MATEMATICA II (SES/SG) – 2021/2022

Esercizi Lezione 14

Esercizio 1. Studiare la convessità/concavità della funzione $f(x) = \sin x$ in $[0, 2\pi]$ e determinare gli eventuali flessi.

[*Soluzione:* concava per $0 \le x \le \pi$ e convessa per $\pi \le x \le 2\pi$, flesso in $x = \pi$.]

Esercizio 2. Calcolare i seguenti limiti (a volte può essere conveniente usare il teorema di l'Hopital):

(i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log x)^3}{x}$; (ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{\log(\sin x)}$; (iii) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos x}$;

(iv) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}$; (v) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1-e^x}{1-\cos(\sqrt{x})}$; (vi) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(\arctan x - \frac{\pi}{2}\right)$;

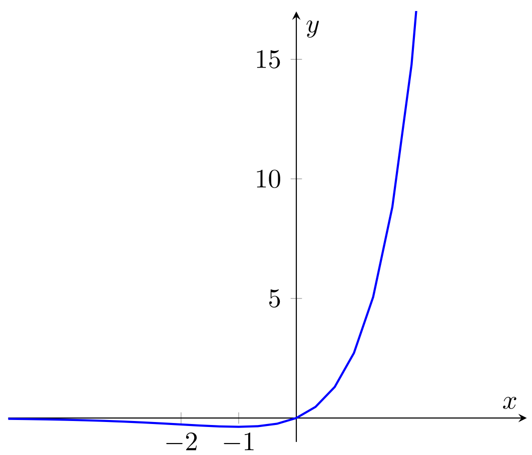
(vii) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x}$; (viii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{x+1}{x} - \frac{1}{\log(x+1)}\right)$; (ix) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(\sqrt{1+x^2})}{1-\cos x}$.

[*Soluzione:* (i) 0; (ii) 1; (iii) 0; (iv) $\frac{1}{2}$; (v) -2; (vi) -1; (vii) 1; (viii) $\frac{1}{2}$; (ix) 1.]

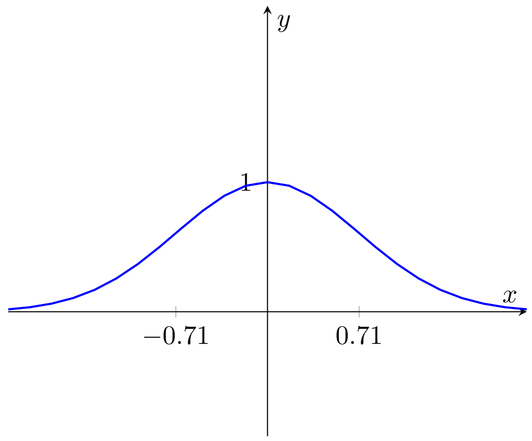
Esercizio 3. Disegnare il grafico delle funzioni:

$$\text{(a)} \quad f(x) = xe^x\,, \qquad\qquad \text{(b)} \quad g(x) = e^{-x^2}\,.$$

[*Soluzione*: Idea del grafico di $f(x)$:



Link al grafico su WolframAlpha. Il dominio è tutto l'asse reale. Punto di minimo in $x = -1$ (decrescente per $x < -1$ e crescente per $x > -1$) e punto di flesso in $x = -2$ (concava per $x < -2$ e convessa per $x > -2$). La retta $y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to -\infty$.
Idea del grafico di $g(x)$:



Link al grafico su WolframAlpha. Il dominio è tutto l'asse reale. Funzione pari. Punto di massimo in $x = 0$ (crescente per $x < 0$ e decrescente per $x > 0$) e punti di flesso in $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \sim 0.71$ (convessa per $x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e per $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$, concava per $\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$). La retta $y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$.]