MATEMATICA II (SES/SG) – 2021/2022

Esercizi Lezione 11

Esercizio 1. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni nel punto x_0 indicato:

$$f_1(x) = x^2 + 1\,, \quad x_0 = 0\,, \qquad f_2(x) = 1 - x^3\,, \quad x_0 = 2\,,$$
$$f_3(x) = \frac{1}{x}\,, \quad x_0 = 2\,, \qquad f_4(x) = e^{2x}\,, \quad x_0 = 0\,.$$

[*Soluzione:* $f_1'(0) = 0$; $f_2'(0) = -12$, $f_3'(2) = -\frac{1}{4}$; $f_4'(x) = 2$.]

Esercizio 2. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni

$$f_1(x) = (2x^3 + x - 5)^{10}\,, \quad f_2(x) = \frac{x}{x^2+3}\,, \quad f_3(x) = \sin(x^3 - 1)\,,$$
$$f_4(x) = \sqrt{x^2 + 2x}\,, \quad f_5(x) = \tan(2x^2 + 5)\,, \quad f_6(x) = \sqrt[3]{1 + \sin^2(x)}\,,$$
$$f_7(x) = a^x\,, \quad f_8(x) = \log_a(x)\,, \quad f_9(x) = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right).$$

[*Soluzione:* $f_1'(x) = 10(6x^2+1)(2x^3+x-5)^9$; $f_2'(x) = \frac{3-x^2}{(x^2+3)^2}$; $f_3'(x) = 3x^2\cos(x^3-1)$; $f_4'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}$; $f_5'(x) = \frac{4x}{\cos^2(2x^2+5)}$; $f_6'(x) = \frac{2\sin x\cos x}{3\sqrt[3]{(1+\sin^2 x)^2}}$; $f_7'(x) = a^x\log a$; $f_8'(x) = \frac{1}{x\log a}$; $f_9'(x) = -\frac{1}{x^2+1}$.]

Esercizio 3. Usando la regola di derivazione delle funzioni inverse mostrare che

$$\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}\,.$$

[*Soluzione:* Usiamo la regola di derivazione delle funzioni inverse con $f^{-1}(x) = \arctan x$, $f(x) = \tan x$ e $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$. Quindi

$$\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\arctan x)}} = \frac{1}{\frac{\cos^2(\arctan x)+\sin^2(\arctan x)}{\cos^2(\arctan x)}}$$
$$= \frac{1}{1+\left(\frac{\sin(\arctan x)}{\cos(\arctan x)}\right)^2} = \frac{1}{1+(\tan(\arctan x))^2} = \frac{1}{1+x^2}\,.]$$