Esercizio 1. Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione casuale proveniente da una popolazione con funzione di densità

$$f_X(x;\theta) = (\theta+1)x^\theta \qquad x \in (0,1), \qquad \theta > 0.$$

1. Indicare gli elementi che definiscono il modello statistico e stabilire se la famiglia di densità $\{f_X(\cdot;\theta),\ \theta \in \Theta\}$ costituisce una famiglia esponenziale.
2. Determinare la funzione di verosimiglianza di θ e una statistica sufficiente per il modello e la stima di massima verosimiglianza per θ.
3. Calcolare la stima di massima verosimiglianza di θ e l'informazione osservata di Fisher per il campione osservato $(0.7, 0.6, 0.8)$.
4. Verificare che
$$E_\theta(X) = \frac{\theta+1}{\theta+2}, \qquad V_\theta(X) = \frac{(\theta+1)}{(\theta+3)(\theta+2)^2}$$
e determinare la distribuzione asintotica della statistica della media campionaria $\bar{X}_n$.
5. Utilizzando l'approssimazione normale di $\bar{X}_n$, calcolare la probabilità dell'evento
$$2\bar{X}_n - 1 > \frac{1}{2}$$
in funzione di θ. Stimare la quantità così determinata utilizzando il valore della stima di massima verosimiglianza di θ ottenuto al punto (3) dell'esercizio.

Svolgimento:

FOGLIO EXTRA