Laboratorio Probabilità

Enrico Rogora

Sapienza, Università di Roma

28 Agosto 2017 - Bardonecchia

La probabilità fornisce una guida razionale per valutare situazioni di incertezza, non dovute necessariamente a fenomeni intrinsecamente non deterministici, ma in generale alla nostra conoscenza incompleta del fenomeno.

Borel in [2]

«Si può scommettere, a testa o croce, mentre la moneta, già lanciata, è in aria, e il suo movimento è perfettamente determinato, e si può anche scommettere dopo che è caduta, sotto la sola condizione di non vedere su quale faccia riposi.»

Ritengo che questa delimitazione degli scopi del calcolo delle probabilità possa semplificarne lo studio, separandolo, almeno inizialmente, dalla comprensione della casualità, che essendo un concetto difficile e multiforme è bene separare da quello relativo all'incertezza .

Teorema di Bayes - trait d'union tra probabilità ed esperienza

La probabilità condizionata e il teorema di Bayes sono snodi fondamentali del pensiero probabilistico:

$$\frac{P(E'|E)}{P(E|E')} = \frac{P(E')}{P(E)}$$

Esprimiamo a parole il contenuto della formula.
Il rapporto tra la probabilità di E' condizionata ad E e la probabilità di E condizionata ad E' è uguale al rapporto tra la probabilità di E' e la probabilità di E.

Indicazione didattica

Importanza di guardare una formula da diversi punti di vista: risolverla rispetto a uno o all'altra delle variabili; esprimerla in funzione di nuove variabili che sono funzioni delle precedenti; studiare graficamente la dipendenza funzionale tra due variabili, fissando le altre come parametri; descriverla a parole cercando di esprimere il significato operativo e intuitivo o analogico della formula; considerarne delle applicazioni concrete; cercare il legame con altre parti della matematica. La formua di Bayes si presta molto bene a sperimentare questo approccio multiforme.

Come l'esperienza può influire sulla valutazione della probabilità di dati eventi

Usando la formula di Bayes si può rendere esplicito il modo in cui l'esperienza modifica i nostri giudizi soggettivi sulla probabilità da assegnare a certi eventi e in particolare il legame tra probabilità e frequenze.
Questo problema è un caso particolare del problema, posto dal filosofo inglese David Hume (1711-1776), di esaminare i fondamenti del ragionamento induttivo, che è alla base delle scienze sperimentali.
Il caso particolare che ci interessa direttamente riguarda le applicazioni a carattere statistico del calcolo delle probabilità, come utilizzare, in alcuni casi, le frequenze empiriche per modificare un'assegnazione di probabilità. Questo è una delle situazioni a cui si riferiscono le seguenti parole di de Finetti.

Saper vedere in matematica, [3] I

Vi sono molte occasioni in cui molti ragionano male perché non conoscono i concetti probabilistici e statistici. Ma spesso accade anche che, in queste stesse occasioni, molti altri ragionino male perché hanno appreso dei concetti probabilistici e statistici comprendendoli male o comunque fraintendendoli quanto basta per applicarli male.
In questa tendenza ad errare ad ogni costo si può certamente ravvisare (come ha notato acutamente uno psicologo, John Cohen) un effetto dell'avversione all'incertezza: o uno non applica i concetti che esprimono l'incertezza (probabilità statistica), oppure li applica forzandone l'interpretazione in modo da trasformare previsioni incerte in predizioni certe o da ricavarne grazie ai più strani fraintendimenti conclusioni gratuite o distorte.

