Inferenza Statistica

3° Prova Scritta a.a. 2015-2016 – 8 settembre 2016

ATTENZIONE: I FOGLI A QUADRETTI CONSEGNATI NON VERRANNO CONSIDERATI

Cognome e Nome: ____________________ **Canale** SEFA (F. De Santis) ☐ SES - SG (L. Tardella) ☐

Matricola: ____________________

Esercizio 1. Sia $X_1, \ldots X_n$ un campione casuale da una popolazione con funzione di densità di probabilità

$$f_X(x;\theta) = \theta x^{-2}, \qquad \theta \leq x < \infty, \qquad \theta > 0.$$

1. Verificare che $f_X(\cdot;\theta)$ è, per ogni $\theta > 0$, una funzione di densità di probabilità e disegnarne il grafico per $\theta = 1$ e $\theta = 2$.
2. Determinare la funzione di verosimiglianza di θ associata a un generico campione di dimensione n, una statistica sufficiente per il modello e, se esiste, lo stimatore di massima verosimiglianza ($\widehat{\theta}_{mv}$) per il parametro θ.
3. Determinare la funzione di verosimiglianza relativa $\overline{L}(\theta)$ del parametro incognito e tracciarne il grafico, indicando dove si colloca il valore $\widehat{\theta}_{mv}$.
4. Determinare l'insieme di verosimiglianza di livello q (espressione analitica e rappresentazione grafica).
5. Determinare il valore di $\widehat{\theta}_{mv}$ e gli estremi dell'insieme di verosimiglianza di livello $q = 0.5$ per il campione osservato $(2.4, 3.2, 1.8, 2.2, 1.9)$.
6. Determinare, se esiste, lo stimatore dei momenti per il parametro θ.

Svolgimento:

Esercizio 2. Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione casuale da una popolazione X con funzione di densità di probabilità

$$f_X(x;\theta) = x(\theta+2)x^{\theta}, \qquad x \in (0,1), \qquad \theta > -2.$$

1. Verificare che lo stimatore di massima verosimiglianza di θ è

$$\widehat{\theta}_{mv}(\mathbf{x}_n) = -\frac{n}{\ln \prod_{i=1}^n x_i} - 2.$$

2. Determinare l'informazione attesa di Fisher.

3. Verificare che la distribuzione asintotica dello stimatore di massima verosimiglianza di θ è

$$\mathrm{N}\left(\theta, \frac{(\theta+2)^2}{n}\right)$$

4. Si consideri un campione casuale di dimensione $n = 20$ per il quale si abbia $\ln \prod_{i=1}^n x_i = -19$. Determinare stima di massima verosimiglianza e intervallo di confidenza approssimato per θ, ponendo $1-\alpha = 0.95$.

Svolgimento:

Esercizio 3. Si consideri il modello statistico dell' Esercizio 2.

1. Considerare il sistema di ipotesi semplici $H_0 : \theta = \theta_0 = 1$ vs. $H_1 : \theta = \theta_1 = 0$. Verificare che, per $n = 1$ la regione di accettazione del test di Neyman-Pearson ha regione di accettazione

$$A = \{x \in (0,1) : \ x \geq k\}, \qquad k \in \mathbb{R}^+. \tag{1}$$

2. Calcolare le probabilità di errore di I e II tipo e la potenza del test (1), assumendo $k = 4/5$.

3. Verificare che, per un campione casuale di dimensione n, la generica regione di accettazione del test test di Neyman-Pearson è definita da:

$$\{\mathbf{x}_n : \ \widehat{\theta}_{mv}(\mathbf{x}_n) > k\}, \qquad k > 0.$$

4. Determinare l'espressione della regione di accettazione del test basato sulla distribuzione asintotica di $\widehat{\theta}_{mv}$ (vedi Esercizio 2, Punto 3).

5. Utilizzando i dati disponibili ($n = 20$ per il quale si abbia $\ln \prod_{i=1}^{n} x_i = -19$), stabilire se, assumendo $\alpha = 0.05$, l'ipotesi nulla viene o meno accettata.

Svolgimento: