PROBABILITA' E LABORATORIO DI PROBABILITA'
Esame del 15/02/2016
Corso di laurea in Statistica Gestionale

Cognome :	**Nome** :	**Matricola** :

E1 :	+E2 :	+E3 :	=

E1) Consideriamo due urne aventi la seguente composizione iniziale: la prima contiene 2 palline rosse e 1 blu, mentre nella seconda è presente 1 pallina rossa e 2 blu. Si lancia una moneta regolare e se esce testa si estrae una pallina dalla prima urna, altrimenti si estrae una pallina dalla seconda. La pallina estratta non viene rimessa nell'urna di provenienza e si effettua un'altra estrazione con la stessa procedura (cioè si rilancia la moneta per scegliere l'urna).

a) Calcolare la probabilità che la prima pallina estratta sia rossa.

b) Calcolare la probabilità di ottenere una pallina rossa alla seconda estrazione.

c) Sapendo che alla seconda estrazione è uscita una pallina rossa, calcolare la probabilità che la pallina sia stata estratta dalla prima urna.

N.B. Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate

Soluzione

Indichiamo con $R_i, i = 1, 2$, l'evento esce rossa alla i-esima estrazione e con $T_i, i = 1, 2$, l'evento testa all'i-esima lancio della moneta. Chiaramente $P(T_i) = P$(si estrae la pallina dalla prima urna al lancio i-esimo)$= \frac{1}{2}$ e $P(T_i^c) = P$(si estrae la pallina dalla seconda urna al lancio i-esimo)$= \frac{1}{2}$.

a) Abbiamo che

$$P(R_1) = P(T_1)P(R_1|T_1) + P(T_1^c)P(R_1|T_1^c) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

b) Poniamo

$$\Omega = (T_1 \cap T_2) \cup (T_1 \cap T_2^c) \cup (T_1^c \cap T_2) \cup (T_1^c \cap T_2^c).$$

Pertanto

$$\begin{aligned} P(R_2) &= P(R_2 \cap \Omega) \\ &= P(R_2 \cap T_1 \cap T_2) + P(R_2 \cap T_1 \cap T_2^c) + P(R_2 \cap T_1^c \cap T_2) + P(R_2 \cap T_1^c \cap T_2^c) \end{aligned}$$

Abbiamo che

$$\begin{aligned} P(R_2 \cap T_1 \cap T_2) &= P(R_2 \cap T_1 \cap T_2 \cap (R_1 \cup R_1^c)) \\ &= P(R_2 \cap T_1 \cap T_2 \cap R_1) + P(R_2 \cap T_1 \cap T_2 \cap R_1^c) \\ &= P(R_2|T_1 \cap T_2 \cap R_1)P(T_2|T_1 \cap R_1)P(R_1|T_1)P(T_1) \\ &\quad + P(R_2|T_1 \cap T_2 \cap R_1^c)P(T_2|T_1 \cap R_1^c)P(R_1^c|T_1)P(T_1) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$P(R_2 \cap T_1 \cap T_2^c) = P(R_2|T_1 \cap T_2^c)P(T_2^c|T_1)P(T_1)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

$$\begin{aligned} P(R_2 \cap T_1^c \cap T_2) &= P(R_2 | T_1^c \cap T_2) P(T_2 | T_1^c) P(T_1^c) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(R_2 \cap T_1^c \cap T_2^c) &= P(R_2 \cap T_1^c \cap T_2^c \cap (R_1 \cup R_1^c)) \\ &= P(R_2 \cap T_1^c \cap T_2^c \cap R_1) + P(R_2 \cap T_1^c \cap T_2^c \cap R_1^c) \\ &= P(R_2 | T_1^c \cap T_2^c \cap R_1) P(T_2^c | T_1^c \cap R_1) P(R_1 | T_1^c) P(T_1^c) \\ &\quad + P(R_2 | T_1^c \cap T_2^c \cap R_1^c) P(T_2^c | T_1^c \cap R_1^c) P(R_1^c | T_1^c) P(T_1^c) \\ &= 0 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

In conclusione abbiamo che

$$P(R_2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2}.$$

c) La probabilità cercata si ottiene come segue

$$\begin{aligned} P(T_2 | R_2) &= \frac{P(R_2 \cap T_2)}{P(R_2)} \\ &= \frac{P(R_2 \cap T_2 \cap (T_1 \cup T_1^c))}{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{P(R_2 \cap T_2 \cap T_1) + P(R_2 \cap T_2 \cap T_1^c)}{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\frac{1}{6} + \frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

E2) Siano X ed Y due v.a. indipendenti ed esponenziali di parametro $\lambda > 0$. Consideriamo la v.a. doppia

$$(U, V) = (X + Y, e^X).$$

a) Determinare la funzione di densità di (U, V).

b) Verificare che la funzione ottenuta al punto a) sia una densità.

c) Calcolare $E(V|U = u)$.