Saper vedere in matematica, [3] II

Converrà qui abbondare in esemplificazioni ridotte a brevi cenni: non sarebbe agevole svilupparle, e si può farne a meno limitandosi ad esporle a titolo di monito, di memento, sperabilmente di stimolo a studiare tali argomenti a tempo debito riflettendovi con particolare attenzione. Non si deve ignorare che in un gran numero di prove (in giochi, estrazioni, scommesse, assicurazioni, ecc.) é probabile una "compensazione", un apparire di "regolarità statistiche" grazie alla "legge dei grandi numeri", non si deve ritenere però (come spesso si conclude da interpretazioni troppo letterali e apodittiche di siffatta tendenza alla "compensazione"):

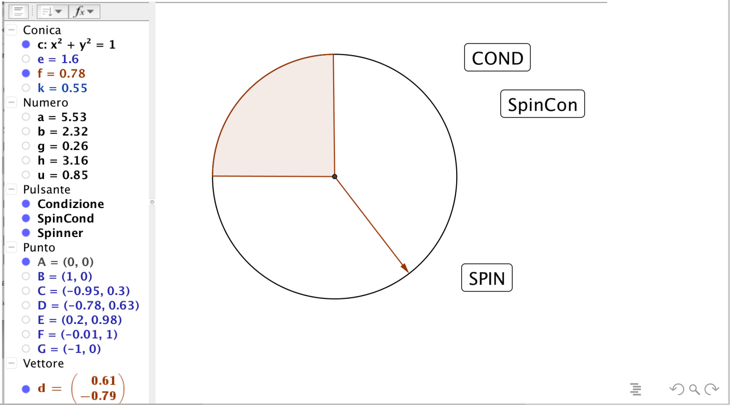
- *che se si sono verificati scarti in un senso (p. es. uno è stato sfortunato al gioco) sia da attendersi uno scarto in senso opposto per dar luogo alla "compensazione";*

Saper vedere in matematica, [3] III

- *che se qualcosa è eccezionalmente improbabile (come un lungo ritardo di un numero al lotto) sia da attendersi qualcosa che l'impedisca (p. es. che un numero arretrato si affretti ad uscire).*

Materiali

Spinner (ruota della fortuna) con diversi settori colorati che possono essere aggiunti o rimossi, oppure file geogebra `Spinner1.ggb`. Descriviamo l'esperienza con riferimento a quest'ultimo.



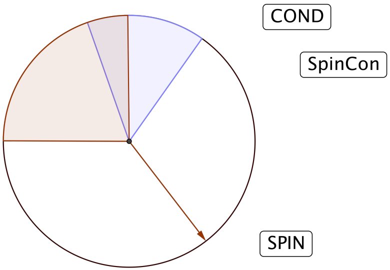
Funzionamento e uso dell'artefatto: Step 1

Premendo il pulsante SPIN la posizione della freccia u viene modificata in maniera casuale, senza privilegiare alcuna parte del cerchio.
Spostando i punti F e G è possibile modificare la posizione e l'ampiezza del settore circolare marrone f.
Si considera la possibilità della seguente scommessa: si vince se, premendo il tasto SPIN si va a finire nel settore marrone, si perde altrimenti. Si discute probabilità che premendo il tasto, la freccia vada a finire nel settore marrone. L'insegnante guida la classe a formulare l'ipotesi che tale probabilità si possa esprimere come rapporto tra l'area del settore f (in marrone) e l'area del cerchio c, in formule, se F indica l'evento "premendo il tasto SPIN, la freccia cade nel settore f",

$$p(F) = \frac{Area(f)}{Area(c)}$$

Funzionamento e uso dell'artefatto Step 2

Successivamente, si attiva il settore e, selezionando il corrispondente pulsante nella colonna a sinistra, e lo si posiziona, premendo il tasto `COND`, eventualmente più volte, fino ad ottenere un settore che ha intersezione non vuota sia con l'originale settore f che con il suo complementare, come in figura



Funzionamento e uso dell'artefatto Step 3

Si considera la possibilità della seguente versione modificata della scommessa precedente:
Se, dopo aver premuto il tasto `SPIN` la freccia finisce fuori dal settore blu, allora la scommessa si lascia impregiudicata, cioè ciascuno scommettitore ripiglia le proprie quote; se invece la freccia finisce dentro il settore blu e anche nel settore marrone, allora si vince; se infine la freccia finisce dentro il settore blu ma fuori dal settore marrone, allora si perde.
L'insegnante guida la classe a formulare l'ipotesi che la probabilità di vincita si possa esprimere come rapporto tra l'area dell'intersezione dei settori f e e e l'area del settore e, perché tutto quello che sta fuori da questo settore non interessa. In formule:

$$p = \frac{Area(f \cap e)}{Area(e)}.$$

Si osserva che questa è una scommessa di carattere diverso dalla precedente perché è condizionata al verificarsi di un nuovo evento ed è quindi naturale introdurre per la rispettiva probabilità un nuovo simbolo, $P(F|E)$ che si legge, probabilità di F condizionata a E.

