Inferenza Statistica

II Prova Scritta A.A. 2010-2011 – 7 luglio 2011

ATTENZIONE: I FOGLI A QUADRETTI CONSEGNATI
NON VERRANNO CONSIDERATI

***

Cognome e Nome: ______________________________ **Canale**

A-D (De Santis) ☐
E-N (Tardella) ☐
O-Z (Verdinelli) ☐

Esercizio 1. Si consideri un campione casuale di $n = 100$ osservazioni provenienti da una popolazione normale con media μ incognita e varianza $\sigma^2 = 9$.

1. Si determini il numero a per cui

$$P\left(|\overline{X}_n - \mu| < a\right) = 0.9.$$

2. Supponendo che il valore di μ sia pari a 4, calcolare la seguente probabilità:

$$P\left(\frac{\overline{X}_n}{\sigma} > 1\right).$$

Pagina Extra

Esercizio 2. Per un campione casuale di $n = 9$ osservazioni provenienti da una distribuzione normale con valore atteso $\mu = 2$ e varianza $\sigma^2 = 16$, si considerino le tre statistiche campionarie:

$$T_1(\mathbf{X}_n) = \frac{1}{3}\overline{X}_n - 2, \qquad T_2(\mathbf{X}_n) = \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2, \qquad T_3(\mathbf{X}_n) = \frac{1}{2}\overline{X}_n - \frac{3}{4}S_n^2,$$

1. Calcolare il valore atteso e la varianza delle tre statistiche campionarie.
2. Calcolare la probabilità che la statistica $T_2(\mathbf{X}_n)$ assuma valori superiori a 4.

Pagina Extra

Esercizio 3. Si consideri un campione casuale di n osservazioni estratto da una popolazione X con funzione di densità

$$f_X(x;\theta) = \theta\,(1-x)^{\theta-1}, \qquad x \in (0,1), \qquad \theta > 0.$$

1. Si verifichi che lo stimatore di massima verosimiglianza per θ è $\widehat{\theta}_{MLE} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \log(1-X_i)}$.

2. Si utilizzi il test di Neyman-Pearson per il confronto tra le ipotesi

$$H_0 : \theta = \theta_0 \qquad H_1 : \theta = \theta_1 \qquad (\theta_0 < \theta_1)$$

   e si mostri che la regione di accettazione è

$$RA = \{\mathbf{X} \in \mathcal{X}^n : \widehat{\theta}_{\text{MLE}} < K\}. \tag{1}$$

3. Verificare che asintoticamente si ha $\widehat{\theta}_{MLE} \approx N(\theta, \frac{\theta^2}{n})$.

4. Ottenere l'espressione dell'intervallo di confidenza approssimato per θ di livello 0.80 e calcolarne gli estremi supponendo di avere osservato un campione di $n = 225$ unità, per il quale $\widehat{\theta}_{MLE} = 1.5$.

5. Si consideri il campione osservato di cui al punto precedente. Si vogliono confrontare le ipotesi:

$$H_0 : \theta_0 = 1.3 \qquad H_1 : \theta_1 = 1.6.$$

   Calcolare il valore approssimato della potenza del test (1), ottenuto ponendo $K = 1.464$.

Pagina Extra