N.B. Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate

Soluzione

a) Osserviamo che $U = g_1(X, Y) = X + Y$ e $V = g_2(X, Y) = e^X$. Le funzioni $u = g_1(x, y) = x+y$ e $v = g_2(x, y) = e^x$, definite su $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$, determinano una trasformazione biunivoca (quindi invertibile) (g_1, g_2) tale che

$$\begin{cases} u = g_1(x, y) = x + y \\ v = g_2(x, y) = e^x \end{cases} \iff \begin{cases} x = h_1(u, v) = \log v \\ y = h_2(u, v) = u - \log v \end{cases}$$

Si ha inoltre che $h_1(u, v)$ e $h_2(u, v)$ sono definite su $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : \log v > 0, u - \log v > 0\} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u > 0, e^u > v > 1\}$. Inoltre il determinante Jacobiano diventa

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{v} \\ 1 & -\frac{1}{v} \end{vmatrix} = 1/v, \quad \text{per } v > 1.$$

Pertanto applichiamo il Teorema dello Jacobiano ed otteniamo

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u, v) &= \begin{cases} f_{X,Y}(\log v, u - \log v)|J|, & \log v > 0, u - \log v > 0 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \\ &= \begin{cases} f_X(\log v) f_Y(u - \log v)|J|, & \log v > 0, u - \log v > 0 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda u} \frac{1}{v}, & u > 0, e^u > v > 1, \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \end{aligned}$$

b) E' immediato notare che $f_{U,V}(u, v) \geq 0, \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$. Inoltre

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} f_{U,V}(u, v) du dv &= \int_0^{+\infty} \left(\int_1^{e^u} \lambda^2 e^{-\lambda u} \frac{1}{v} dv \right) du \\ &= \int_0^{+\infty} \lambda^2 e^{-\lambda u} u du \\ &= \lambda \int_0^{+\infty} u \lambda e^{-\lambda u} du = 1 \end{aligned}$$

dove l'ultima passaggio segue, ad esempio, osservando che l'integrale è la media di una v.a. esponenziale; ovvero $1/\lambda$.

c) Determiniamo la densità condizionata $f_{V|U}(v|u)$. Abbiamo che per $u > 0$

$$f_U(u) = \int_{\mathbb{R}} f_{U,V}(u, v) dv$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_1^{e^u} \lambda^2 e^{-\lambda u} \frac{1}{v} dv \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda u} u
\end{aligned}
$$

Pertanto

$$
f_{V|U}(v|u) = \frac{f_{U,V}(u,v)}{f_U(u)} = \frac{1}{vu}, \quad u > 0, e^u > v > 1.
$$

In definitiva la media condizionata diventa

$$
E(V|U=u) = \int_{\mathbb{R}} v f_{V|U}(v|u) dv = \int_1^{e^u} \frac{1}{u} dv = \frac{e^u - 1}{u}, \quad u > 0.
$$

E3) Consideriamo una successione $\{X_n, n \geq 1\}$ di v.a. indipendenti ed uniformemente distribuite nell'intervallo $(0,1)$. Sia

$$Y_n = \frac{\sqrt{1 - \max(X_1, X_2, ..., X_n)}}{n}, \quad n \geq 1.$$

a) Studiare la convergenza in distribuzione della successione $\{Y_n, n \geq 1\}$.

b) Cosa possiamo affermare sulla convergenza in probabilità di $\{Y_n, n \geq 1\}$?

N.B. Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate

Soluzione

a) Osserviamo che $Y_n \in (0, 1/n)$ q.c. Per $y \in (0, 1/n)$ abbiamo che

$$\begin{aligned} F_{Y_n}(y) &= P(\sqrt{1 - \max(X_1, X_2, ..., X_n)} \leq ny) \\ &= P(\max(X_1, X_2, ..., X_n) \geq 1 - (ny)^2) \\ &= 1 - [F_{X_n}(1 - (ny)^2)]^n \\ &= 1 - [1 - (ny)^2]^n \end{aligned}$$

Quindi

$$F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ 1 - [1 - (ny)^2]^n, & 0 \leq y < 1/n, \\ 1, & y \geq 1/n. \end{cases}$$

Osserviamo che $\lim_{n\to\infty}[0, 1/n) = \{0\}$ e che $\lim_{n\to\infty}[1/n, \infty) = (0, \infty)$. Pertanto

$$\lim_{n\to\infty} F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ 1, & y > 0, \end{cases}$$

da cui segue

$$\lim_{n\to\infty} F_{Y_n}(y) \overset{(*)}{=} F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ 1, & y \geq 0. \end{cases}$$

dove l'uguaglianza $(*)$ è valida per $y \neq 0$ e $Y = 0$ q.c., cioè $Y \sim$Deg(0). In conclusione

$$Y_n \xrightarrow{d} 0.$$

b) Dalla teoria sulla convergenza di v.a. sappiamo che il risultato ottenuto al punto a) implica anche la convergenza in probabilità alla degenere in 0. Quindi

$$Y_n \xrightarrow{p} 0.$$