Funzionamento e uso dell'artefatto Step 4

Si osserva che la probabilità condizionata è a tutti gli effetti una probabilità, che riguarda però un nuovo gioco, quello che, usando l'artefatto si ottiene premendo il pulsante `SpinCond` che è però a tutti gli effetti equivalente al "gioco condizionato" di prima.
Si può infine esplorare l'effetto del condizionamento, cioè della posizione relativa del settore condizionante e rispetto al settore iniziale f. Si possono fare per esempio le seguenti richieste:
È possibile scegliere un fattore condizionante che aumenta/diminuisce/lascia invariata la probabilità dell'evento iniziale? Si può caratterizzare geometricamente quando ciò accade?

Osservazioni sulla probabilità condizionata

Come già detto, per valutare l'effetto delle frequenze sperimentali sulle valutazioni di probabilità, useremo la nozione di probabilità condizionata, che abbiamo motivato con l'esperienza precedente e che ora riformuliamo.

> ***Sia** $p = P(F)$ **la probabilità** p **che un individuo attribuisce attualmente (e cioè in base alla conoscenza dei presupposti** H **che costituiscono il suo attuale stato d'informazione) all'evento** F**; dopo aver appreso che un certo evento** E **si è verificato, egli dovrà attribuire ad** F **(se rimarrà coerente con le attuali valutazioni di probabilità) una probabilità** $\overline{p} = P(F \cap E)/P(E)$.*
>
> *$\overline{p}$ si dice la probabilità condizionata di F dato E e si indica $P(F|E)$. Gli eventi F ed E si diranno:*

Indipendenti, se $p(F|E) = \overline{p} = p$, ovvero se $P(F \cap E) = P(F) \cdot P(E)$
Correlati negativamente, se $p(F|E) = \overline{p} < p$, ovvero se $P(F \cap E) < P(F) \cdot P(E)$
Correlati positivamente, se $p(F|E) = \overline{p} > p$, se $P(F \cap E) > P(F) \cdot P(E)$

Uno sguardo ulteriore alla probabilità condizionata

La formula che esprime la probabilità condizionata in funzione della probabilità a priori ha un contenuto familiare? Formalizza un modo di pensare naturale rispetto al giudizio su un evento incerto? È importante didatticamente legare la formula alle nostre intuizioni. Cerchiamo di esprimere a parole come si modificano le nostre valutazioni di un evento quando si acquisiscono nuovi *indizi* in due esempi concreti, tratti da [1]. Solleciteremo i ragazzi a proporne degli altri.

La probabilità che un individuo sospettato abbia commesso la colpa ascrittagli diverrà, dopo la scoperta di un certo indizio, di tanto maggiore, quanto maggiore è la probabilità di tale circostanza supposto che l'individuo sia colpevole in confronto della probabilità non subordinata a tale ipotesi.

La probabilità che l'avversario con cui giochiamo sia un baro, diviene, se egli vince, di tanto più grande quanto maggiore è la probabilità che avremmo attribuito alla sua vincita sapendo che è un baro in confronto della probabilità non subordinata a tale ipotesi.

Il teorema di Bayes

Il teorema di Bayes lega la probabilità condizionata $P(F|E)$ alla probabilità condizionata $P(E|F)$. Infatti, ricavando la probabilità dell'intersezione dalla definizione della prima, abbiamo

$$P(F \cap E) = P(F|E) \cdot P(E).$$

Analogamente, ricavando la probabilità dell'intersezione dalla definizione della seconda, abbiamo

$$P(E \cap F) = P(E|F) \cdot P(F).$$

Ma essendo $E \cap F = F \cap E$, segue

$$P(F|E) \cdot P(E) = P(E|F) \cdot P(F).$$

che è il Teorema di Bayes, o Formula di Bayes.

Corollario del Teorema di Bayes

Sia $E_1, \ldots, E_n$ una partizione dell'evento certo. Allora, per ogni h

$$P(E_h|A) = \frac{P(E_h)P(A|E_h)}{P(E_1)P(A|E_1) + \cdots + P(E_n)P(A|E_n)}$$

Caso importante (partizione in due eventi)

$$P(E|A) = \frac{P(E)P(A|E)}{P(A)} = \frac{P(E)P(A|E)}{P(E)P(A|E) + P(E^c)P(A|E^c)} =$$

$$\frac{P(E)}{P(E) + (1 - P(E))\frac{P(A|E^c)}{P(A|E)}} = \frac{P(E)}{P(E) + \frac{(1-P(E))}{R}}$$

Ove si indichi con R il rapporto $R = \frac{P(A|E)}{P(A|E^c)}$.

Analisi grafica del teorema di Bayes

Riscriviamo la formula di Beyes che abbiamo ottenuto nella slide precedente nella forma

$$y = \frac{x}{x + \frac{(1-x)}{R}}$$

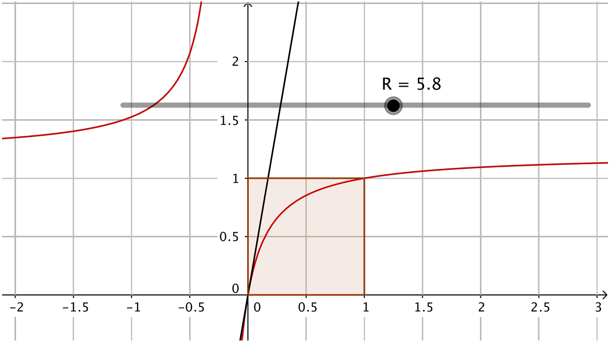
dove, $x = P(E)$, $y = P(E|A)$, $R = \frac{P(A|E)}{P(A|E^c)}$.
L'equazione si può interpretare come l'equazione di una famiglia di curve $y = f(x, R)$, dipendenti dal parametro R. Fissato R possiamo pensare alla formula di Beyes come un trasformatore che modifica la valutazione x della probabilità di un evento (E) nella valutazione y della probabilità dello stesso evento, condizionato all'evento A, ovvero, dopo che alle informazioni sulla base delle quali abbiamo valutato la probabilità x di E, si è aggiunta l'informazione relativa al realizzarsi di A, nella forma specificata dal valore della costante R.
Nella prossima slide poniamo alcuni esercizi rispetto al funzionamento di questo trasformatore.

Esercizi sull'analisi grafica del teorema di Bayes

- Al variare di R la curva descritta dalla famiglia considerata nella slide precedente a quale famiglia notevole appartiene?
- Per quali valori di R $y > x$.
- Qual è il significato geometrico del parametro R?

Per affrontare questi esercizi può essere utile utilizzare il file `Figura17.ggb` che mostra l'andamento del grafico della funzione al variare del parametro R. Si osservi che: R è definito per ogni valore positivo (anche se lo slider permette di modificarlo nel solo intervallo $[0, 10]$). Il grafico della curva rappresenta la trasformazione dovuta al teorema di Bayes solo nel quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$; nella figura costruita con GeoGebra è rappresentata la curva di equazione $y = x$ per suggerire la soluzione dell'esercizio 2; nella figura costruita con GeoGebra è rappresentata la tangente alla curva nell'origine per suggerire la soluzione dell'esercizio 3.

