PROBABILITA' E LABORATORIO DI PROBABILITA'
Esame del 18/01/2016
Corso di laurea in Statistica Gestionale

Cognome :	**Nome** :	**Matricola** :

E1 :	+E2 :	+E3 :	=

E1) A e B lanciano a turno un dado regolare ed inizia A. Vince, ed in questo caso il gioco ha termine, chi per primo ottiene 1. Inoltre se entro il lancio n-esimo ($n \geq 2$) del dado non esce 1 il gioco termina.

Calcolare:

a) la probabilità che il gioco termini senza vincitori;

b) la probabilità di vittoria di A;

c) la probabilità di vittoria di B.

N.B. Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate

Soluzione

Per prima cosa osserviamo che il dado viene lanciato al massimo n volte e che A effettua i lanci dispari mentre B quelli pari. Indichiamo con L_k l'evento esce 1 al lancio k-esimo. Chiaramente questi eventi sono tra loro indipendenti ed inoltre

$$P(L_k) = \frac{1}{6}, \quad P(L_k^c) = \frac{5}{6}$$

a) Sia $N =$"nessuno dei due giocatori vince il gioco", si avrebbe che

$$N = L_1^c \cap L_2^c \cap ... \cap L_n^c$$

da cui

$$P(N) = P(L_1^c \cap L_2^c \cap ... \cap L_n^c) = \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

b) Sia $V_A =$ "vince A", abbiamo che per un numero di lanci pari $n = 2k, k = 1, 2, ...$, l'evento V_A è dato da

$$V_A = L_1 \cup (L_1^c \cap L_2^c \cap L_3) \cup (L_1^c \cap L_2^c \cap L_3^c \cap L_4^c \cap L_5) \cup ... \cup (L_1^c \cap L_2^c \cap ... \cap L_{2k-2}^c \cap L_{2k-1})$$

Pertanto

$$\begin{aligned} P(V_A) &= P(L_1) + P(L_1^c \cap L_2^c \cap L_3) + P(L_1^c \cap L_2^c \cap L_3^c \cap L_4^c \cap L_5) \\ &\quad + ... + P(L_1^c \cap L_2^c \cap ... \cap L_{2k-2}^c \cap L_{2k-1}) \\ &= \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^4 \frac{1}{6} + ... + \left(\frac{5}{6}\right)^{2k-2} \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{6}\left(1 + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^4 + ... + \left(\frac{5}{6}\right)^{2k-2}\right) \\ &= \frac{1}{6}\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{5}{6}\right)^{2i} = \frac{1}{6}\frac{1-\left(\frac{5^2}{6^2}\right)^k}{1-\frac{5^2}{6^2}} = \frac{6}{11}\left[1 - \left(\frac{25}{36}\right)^k\right] \end{aligned}$$

ed essendo $n = 2k$ possiamo scrivere che

$$P(V_A) = \frac{6}{11}\left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right]$$

Se n fosse dispari, cioè $n = 2k+1, k = 1, 2, ...$, l'evento V_A sarebbe esprimibile nel seguente modo

$$V_A = L_1 \cup (L_1^c \cap L_2^c \cap L_3) \cup (L_1^c \cap L_2^c \cap L_3^c \cap L_4^c \cap L_5) \cup ... \cup (L_1^c \cap L_2^c \cap ... \cap L_{2k}^c \cap L_{2k+1})$$

e quindi con calcoli simili al caso precedente si avrebbe

$$\begin{aligned}
P(V_A) &= P(L_1) + P(L_1^c \cap L_2^c \cap L_3) + ... + P(L_1^c \cap L_2^c \cap ... \cap L_{2k}^c \cap L_{2k+1}) \\
&= \frac{1}{6}\left(1 + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^4 + ... + \left(\frac{5}{6}\right)^{2k}\right) \\
&= \frac{1}{6}\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{5}{6}\right)^{2i} = \frac{1}{6}\frac{1 - \left(\frac{5^2}{6^2}\right)^{k+1}}{1 - \frac{5^2}{6^2}} = \frac{6}{11}\left[1 - \left(\frac{25}{36}\right)^{k+1}\right]
\end{aligned}$$

ed essendo $n = 2k + 1$ si ha

$$P(V_A) = \frac{6}{11}\left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}\right]$$

Ricapitolando

$$P(V_A) = \begin{cases} \frac{6}{11}\left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right], & \text{se } n \text{ è pari} \\ \frac{6}{11}\left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}\right], & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

c) Sia $V_B =$ "vince B"$= V_A^c \cap N^c$, da cui

$$\begin{aligned}
P(V_B) &= 1 - P(V_A) - P(N) \\
&= \begin{cases} \frac{5}{11}\left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right], & \text{se } n \text{ è pari} \\ \frac{5}{11}\left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right], & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} \\
&= \frac{5}{11}\left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{2k}\right], \quad \text{se}\, n = 2k \,\text{o}\, n = 2k + 1, k = 1, 2, ...
\end{aligned}$$

E2) Siano X ed Y due v.a. indipendenti e distribuite uniformemente nell'intervallo $(0,1)$. Consideriamo

$$Z = \log(X) + \log(Y).$$

a) Determinare la funzione di ripartizione della v.a. Z.

b) Calcolare la funzione di densità di Z.

c) Calcolare il valor medio di Z.

N.B. Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate

Soluzione

a) Osserviamo che $Z \in (-\infty, 0)$ q.c. Notiamo inoltre che la densità congiunta di X ed Y, essendo le due v.a. indipendenti e uniformi in (0,1), è pari a

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0, & \text{altrove.} \end{cases}$$

Pertanto

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = 1, \quad z \geq 0.$$

Per $z < 0$ invece si ha

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) \\ &= P(\log(XY) \leq z) \\ &= P(Y \leq \frac{e^z}{X}) \\ &= \iint_A f_{XY}(x,y) dxdy \end{aligned}$$

dove $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq e^z/x\}$. Essendo f_{XY} definita diversa da zero solo nel quadrato $Q = (0,1) \times (0,1)$, il nostro insieme di integrazione si riduce alla regione del piano i cui punti appartengono al quadrato Q e che si trovano al di sotto dell'iperbole equilatera $xy = e^z$. Inoltre disegnando questo dominio di integrazione ci si accorge che conviene calcolare la probabilità cercata mediante la probabilità dell'evento complementare. Pertanto in definitiva abbiamo che

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \iint_{\{(x,y): 0<x<1, 0<y<1, y \leq e^z/x\}} dxdy \\ &= 1 - P(Z > z) \\ &= 1 - \iint_{\{(x,y): 0<x<1, 0<y<1, y > e^z/x\}} dxdy \\ &= 1 - \int_{e^z}^1 dx \int_{e^z/x}^1 dy \\ &= 1 - \int_{e^z}^1 \left(1 - \frac{e^z}{x}\right) dx \\ &= e^z(1-z), \quad z < 0. \end{aligned}$$

Pertanto

$$F_Z(z) = \begin{cases} e^z(1-z), & z < 0, \\ 1, & z \geq 0. \end{cases}$$

b) La funzione di ripartizione F_Z soddisfa tutte le condizioni del teorema fondamentale del calcolo integrale e quindi abbiamo che la densità di Z diventa

$$f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = \begin{cases} -ze^z = |z|e^{-|z|}, & z < 0, \\ 0, & z \geq 0. \end{cases}$$

c) Per il valor medio di Z procediamo come segue

$$\begin{aligned} E(Z) &= -\int_{-\infty}^{0} z^2 e^z dz = (z = -t) \\ &= -\int_{0}^{\infty} t^2 e^{-t} dt = -\Gamma(3) = -2 \end{aligned}$$

dove gli ultimi due passaggi derivano dalle seguenti osservazioni: $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ e $\Gamma(n) = (n-1)!, n \in \mathbb{N}$.

E3) Sia $\{X_n, n \geq 1\}$ una successione di v.a. indipendenti ed identicamente distribuite. Consideriamo inoltre una v.a. Y e la successione definita da

$$Z_n = Y e^{\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{n}}.$$

Studiare la convergenza in probabilità di $\{Z_n, n \geq 1\}$ (esplicitare la distribuzione della v.a. limite) se:

a) $X_n \sim \text{Poisson}(\lambda)$ e $Y \sim N(0,1)$;

b) $X_n \sim \text{Un}\{0,3,6\}$ e $Y \sim \text{Esp}(e^3)$.

N.B. Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate

Soluzione

a) Osserviamo che $E(X_n) = \lambda$ e che

$$W_n = e^{\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{n}} \xrightarrow{p} e^\lambda$$

per la legge debole dei grandi numeri ed il teorema della funzione continua per la convergenza i.p. Pertanto $(Y, W_n) \xrightarrow{p} (Y, e^\lambda)$ ed essendo

$$Z_n = g(Y, W_n) = Y e^{W_n}$$

per il teorema della funzione continua si ha

$$Z_n \xrightarrow{p} g(Y, e^\lambda) = Y e^\lambda \sim N(0, e^{2\lambda}).$$

b) Notiamo che $E(X_n) = 3$ e con ragionamenti analoghi a quelli svolti nel punto precedente si ottiene che

$$Z_n \xrightarrow{p} Y e^3 \sim \text{Esp}(1)$$

dove l'ultima affermazione deriva dal fatto che per $z \geq 0$

$$P(e^3 Y \leq z) = P(Y \leq e^{-3} z) = 1 - e^{-z}.$$