Inferenza Statistica

2° Prova Scritta a.a. 2015-2016 – 7 luglio 2016

ATTENZIONE: I FOGLI A QUADRETTI CONSEGNATI
NON VERRANNO CONSIDERATI

Cognome e Nome: ____________________________ **Canale** SEFA (F. De Santis) ☐ SES - SG (L. Tardella) ☐

Matricola: ____________________________

Esercizio 1. Sia $X_1, \dots X_n$ un campione casuale da una popolazione con funzione di massa di probabilità

$$f_X(x;\theta) = \theta(1-\theta)^{x-1} \qquad x = 1, 2, 3, \dots \qquad \theta \in (0,1)\,,$$

per cui è noto che

$$\mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{\theta} \qquad \mathbb{V}[X_i] = \frac{1-\theta}{\theta^2}.$$

1. Verificare se il modello appartiene alla famiglia esponenziale.
2. Determinare una statistica sufficiente per il modello e lo stimatore di massima verosimiglianza ($\widehat{\theta}_{mv}$) per il parametro θ.
3. Determinare lo stimatore dei momenti ($\widehat{\theta}_m$) per il parametro θ e verificare che coincide con quello di massima verosimiglianza.
4. Verificare che $\widehat{\psi} = \overline{X}_n - 1$ è uno stimatore non distorto dell'odds $\psi = \frac{1-\theta}{\theta}$ e che tale stimatore è consistente in MSE (errore quadratico medio).
5. Si può affermare che $\widehat{\psi}$ è l'UMVUE di ψ (motivare la risposta)?

Svolgimento:

Esercizio 2. Si considerino il modello e le assunzioni del precedente esercizio.

1. Verificare che la distribuzione asintotica dello stimatore di massima verosimiglianza è
$$\widehat{\theta}_{mv} \dot{\sim} \mathrm{N}\left(\theta, \frac{(1-\theta)\theta^2}{n}\right).$$
2. Determinare l'espressione dell'intervallo di confidenza asintotico di livello $1-\alpha$ per θ.
3. Supponendo di avere osservato un campione di dimensione $n = 20$ in cui $\sum_{i=1}^{n} x_i = 30$, determinare la stima della varianza asintotica di $\widehat{\theta}_{mv}$ e l'intervallo di confidenza asintotico di livello $1-\alpha = 0.90$ per θ.
4. Considerare il sistema di ipotesi semplici $H_0 : \theta = \theta_0$ vs. $H_1 : \theta = \theta_1$ e assumere che $\theta_0 < \theta_1$. Verificare che, per $n = 1$ la regione di accettazione del test di Neyman-Pearson ha regione di accettazione
$$A = \{x \in \mathbb{N} : \ x \geq k\}, \qquad k \in \mathbb{R}^+. \tag{1}$$
5. Calcolare la probabilità di errore di I tipo del test (1), assumendo $\theta_0 = 1/3$, $\theta_1 = 2/3$ e $k = 3$.

Svolgimento:

Esercizio 3. Si supponga che la distribuzione dell'altezza degli alberi di una foresta sia normale di media $\mu = 11.4$ metri e deviazione standard $\sigma = 1.3$ metri. Si consideri un campione casuale di $n = 20$ alberi.

1. Determinare la distribuzione campionaria di $\overline{X}_n$ e calcolare la probabilità che tale statistica assuma valori compresi tra 9.7 e 11 metri.

2. Determinare valore atteso e varianza di $2S_n^2 - 1$, dove $S_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2}{n-1}$ indica la varianza campionaria corretta.

3. Motivando la risposta, calcolare valore atteso e varianza di $\overline{X}_n - S_n^2$.

4. Calcolare la probabilità che S_n^2 assuma valori maggiori di 2.

5. Si consideri la statistica
$$Y = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{S_n}.$$
Calcolare la probabilità che Y assuma valori nell'intervallo $(-1.328, 2.093)$.

Svolgimento.