Famiglia di curve ad un parametro (parametro R)



Esercizi sull'analisi grafica (cont)

Possiamo studiare anche la famiglia di curve che si ottiene fissando come parametro $P(E)$ e facendo variare R. Questo ci permette uno sguardo diverso sul processo di aggiornamento di una probabilità in funzione delle nuove informazioni disponibili. Riscriviamo l'espressione nella forma

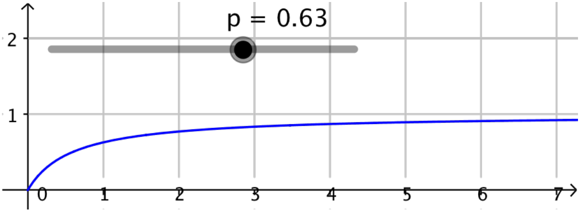
$$y = \frac{p}{p + \frac{(1-p)}{x}}$$

dove, $p = P(E)$, $y = P(E|A)$, $x = \frac{P(A|E)}{P(A|E^c)}$.

- Al variare di p la curva descritta a quale famiglia notevole appartiene?
- Qual è il significato geometrico del parametro p?
- Come devo sceglier R perché p sia maggiore di 0.8?

Per affrontare questi esercizi può essere utile utilizzare il file `Figura16.ggb` che mostra l'andamento del grafico della funzione al variare del parametro p. Si osservi che: p è definito per valori compresi tra 0 e 1. Il grafico della curva rappresenta la trasformazione dovuta al teorema di Bayes solo nella striscia $[0, +\infty] \times [0, 1]$.

Famiglia di curve ad un parametro (p)



Ulteriori osservazioni sull'analisi grafica, cfr. [3] I

È bene analizzare quale sia, in base a tale formula, e come mostrano le rappresentazioni grafiche, l'influenza di ciascuno dei fattori che concorrono a determinare la nostra valutazione della probabilità di E subordinatamente al verificarsi di A. Il fatto che A si verifichi ci fa aumentare o diminuire la fiducia che si verifichi E a seconda che il rapporto R è maggiore o minore di 1*: la conoscenza di una certa nuova circostanza accresce o attenua, ad esempio, i sospetti sulla colpevolezza di un imputato a seconda che la probabilità che al verificarsi di tale circostanza si sarebbe attribuita supponendo l'imputato colpevole è maggiore o minore di quella analoga relativa all'ipotesi della sua innocenza.*
L'aumento o la diminuzione della probabilità dipende dal rapporto R delle due probabilità. Il fatto che la circostanza in

questione apparisse quasi certa nell'ipotesi della colpevolezza non ha gran peso quando anche nell'ipotesi opposta sembra abbastanza facile che la stessa circostanza abbia potuto prodursi. Avvicinandosi ai casi estremi in cui il rapporto R *delle due probabilità divenga nullo o infinito, la probabilità di* E *tende a zero o a uno: basta che la circostanza* A *costituisca un «indizio» sufficientemente forte a favore o a sfavore dell'ipotesi* E*, e questa apparirà quasi certa, risp. quasi impossibile qualunque fosse la probabilità* $P(E)$ *precedentemente prestatale. Bisogna escludere naturalmente i casi* $p = 0$ *o* $p = 1$*: e in ogni caso però, la probabilità* $\overline{p}$ *dipende da* p*, ossia dall'opinione iniziale sulla probabilità di* E*: un indizio, per quanto forte sia la sua influenza a favore o a sfavore di una determinata ipotesi (per quanto enormemente grande o piccolo sia* R*) può non riuscire a convincerci che un'ipotesi sia da*

accettare se essa ci appariva da prima estremamente improbabile o che sia da respingere se ne eravamo quasi certi. Insomma, dicendo (come poco fa) che l'influenza di un indizio è prevalente purché sia sufficientemente forte, bisogna notare che «sufficientemente» va inteso in senso relativo: al crescere di R, $\overline{p}$ *tende ad* 1 *qualunque sia* p *ma non uniformemente.*
Per tutte le considerazioni che seguiranno, tale circostanza è fondamentale e costituirà il motivo comune di tutte le conclusioni relative a valutazioni di probabilità basate sull'esperienza: si potranno avere delle opinioni cui l'esperienza conduce quasi necessariamente, ossia quasi indipendentemente dall'opinione iniziale, ma quel quasi non può mancare né essere eliminato.

Test diagnostici

Un test diagnostico viene praticato per rivelare la presenza di una malattia. Alcuni test sono dicotomici, cioè danno risposta positiva o negativa, come per esempio il test per l'HIV. Altri danno risposte su scale continue (per esempio misurano la concentrazione di una certa sostanza) e possono essere dicotomizzati fissando delle soglie. In generale, ai fini dell'interpretazione del risultato di un test diagnostico bisogna considerare quattro popolazioni:

- Malati, che indicheremo con M^+.
- Sani, che indicheremo M^-.
- Positivi al test, che indicheremo T^+.
- Negativi al test, che indicheremo T^-.

Si introducono le seguenti quantità:

- Specificità del test, $Sp = P(T^-|M^-)$.
- Sensibilità del test, $Se = P(T^+|M^+)$.
- Valore predittivo di un esito positivo $Vp^+ = P(M^+|T^+)$.
- Valore predittivo di un esito negativo $Vp^- = P(M^-|T^-)$.
- Prevalenza della malattia $Pr = P(M^+)$.

Test diagnostici (II)

Le quantità caratteritiche di un test diagnostico sono legate tra loro dal teorema di Bayes. Per esempio, essendo M^- e M^+ una partizione dell'intera popolazione

$$Vp^- = P(M^-|T^-) = \frac{P(T^-|M^-)P(M^-)}{P(T^-|M^-)P(M^-) + P(T^-|M^+)P(M^+)}$$

Osserviamo che $P(T^-|M^+) = 1 - P(T^+|M^+)$ e che $P(M^-) = 1 - P(M^+)$ e quindi

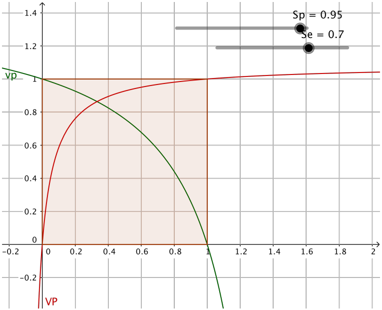
$$Vp^- = \frac{Sp(1 - Pr)}{Sp(1 - Pr) + (1 - Se)Pr}$$

e analogamente

$$Vp^+ = \frac{Se \cdot Pr}{Se \cdot Pr + (1 - Sp)(1 - Pr)}$$

Test diagnostici (III)

A parità di specificità e sensibilità, il valore predittivo di un esito positivo dipende dalla prevalenza della malattia. È massimo per prevalenze molto basse e diventa sempre più basso al crescere della prevalenza. Se, per esempio, la specificità è 0.95 e la sensibilità è 0.7, il valore predittivo di un esito positivo (curva VP) è intorno al 50% quando la prevalenza della malattia è circa del 10%, mentre il valore predittivo di un esito negativo (curva vp) è superiore al 95%.



Il test della cartomante

Supponiamo che il test sia completamente scorrelato dalla malattia, per esempio che sia determinato dal lancio di una moneta truccata con probabilità p che esca testa, ovvero test positivo. Allora

$$Vp^- = P(M^-|T^-) = P(M^-) = 1 - Pr$$

e, analogamente $Vp^+ = P(M^+|T^+) = P(M^+) = Pr$.

$$Sp = P(T^-|M^-) = P(M^-|T^-)P(T^-)/P(M^-) = \\ P(M^-)P(T^-)/P(M^-) = P(T^-) = (1-p)$$

e, analogamente $Se = P(T^+) = p$. Quindi nei test della cartomante, $Vp^- + Vp^+ = 1$ e $Se + Sp = 1$. Si noti che se la prevalenza di una malattia è molto bassa, il test della cartomante ha un valore predittivo di un esito negativo molto alto semplicemente perchè è improbabile che una persona sia malata.

Il test perfetto

Il test perfetto è quello che non commette errori e quindi

$$Se = 1 \qquad Sp = 1$$

e

$$Vp^- = 1 \qquad Vp^+ = 1.$$

Si noti che nel test perfetto, $Vp^- + Vp^+ = 2$ e $Se + Sp = 2$.

Questione didattica

Conviene usare termini specifici per le probabilità che entrano nella trattazione dei test diagnostici?

