Inferenza Statistica
a.a. 2015-2016 – 13 gennaio 2017
IV prova scritta

ATTENZIONE: I FOGLI A QUADRETTI CONSEGNATI NON VERRANNO CONSIDERATI

•••

Cognome e Nome: ______________________ **Canale** SEFA (F. De Santis) ☐
SES - SG (L. Tardella) ☐

Esercizio 1. Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione casuale proveniente da una popolazione con funzione di densità

$$f_X(x;\theta) = (\theta+1)x^{\theta}, \qquad x \in (0,1) \qquad \theta > -1.$$

1. Determinare il modello statistico e stabilire se $\{f_X(\cdot;\theta),\ \ \theta \in \Theta\}$ è una famiglia esponenziale.

2. Determinare la funzione di verosimiglianza di θ e una statistica sufficiente per il modello.

3. Calcolare la stima di massima verosimiglianza di θ e l'informazione osservata di Fisher per il campione osservato $\mathbf{x}_3 = (0.7, 0.6, 0.8)$.

4. Determinare, per un generico valore elevato di n, l'approssimazione normale della funzione di verosimiglianza. Sulla base di tale approssimazione, calcolare gli estremi dell'insieme di verosimiglianza di livello $q = 0.147$.

.

Esercizio 2. Sia $X_1, \dots, X_n$ un campione casuale proveniente da una popolazione con funzione di densità

$$f_X(x;\theta) = \frac{1}{2\theta+1} I_{[\theta-1,3\theta]}(x), \qquad \theta > 0.$$

1. Disegnare la funzione di densità della v.a. X. Calcolare valore atteso e varianza della statistica media campionaria, $\overline{X}_n$.

   [**Sugg.** Ricordare che per una v.a. uniforme definita nell'intervallo $[a, b]$ si ha che $\mathbb{E}[X] = (a+b)/2$ e $\mathbb{V}[X] = (b-a)^2/12$].

2. Si consideri la statistica

   $$T(\mathbf{X}_n) = a\overline{X}_n + b, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

   Determinare i valori di a e b per i quali la statistica T è uno stimatore non distorto di

   $$\psi = \frac{1}{3}\theta - 1.$$

3. Determinare lo stimatore dei momenti, $\widehat{\theta}_M$, per il parametro θ e calcolarne distorsione, varianza ed errore quadratico medio. Determinare il limite per n che tende a infinito dell'errore quadratico medio.

4. Determinare l'approssimazione asintotica per la distribuzione campionaria dello stimatore dei momenti, $\widehat{\theta}_M$. Utilizzando tale distribuzione, calcolare la probabilità dell'evento $\{\widehat{\theta}_M > 5/4\}$, assumendo $\theta = 1$ e $n = 16$.

Esercizio 3. Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione casuale proveniente dalla popolazione con funzione di densità di probabilità

$$f_X(x;\theta) = \theta e^{-\theta x}, \qquad x > 0, \qquad \theta > 0,$$

con

$$E[X] = \frac{1}{\theta} \qquad\qquad V[X] = \frac{1}{\theta^2}.$$

Si consideri il sistema di ipotesi

$$H_0: \quad \theta = \theta_0, \qquad H_1: \quad \theta = \theta_1, \qquad\qquad (\theta_0 > \theta_1).$$

1. Verificare che la regione di accettazione del test di Neyman-Pearson risulta essere l'insieme
$$A = \{\mathbf{x}_n : \quad \overline{x}_n < k\}, \qquad k > 0.$$

2. Utilizzando la distribuzione asintotica di $\overline{X}_n$, verificare che il valore di k per il quale la probabilità di errore di I specie del test di cui al punto 1) è pari a α risulta essere
$$k_\alpha = \frac{1}{\theta_0} + z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{1}{n\theta_0^2}}.$$

3. Stabilire se, per un campione in cui la media campionaria è pari a 1.5, l'ipotesi nulla viene accettata o rifiutata, per $\alpha = 0.05$.

4. Determinare la potenza del test considerato, assumendo $\alpha = 0.05$, $\theta_0 = 2$ e $\theta_1 = 1$ $n = 25$.