

MATEMATICA II (SES/SG) – 2021/2022

ESERCIZI LEZIONE 10

**Esercizio 1.** Trovare tutti i valori  $a \in \mathbb{R}$  tali che la funzione

$$f(x) = x + a|x|$$

sia invertibile su tutto l'asse reale.

(Suggerimento: può essere utile tracciare un grafico “approssimativo” della funzione.)

[*Soluzione:*  $a \in (-1, 1)$ .]

**Esercizio 2.** Studiare la continuità delle funzioni

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{3x^2}, & \text{se } x \geq 1, \\ ax + 1, & \text{se } x < 1, \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} e^x - 1, & \text{se } x \geq 0, \\ 2x + a, & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} x^2 + 2ax + a, & \text{se } x > 0, \\ \sqrt{x+2}, & \text{se } -2 \leq x \leq 0, \end{cases} \quad f_4(x) = \begin{cases} \frac{x+a|x|}{x^2}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

al variare del parametro  $a \in \mathbb{R}$ .

[*Soluzione:*  $f_1$  è continua per ogni  $x \in \mathbb{R}$  se  $a = -\frac{2}{3}$ , è discontinua (discontinuità di prima specie) in  $x = 1$  se  $a \neq -\frac{2}{3}$ ;  $f_2$  è continua per ogni  $x \in \mathbb{R}$  se  $a = e - 1$ , è discontinua (discontinuità di prima specie) in  $x = 0$  se  $a \neq 0$ ;  $f_3$  è continua per ogni  $x \geq -2$  se  $a = \sqrt{2}$ , è discontinua (discontinuità di prima specie) in  $x = 0$  se  $a \neq \sqrt{2}$ ;  $f_4$  è discontinua (discontinuità di seconda specie) in  $x = 0$  per ogni valore di  $a$ .]

**Esercizio 3.** Determinare  $a$  e  $b$  in modo che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{se } x \leq -\frac{\pi}{2} \\ a \sin x + b, & \text{se } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ \cos x, & \text{se } x \geq \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

sia continua per ogni  $x \in \mathbb{R}$ .

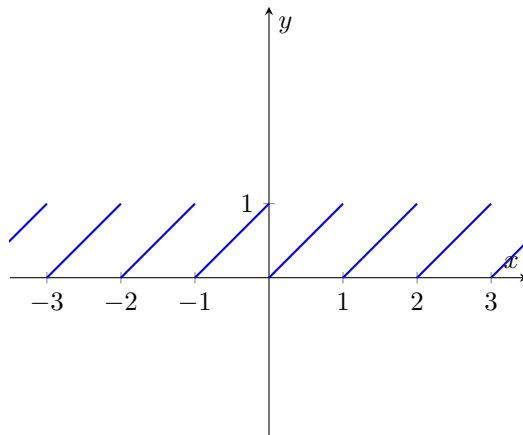
[*Soluzione:*  $a = \frac{1}{2} = -b$ .]

**Esercizio 4.** Per ogni  $x \in \mathbb{R}$  studiare la continuità della funzione  $f(x) = x - [x]$ , detta parte frazionaria di  $x$ . Ricordate che

$$[x] = \text{più grande intero minore o uguale a } x.$$

(Suggerimento: può essere utile tracciare un grafico della funzione.)

[*Soluzione:* Idea del grafico di  $f(x)$ :



La funzione  $f(x)$  è continua per ogni  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ . Se  $k \in \mathbb{Z}$  si ha

$$\lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = 1 \neq \lim_{x \rightarrow k^+} f(x) = 0.$$

Le discontinuità sono di prima specie.]