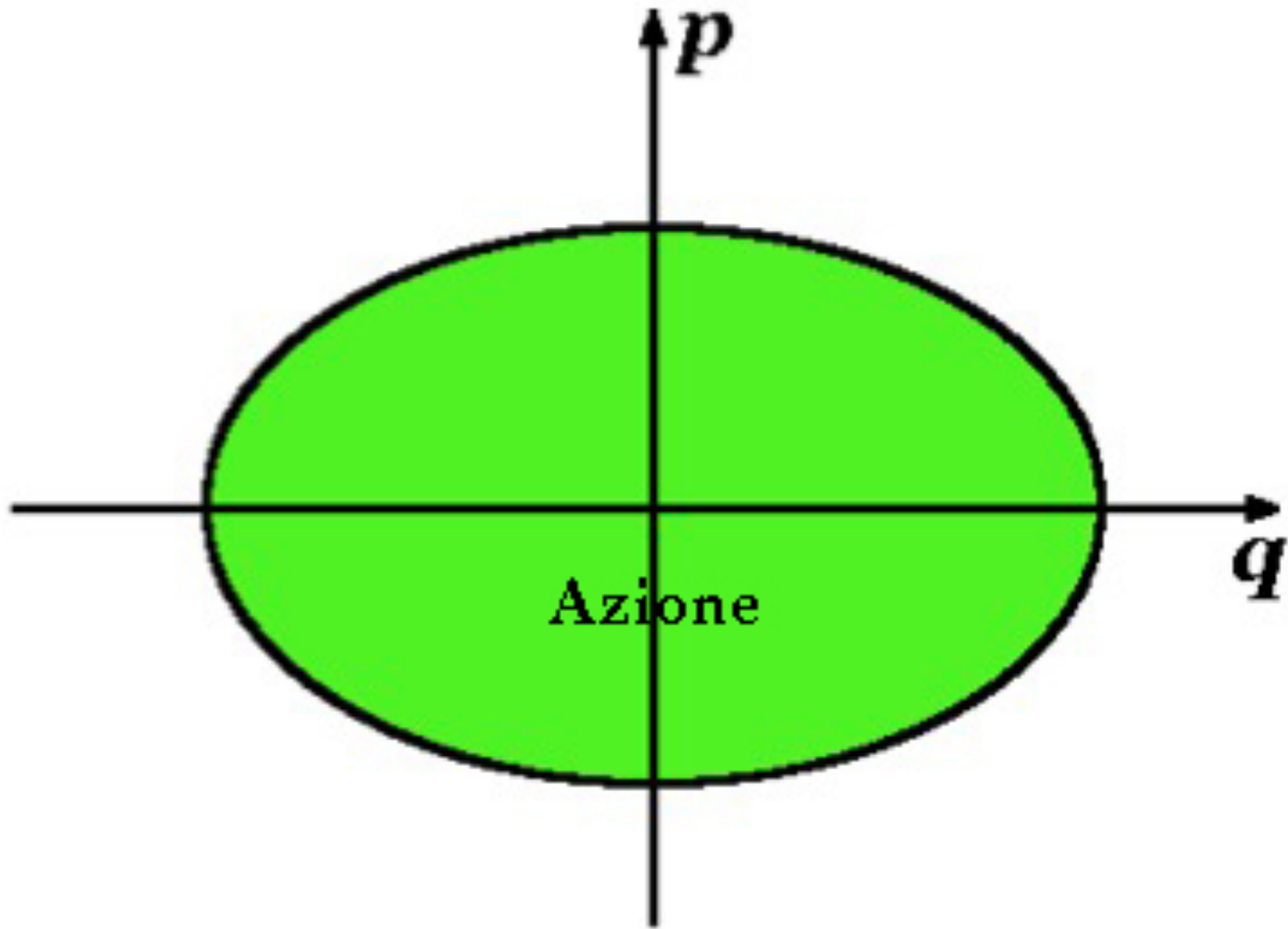
**Conservazione dell'energia**

$$E = p^2/2m + \frac{1}{2} k x^2$$

$$p^2/2mE + x^2/(2E/k) = 1$$

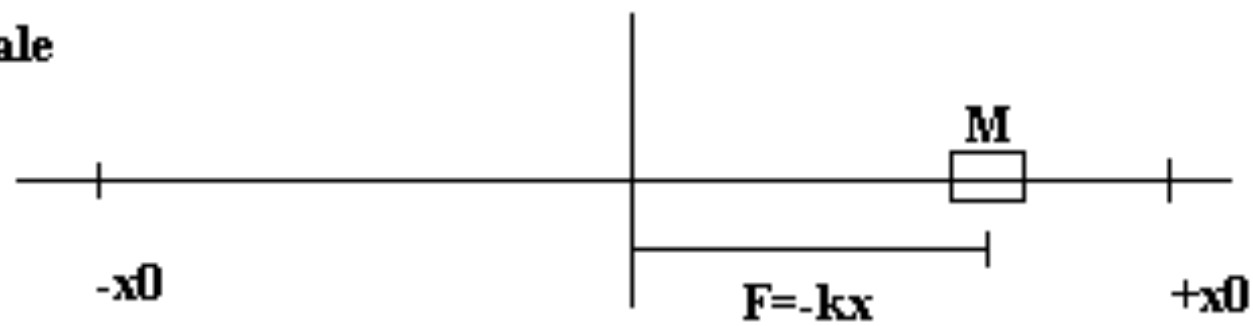
**La traiettoria dell'oscillatore armonico nello spazio delle fasi è un'ellisse di semiassi  $(2mE)^{1/2}$ ,  $(2E/k)^{1/2}$**



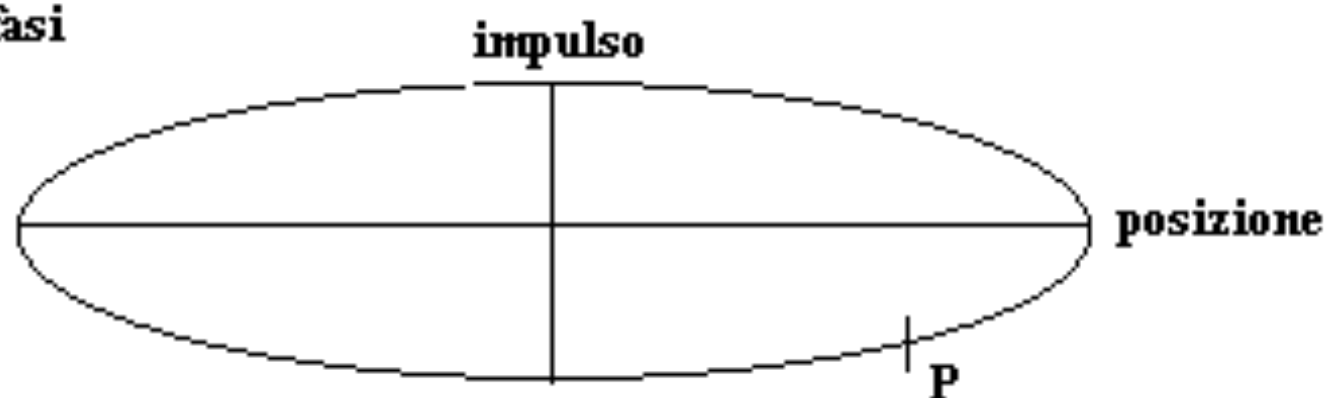


$$J = \pi (2mE)^{1/2} (2E/k)^{1/2} = 2 \pi E (m/k)^{1/2} = 2\pi E/\omega = E/\nu = E T$$

**Spazio reale**



**Spazio delle fasi**



**In meccanica classica,  $p$  e  $v$  possono variare con continuità, e questo vale quindi anche per la grandezza azione.**

**Con l'introduzione della costante di Planck, questa proprietà non è più soddisfatta.**

**Esiste un quanto elementare di azione,  $h = 6,64 \cdot 10^{-34} \text{ j s}$**

**L'azione è una grandezza quantizzata (“granulare”)**

**(n.b.: come peraltro la carica elettrica: chissà perché non si usa, in quel caso, la parola misteriosa “quantizzazione”)**

**La regola fondamentale diventa  $J = nh$ , con  $n$  intero**

**Quando si fanno sentire gli effetti della quantizzazione dell'azione?**

**$J = nh$ : quando è  $n \gg 1$ , la struttura “granulare” non si rivela e sfuma nel continuo della meccanica classica**

**Gli effetti derivanti dalla quantizzazione diventano rilevanti (cioè non trattabili nell'approssimazione classica) quando si ha a che fare con sistemi per cui il valore dell'azione associata al moto è dell'ordine di grandezza di (o non molto superiore a)  $h$**

**Per stimare l'ordine di grandezza dell'azione:**

**azione  $\approx$  massa x velocità caratteristica x lunghezza traiettoria**

## Qualche esempio istruttivo

Terra intorno al Sole:  $J \approx 10^{24} \text{ kg } 10^{11} \text{ m } 10^4 \text{ m/s} \approx 10^{39} \text{ j s} \gggg \text{ h} !$

Pallina da ping-pong:  $J \approx 10^{-2} \text{ kg } 1 \text{ m } 10 \text{ m/s} \approx 10^{-1} \text{ j s} \gg \text{ h}$

Molecola di gas a 300 K:  $J \approx 10^{-26} \text{ kg } 10^{-8} \text{ m } 10^2 \text{ m/s} \approx 10^{-32} \text{ j s} > \text{ h}$   
(siamo al limite di ciò che si può ancora trattare classicamente: basta abbassare un po' la velocità – cioè la temperatura – o il cammino libero medio – cioè la densità – e compaiono gli effetti quantistici (calori specifici etc...))

Elettrone intorno al nucleo:  $J \approx 10^{-30} \text{ kg } 10^{-10} \text{ m } 10^6 \text{ m/s} \approx 10^{-34} \text{ j s} \approx \text{ h} !$

→ Gli effetti della quantizzazione diventano non trascurabili alla scala atomico-molecolare

## Particella libera sul segmento

$$J = 4 p L = n h \rightarrow p_n = n h / 4 L$$

$$\rightarrow E_n = p_n^2 / 2m = n^2 h^2 / 32mL^2$$

## Oscillatore armonico

$$J = E T = n h \rightarrow E_n = n h / T = n h \nu$$

# Atomo di Bohr

Orbita circolare: moto in due dimensioni, combinazione di due oscillazioni armoniche ortogonali

$$\text{Azione } J = 2 E T = 2 \frac{1}{2} m v^2 \frac{2\pi r}{v} = 2 \pi m r v$$

$$C/r^2 = m v^2 / r \quad (C = e^2 / 4\pi\epsilon_0) \quad \rightarrow \quad v^2 = C / m r$$

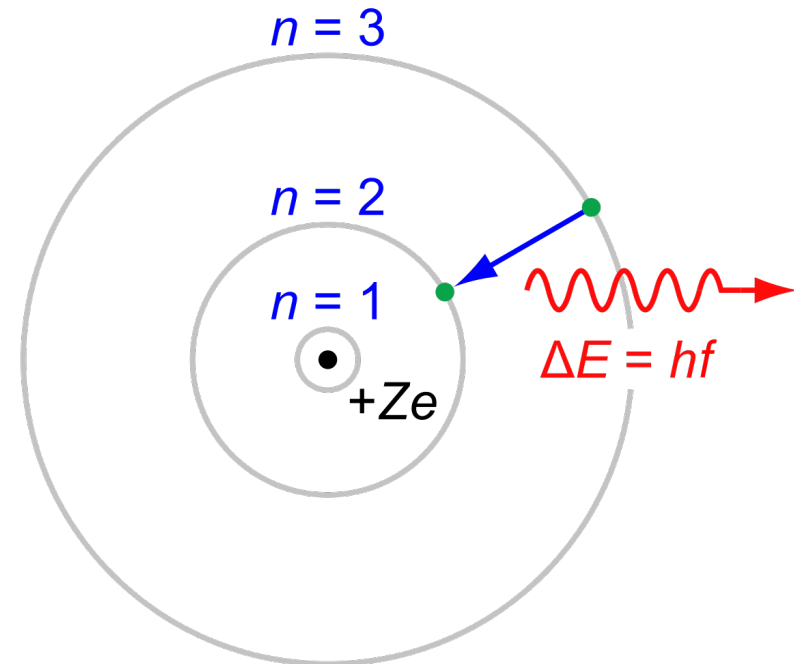
$$E = - C / r + \frac{1}{2} m v^2 = - C / 2r$$

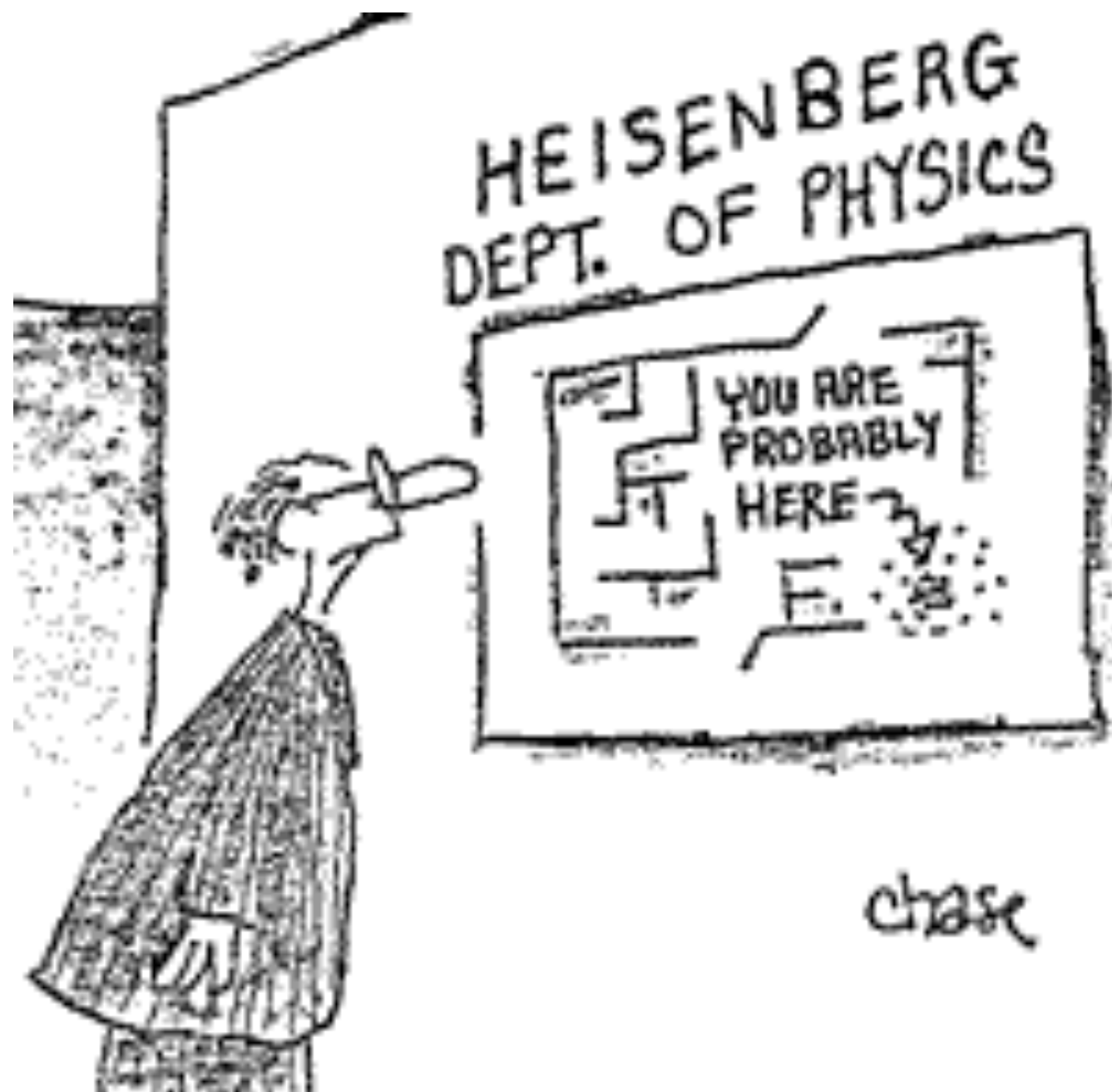
$$J = 2 \pi m r v = n h$$

$$J^2 = 4\pi^2 m^2 r^2 v^2 = 4\pi^2 C m r = n^2 h^2$$

$$\rightarrow r_n = n^2 h^2 / 4\pi^2 C m$$

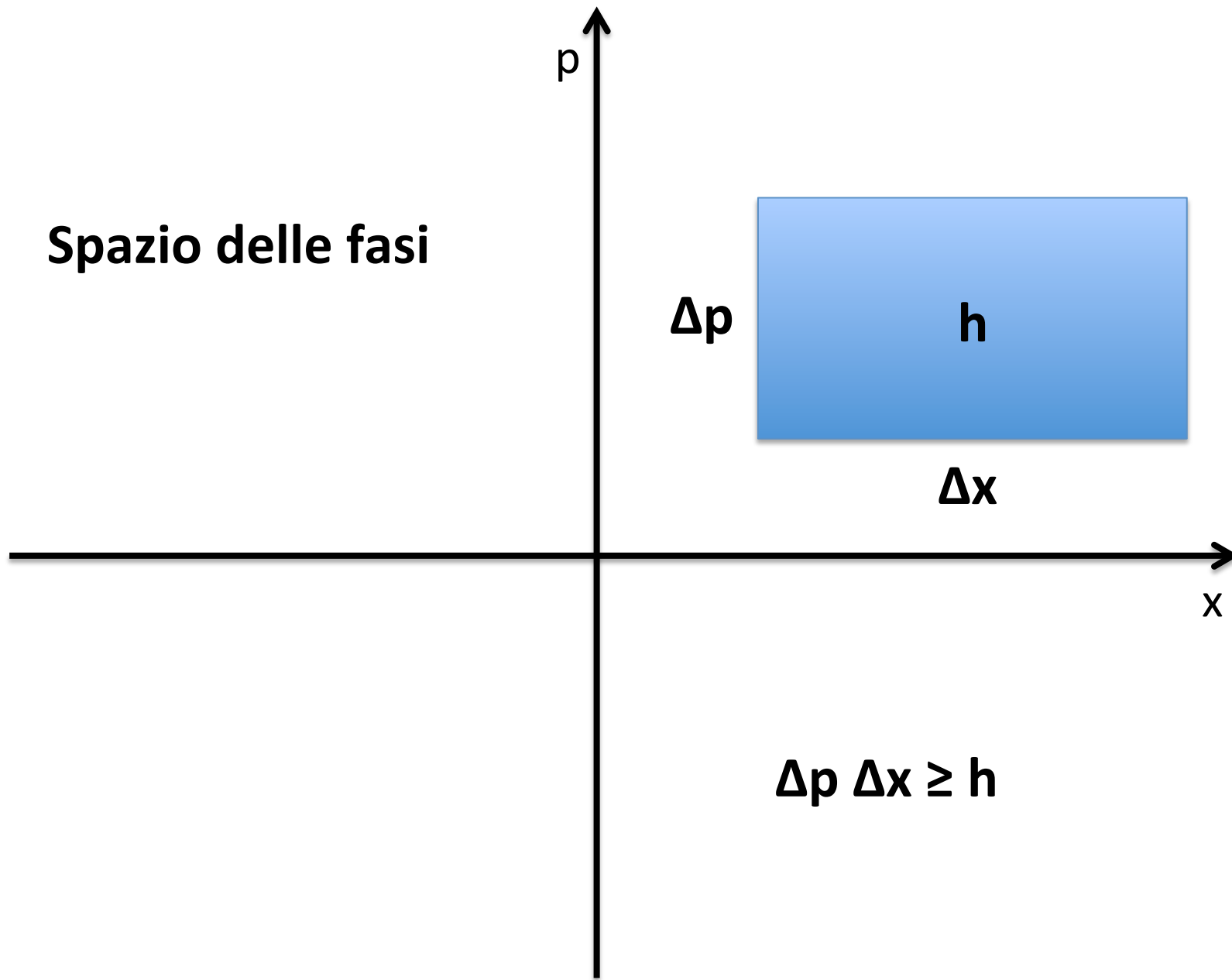
$$E_n = - C / 2r_n = - 1/n^2 \cdot 4\pi^2 C^2 m / 2h^2$$





chase





**E la luce?**

**Einstein quanti di luce: “particelle” di energia  $E = h\nu$**

**Relazione di de Broglie:  $p = h/\lambda$**

**Proprietà corpuscolari (la quantità di moto) e proprietà ondulatorie (la lunghezza d'onda) sono correlate tramite la costante di Planck**

**“Particelle” di luce (fotoni)**

**Per il fotone si ha  $E = h\nu = p\lambda\nu = pc$**

**e dunque  $m = 0$  (da  $E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$ )**

**Onda monocromatica: lunghezza d'onda esattamente definita**  
**“Dove” sta l'onda? .... ma dappertutto, spalmata uniformemente**  
**lungo l'asse x: un'onda monocromatica è un'entità completamente**  
**delocalizzata**

**Conoscenza esatta di  $\lambda$  → Incertezza totale su x**

**Più in generale, però, una forma d'onda risulta dalla**  
**sovrapposizione di più onde monocromatiche. Più componenti si**  
**aggiungono, più si perde informazione sulla “vera” lunghezza**  
**d'onda e più è possibile “localizzare” l'onda, fino a trasformarla in**  
**un pacchetto d'onda sensibilmente diverso da zero in una regione**  
**limitata di spazio**

**Sovrapposizione di più onde monocromatiche → perdita di**  
**definizione su  $\lambda$  → riduzione dell'incertezza su x**

**E' una sorta di principio di indeterminazione (classico) per le onde**

$$\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta = 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

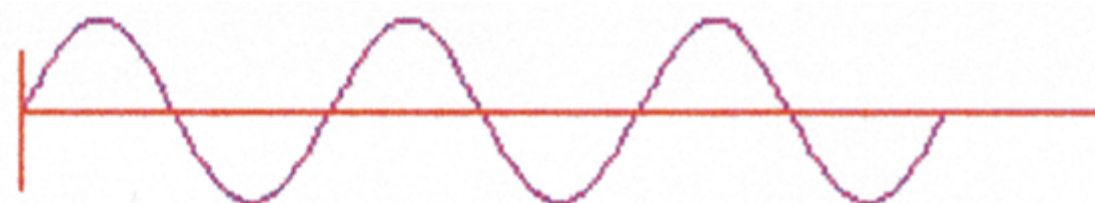
$$\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \beta = 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2},$$

$$\operatorname{cos} \alpha + \operatorname{cos} \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\operatorname{cos} \alpha - \operatorname{cos} \beta = -2 \operatorname{sen} \frac{\alpha + \beta}{2} \operatorname{sen} \frac{\alpha - \beta}{2},$$

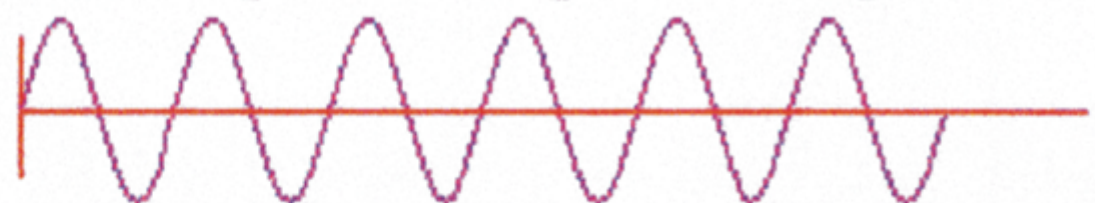
$$\operatorname{tga} \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{sen} (\alpha \pm \beta)}{\operatorname{cos} \alpha \operatorname{cos} \beta},$$

$$\operatorname{cotg} \alpha \pm \operatorname{cotg} \beta = \frac{\operatorname{sen} (\beta \pm \alpha)}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}$$



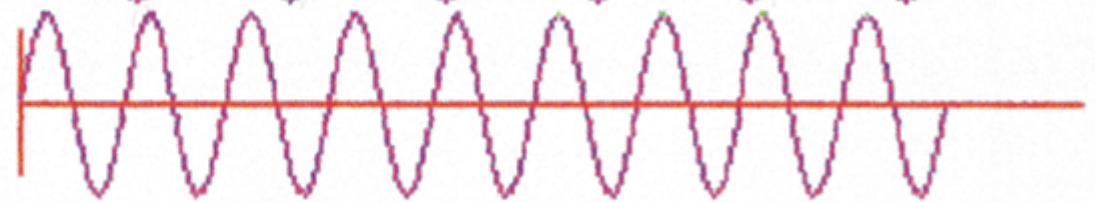
$$p_1 = p_{\max} \sin(at)$$

+



$$p_2 = p_{\max} \sin(2at)$$

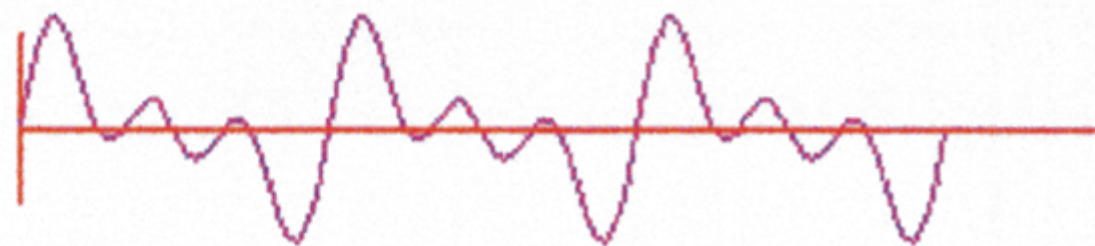
+



$$p_3 = p_{\max} \sin(3at)$$

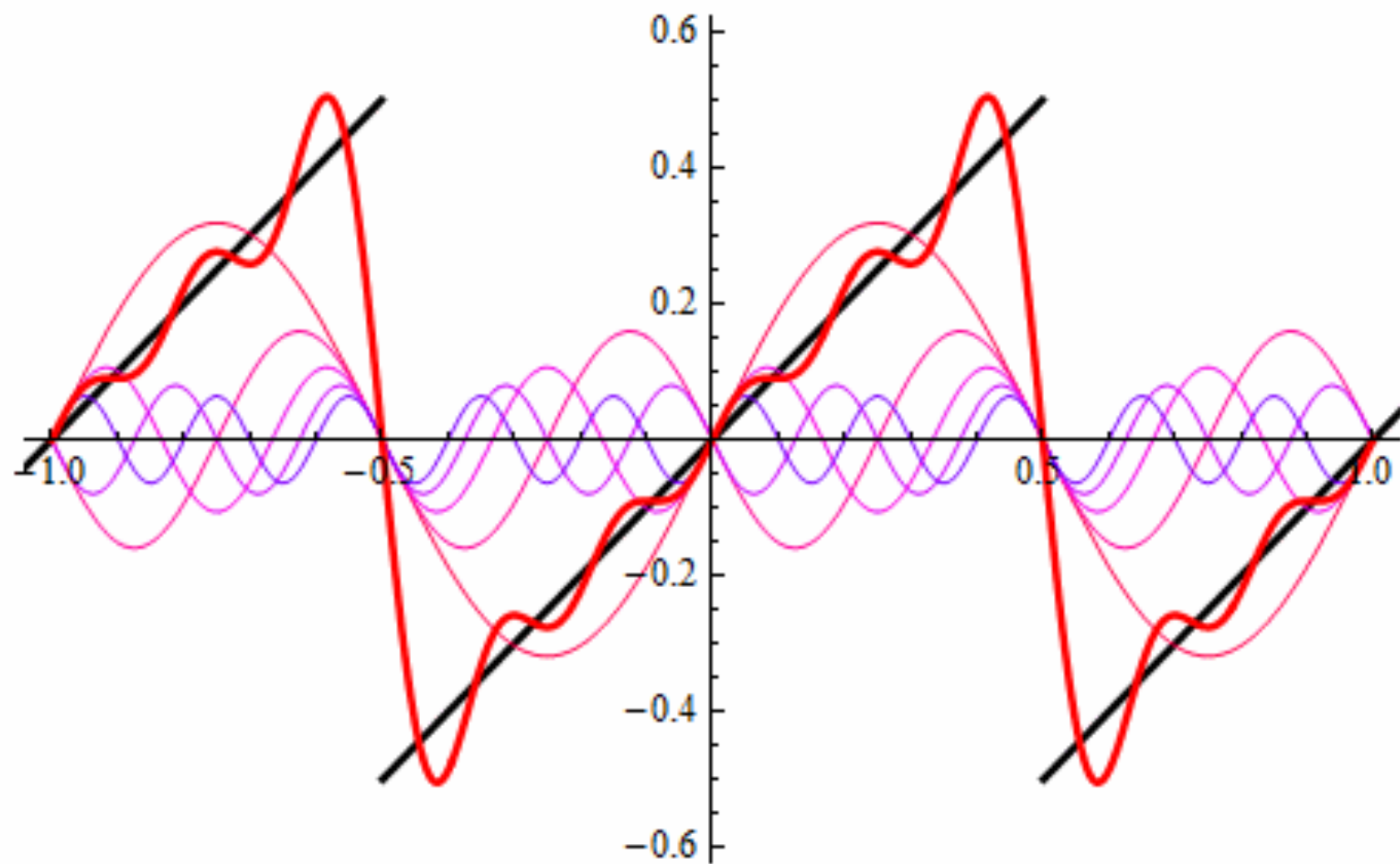
---

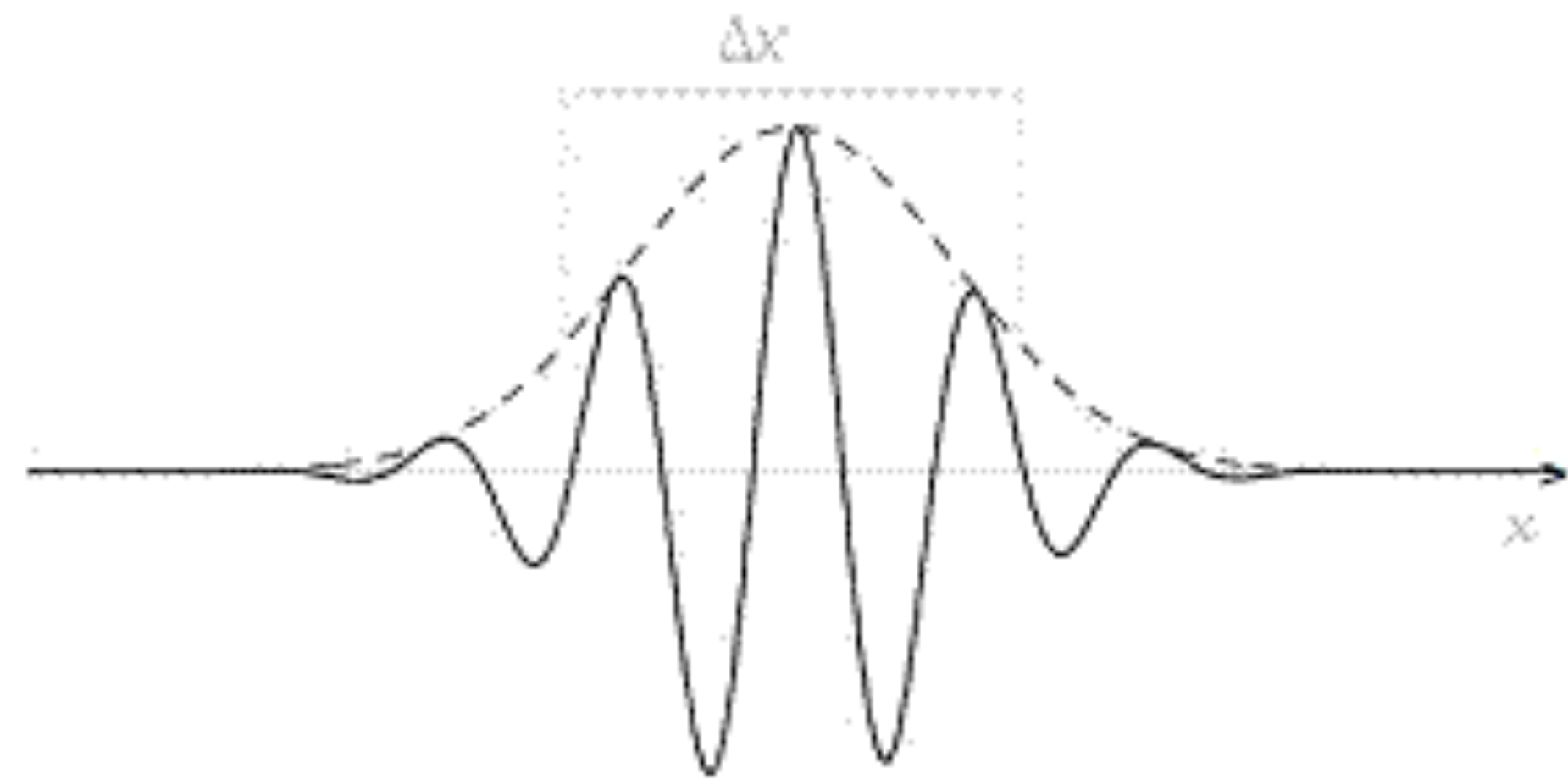
=

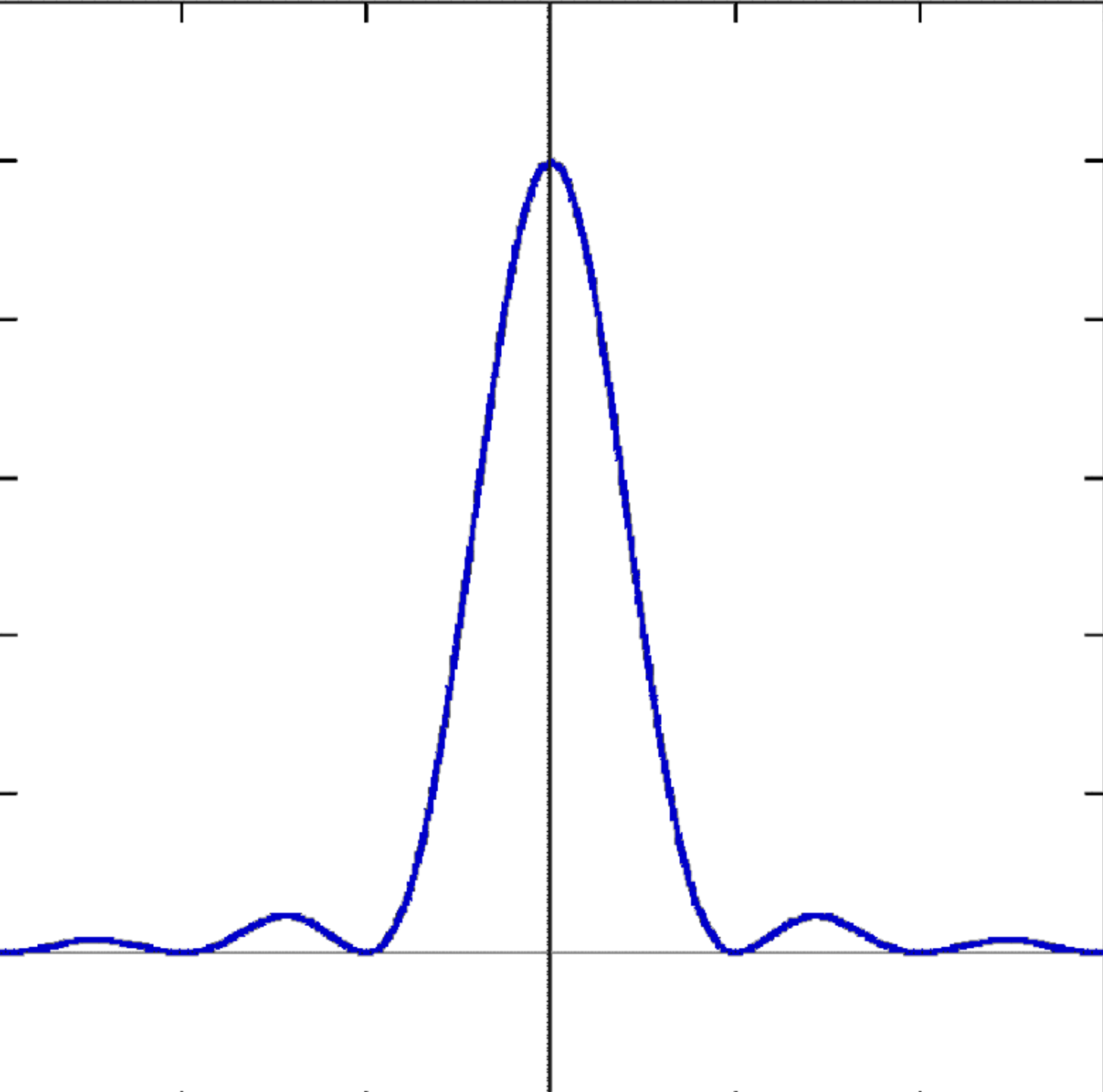


$$p(t) = p_1 + p_2 + p_3$$

## Somma di armoniche









**Leggiamo le stesse proprietà con de Broglie:  $p = h/\lambda$**

**La funzione d'onda monocromatica descrive un oggetto quantistico con impulso esattamente definito (i fotoni hanno tutti impulso pari ad  $h/\lambda = hv/c$ ) “Dove” sta l'onda? ... ma dappertutto, spalmata uniformemente lungo l'asse  $x$**

**Conoscenza esatta di  $p \rightarrow$  Incertezza totale su  $x$**

**Più in generale, però, la funzione d'onda è data dalla sovrapposizione di più componenti monocromatiche. Più componenti si aggiungono, più si perde informazione sul valore “esatto” dell'impulso e più è possibile “localizzare” l'onda, fino a trasformarla in un pacchetto d'onda sensibilmente diverso da zero in una regione limitata di spazio**

**Sovrapposizione di più onde monocromatiche  $\rightarrow$  perdita di definizione su  $p \rightarrow$  riduzione dell'incertezza su  $x$**

**“corpuscoli” materiali e “corpuscoli” di luce:**

**“onde” o “particelle”?**

**oppure: “onde” e “particelle” (a volte le une, a volte le altre)?**

**o meglio: né “onde” né “particelle”, ma qualcosa di intrinsecamente altro?**

**Narrano le Storie che in un lontano Reame, in tempi di cui si è persa Memoria, fossero note agli Uomini solo due specie di Creature, i Topi e gli Uccelli. Queste Creature possedevano assai differenti Proprietà: i Topi, capaci di muoversi esclusivamente sul suolo, venivano al mondo sviluppandosi nel grembo materno; gli Uccelli invece deponevano le uova da cui poi nascevano i loro piccoli, ed era loro prerogativa la possibilità del Volo.**

**Ad un certo stadio del loro sviluppo, gli Uomini, vinta la naturale paura delle Tenebre, cominciarono ad esplorare il mondo incognito delle Caverne. Ivi, alcuni dichiararono stupefatti di avere incontrato Topi che si libravano in volo; altri, non meno perplessi, sostennero di essersi imbattuti in Uccelli che partorivano la prole dal grembo materno.**

**Grandi furono le dispute che divisero i Saggi nell'accordare tra loro queste osservazioni che parevano violare il naturale ordine delle Regole. A lungo i Filosofi discussero sull'esistenza di un Principio di Complementarità, per rendere conto dell'apparire nelle medesime Creature, ora delle Proprietà dell'Uccello, ora di quelle del Topo; e molte controversie si agitarono tra i Dotti a proposito del problema del Dualismo. Finché qualcuno propose di riconoscere che queste Indeterminazioni non erano che l'indicazione dell'esistenza di una Realtà più complessa di quella fino allora nota alla Conoscenza.**

**Oggi è comunemente riconosciuta in quel Reame l'esistenza dei Pipistrelli, e si è persa memoria delle antiche dispute sul Dualismo e sulla Complementarità, relegate nella polvere delle Superstizioni e degli Inganni.**