X,Y indipendenti
$X \sim F_X(x)$ con densità $f_X(x)$
$Y \sim F_Y(y)$ con densità $f_Y(y)$
obiettivo: trovare la densità di $Z = X + Y$

$$f_{X+Y}(z) = f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x) * supp(X) + g_Y(z-x) * supp(Y) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f_X(x) * \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(x) + g_Y(z-x) * \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(z-x) dx$$

dove
$\mathbb{I}_{(0,+\infty)}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$ $\mathbb{I}_{(0,+\infty)}(z-x) = \begin{cases} 1 & z - x > 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$.
Notiamo che la seconda funzione indicatrice può essere espressa come funzione di x nel seguente modo

$$\mathbb{I}_{(0,+\infty)}(z-x) = \mathbb{I}_{(-\infty,z)}(x) = \begin{cases} 1 & z > x \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

Pertanto le due densità $f(x), g(z-x)$ sono definite quando entrambe le funzioni indicatrici assumono valore 1, ossia quando il prodotto delle due funzioni indicatrici vale 1, cioè quando $\mathbb{I}_{(0,+\infty)}(x) * \mathbb{I}_{(-\infty,z)}(x) = 1$.
Ciò si verifica quando x appartiente contemporaneamente agli intervalli $(0, +\infty)$ e $(-\infty, z)$, cioè $x \in (0, +\infty) \cap (-\infty, z)$, ossia $x \in (0, z)$ con $z > 0$.
Quindi abbiamo che **quando $z > 0$**

$$\mathbb{I}_{(0,+\infty)}(x) * \mathbb{I}_{(-\infty,z)}(x) = \mathbb{I}_{(0,z)}(x)$$

Per concludere possiamo trovare gli estremi di integrazione nel seguente modo:

$$\int_{\mathbb{R}} f_X(x) * \mathbb{I}_{(0,-\infty)}(x) + g_Y(z-x) * \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(z-x) dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f_x(x) * g_Y(z-x) * \mathbb{I}_{(0,z)}(x) dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}\cap(0,z)} f_x(x) * g_Y(z-x) dx =$$

$$= \int_0^z f_X(x) * g_Y(z-x) dx$$