Significato del parametro R nei test diagnostici

È opportuno analizzare ulteriormente il parametro R nel contesto dei test diagnostici. Osserviamo preliminarmente che, poiché $P(A|E^c)$ è uguale a $1 - P(A^c|E^c)$, abbiamo anche

$$R = \frac{P(A|E)}{1 - P(A^c|E^c)}.$$

Questo ci permette di interpretare R in termini di sensibilità e specificità. Abbiamo da considerare due casi:

- $A = T^+$ e $E = M^+$ e quindi $R = R(T^+, M^+) = \frac{Se}{1-Sp}$.
- $A = T^-$ e $E = M^-$ e quindi $R = R(T^-, M^-) = \frac{Sp}{1-Se}$.

Probabilità e frequenze

A sia l'esito di un certo numero n di prove di un dato fenomeno, e l'evento E di cui, in base a tale esperienza, si vuol valutare la probabilità, sia un'ulteriore prova del medesimo fenomeno (...) [dove con ciò si intende che esistono] analogie esteriori tra i diversi eventi. (...) Tali analogie esteriori ci inducono a valutare in modo in un certo senso simmetrico le probabilità delle diverse «prove».
[Supponiamo che] la simmetria nella valutazione della probabilità sia completa. Ci troviamo allora nel caso di eventi scambiabili. [...] Per fissare le idee possiamo immaginare che si tratti del gioco di testa e croce con una moneta che all'apparenza lascia il dubbio di essere imperfetta: qual è, dopo conosciuto l'esito di n prove, la probabilità di «testa» in un'altra prova?

Il calcolo I

Sia D una successione osservata di teste e croci

$$D = TTCCCCTC....C$$

in cui appaiono m teste ed $n - m$ croci. Sia A l'evento DT ossia la stessa successione D cui è aggiunta una testa al $n+1$ -esimo lancio. Vogliamo calcolare, utilizzando il teorema di Bayes, la probabilità $P(A|D)$ ovvero la probabilità che esca testa dopo aver osservato la sequenza D.
Per fare questo calcolo è necessario introdurre alcune valutazione probabilistiche a priori e delle ipotesi sugli eventi elementari che stiamo osservando. L'ipotesi normalmente utilizzata per gli eventi H_i, "esce testa all'i-esimo lancio" è quella che tali eventi siano indipendenti e identicamente distribuiti. È possibile, seguendo il suggerimento di de Finetti,

Il calcolo II

rilassare notevolmente l'ipotesi e usare solo che gli eventi siano scambiabili, nel senso che diremo, discutendo contemporaneamente le valutazioni a priori necessarie, di cui abbiamo fatto cenno.

Eventi scambiabili I

Ci limitiamo al caso relativo al lancio ripetuto di una moneta. Indichiamo $H^{(n)}_{j_1,\ldots,j_m}$ l'evento: "Lanciando n volte la moneta esce testa ai lanci $j_1,\ldots,j_m$ ed esce croce agli altri". L'ipotesi di scambiabilità consiste nel chiedere che la probabilità degli eventi $H^{(n)}_{j_1,\ldots,j_m}$ dipenda solo da n e m ma non dagli indici $j_1,\ldots,j_m$ che si considerano. Per esempio, $H^3_{1,2}, H^3_{1,3}, H^3_{2,3}$ devono tutti avere la stessa probabilità.
Sia $H^{(n)}_m$ l'evento unione degli $H^{(n)}_{j_1,\ldots,j_m}$ al variare dei sottoinsiemi con m elementi $\{j_1,\ldots,j_m\} \subset \{1,2,\ldots,n\}$. Se indichiamo con $\omega^{(n)}_m$ la probabilità di $H^{(n)}_m$, allora

$$P(H^{(n)}_{j_1,\ldots,j_m}) = \frac{\omega^{(n)}_m}{\binom{n}{m}}.$$

Eventi scambiabili II

Gli $H_m^{(n)}$ sono una partizione dell'evento certo quindi, fissato n, gli $\omega_m^{(n)}$ devono essere numeri compresi tra zero e uno che, sommati su m, devono dare 1.
Inoltre (perché ?),

$$\frac{\omega_m^{(n)}}{\binom{n}{m}} = \frac{\omega_m^{(n+1)}}{\binom{n+1}{m}} + \frac{\omega_{m+1}^{(n+1)}}{\binom{n+1}{m+1}}$$

