MATEMATICA II (SES/SG) – 2021/2022

Esercizi Lezione 13

Esercizio 1. Sia data la funzione
$$f(x) = x - x^3 .$$
(a) Verificare che valgono le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[0, 1]$ e determinare un punto x_0 che verifichi la tesi del teorema.
(b) Verificare che valgono le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $[-2, 1]$ e determinare un punto x_0 che verifichi la tesi del teorema.

[*Soluzione:* (a) $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$; (b) $x_0 = -1$.]

Esercizio 2. Spiegare perchè non è possibile applicare il teorema di Rolle per la funzione
$$f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$$
nell'intervallo $[0, 4]$.

[*Soluzione:* $f(x)$ non è derivabile in $x = 2$ che è interno a $(0, 4)$.]

Esercizio 3. Determinare il dominio e gli insiemi in cui sono crescenti o decrescenti le seguenti funzioni:

(i) $f(x) = x(x-1)^2$; (ii) $f(x) = \sqrt{x+1}$; (iii) $f(x) = \dfrac{3x^2-1}{(x^2+1)^3}$;

(iv) $f(x) = xe^x$; (v) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$; (vi) $f(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$;

(vii) $f(x) = x - 2\sin x$; (viii) $f(x) = \arctan x - x$; (ix) $f(x) = \arcsin(x+1)$.

[*Soluzione:* (i) $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$, f crescente per $x \le \frac{1}{3}$ e $x \ge 1$, decrescente per $\frac{1}{3} \le x \le 1$; (ii) $\operatorname{dom} f = [-1, +\infty)$, f sempre crescente; (iii) $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$, crescente per $x \le -1$ e $0 \le x \le 1$, decrescente per $-1 \le x \le 0$ e $x \ge 1$; (iv) $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$, f crescente per $x \ge -1$, decrescente per $x \le -1$; (v) $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, f crescente per $x \ge 1$, decrescente per $x < 0$ e per $0 < x \le 1$; (vi) $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$, f sempre crescente; (vii) $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$, f crescente per $\frac{\pi}{3} + 2k\pi \le x \le \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$, decrescente per $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \le x \le \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; (viii) $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$, f sempre decrescente; (ix) $\operatorname{dom} f = [-2, 0]$, f sempre crescente.]