Per procedere nel calcolo è necessario partire assegnando le probabilità $\omega_m^{(n)}$ in maniera arbitraria, pur di soddisfare le condizioni che abbiamo detto. Per esempio, si può assumere la prior uniforme

$$\omega_m^{(n)} = \frac{1}{n+1}.$$

Il calcolo: seguito I

A partire dal teorema di Bayes,

$$P(A|D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{\omega_{m+1}^{(n+1)}}{\binom{n+1}{m+1}} : \frac{\omega_m^{(n)}}{\binom{n}{m}} =$$

$$\frac{m+1}{(n-m+1)} \frac{\omega_m^{(n+1)}}{\omega_{m+1}^{(n+1)}} + m + 1 =$$

$$\frac{m+1}{n+2+(n+1-m)\left\{\frac{\omega_m^{(n+1)}}{\omega_{m+1}^{(n+1)}} - 1\right\}}$$

Con la prior uniforme otteniamo la regola di successione di Laplace [Liceo Matematico] $P(A|D) = \frac{m+1}{n+2}$ che è molto vicina alla frequenza empirica.

Tema di discussione - probabilità e simulazioni

- Geometria euclidea, riga e compasso, software di geometria dinamica. Calcolo delle probabilità, estrazioni dall'urna, generatore pseudocasuale di numeri e software di analisi statistica. È sensata questa analogia?
- Le simulazioni sono di aiuto a mettere in evidenza errori di ragionamento?
- Costruire una simulazione aiuta a comprendere la teoria, a rendere più consapevoli delle scelte, a porsi delle domande? Esempi: Simulazione del teorema del limite centrale - necessità di standardizzare le distribuzioni; giudizio di sostenibilità di un'ipotesi - distribuzione del chiquadro, ed altre possibili distribuzioni empiriche; costruzione di modelli per la generazione di sequenze biologiche - scoperta delle catene di Markov, determinazione dei parametri di un modello, problema della stima. Ampliare in modo operativo la classe degli eventi su cui si può scommetttere.

Leonardo da Vinci

Quelli che s'innamorano di pratica, sanza scienza, son come 'l nocchiere, ch'entra in navilio sanza timone o bussola, che mai ha certezza dove si vada.
Sempre la pratica dev'esser edificata sopra la bona teorica.

I dieci comandamenti per un buon insegnante di matematica – Polya I

1. Abbi interesse per la tua materia.
2. Conosci la tua materia.
3. Conosci i modi secondo i quali si impara: il miglior modo per imparare qualsiasi cosa è di scoprirla da soli.
4. Cerca di leggere sul viso degli studenti; cerca di capire le loro aspettative e le loro difficoltà; mettiti al loro posto.
5. Dai ai tuoi studenti non soltanto informazioni, ma anche *saper come*, attitudini mentali, abitudine al lavoro metodico.
6. Fai loro imparare ad indovinare.
7. Fai loro imparare a dimostrare.

8. Cerca quegli aspetti del problema in questione che possono essere utili per problemi futuri - cerca di mettere in evidenza lo schema generale che sta dietro la situazione concreta presente.
9. Non rivelare subito tutto il tuo segreto – fallo indovinare dagli studenti prima di dirlo – fa loro scoprire, da soli, quanto è possibile.
10. Suggeriscilo; non forzarlo.

Riferimenti

- De Finetti B. *Calcolo delle probabilità*, 1937, ristampato negli Atti dell'XI Convegno dell'Associazione per la Matematica Applicata alle Scienze Economiche e Sociali, 1987.
- De Finetti B. *La probabilità, guardarsi dalle contraffazioni*, Scientia, 1976, pp 255–282.
- De Finetti B. *Saper guardare in matematica*, Rivista UMI, La Matematica nella Società e nella Cultura, 2015.